目　录

前言……（1）
第一章　电子工程中的傅里叶级数……（1）
§1.1　傅里叶级数
1.1.1　什么是傅里叶级数 ……（1）
1.1.2　傅里叶系数的确定 ……（4）
1.1.3　波形的对称性 ……（10）
1.1.4　傅里叶级数的复数形式 ……（17）
§1.2　离散谱 ……（19）
1.2.1　什么是频谱 ……（19）
1.2.2　周期性方波的频谱 ……（20）
1.2.3　间断正弦波的频谱 ……（23）
1.2.4　调幅波的频谱 ……（28）
1.2.5　几点说明 ……（31）
§1.3　傅里叶积分 ……（35）
1.3.1　周期信号转化为非周期信号 ……（35）
1.3.2　傅里叶积分公式 ……（40）
§1.4　连续谱 ……（44）
1.4.1　频谱密度 ……（44）
1.4.2　指数衰减信号的频谱 ……（47）
1.4.3　单个矩形脉冲信号的频谱 ……（50）

1.4.4 钟形脉冲信号的频谱 …… (52)
第二章 电子工程中的傅里叶变换方法 …… (54)
§2.1 傅里叶变换及其性质 …… (54)
2.1.1 符号$\mathcal{F}$和$\mathcal{F}^{-1}$ …… (54)
2.1.2 线性叠加性质 …… (54)
2.1.3 平移性质 …… (55)
2.1.4 伸缩性质 …… (57)
2.1.5 微分性质 …… (58)
§2.2 δ函数及其傅里叶变换 …… (61)
2.2.1 δ函数 …… (61)
2.2.2 δ函数的傅里叶变换 …… (65)
2.2.3 与δ函数有关的某些信号的频谱 …… (67)
2.2.4 任意周期函数的傅里叶变换 …… (73)
§2.3 电路应用 …… (74)
2.3.1 周期信号通过线性电路 …… (75)
2.3.2 周期性方波通过 *RC* 电路 …… (76)
2.3.3 非周期信号通过线性电路 …… (77)
2.3.4 理想的低通滤波器 …… (79)
2.3.5 不失真问题 …… (83)
第三章 电子工程中的拉普拉斯变换方法(I) …… (85)
§3.1 初步讨论 …… (85)
3.1.1 什么是$\mathcal{L}$变换 …… (85)
3.1.2 线性叠加性质 …… (87)
3.1.3 微分和积分的$\mathcal{L}$变换 …… (89)
3.1.4 $\mathcal{L}^{-1}$变换 …… (95)
3.1.5 小结 …… (98)
§3.2 简单应用 …… (101)
3.2.1 一阶和二阶电路的瞬态分析 …… (101)

3.2.2 阻抗函数和传输函数 …… (110)
3.2.3 微分电路和积分电路 …… (116)
3.2.4 运算放大器的简单分析 …… (117)
§3.3 $\mathscr{L}$变换的其他常用性质 …… (119)
3.3.1 时移性质 …… (120)
3.3.2 衰减性质 …… (124)
3.3.3 相似性质 …… (125)
3.3.4 初值和终值 …… (126)
3.3.5 卷积性质 …… (129)
3.3.6 卷积性质的应用 …… (132)
第四章 电子工程中的拉普拉斯变换方法(Ⅱ) …… (141)
§4.1 进一步讨论 …… (141)
4.1.1 $\mathscr{L}$变换作为傅里叶变换的推广 …… (141)
4.1.2 $\mathscr{L}$积分的收敛问题 …… (145)
4.1.3 δ函数的$\mathscr{L}$变换 …… (148)
4.1.4 0^+系统和0^-系统 …… (152)
4.1.5 $F(s)$的解析性 …… (160)
§4.2 计算$\mathscr{L}^{-1}$变换的一般方法 …… (163)
4.2.1 部分分式展开法 …… (163)
4.2.2 应用留数定理计算$\mathscr{L}^{-1}$变换 …… (171)
§4.3 双边$\mathscr{L}$变换 …… (175)
4.3.1 什么是双边$\mathscr{L}$变换 …… (175)
4.3.2 收敛区域 …… (175)
4.3.3 与单边$\mathscr{L}$变换的关系 …… (179)
4.3.4 求$\mathscr{L}^{-1}$变换的方法 …… (181)
§4.4 进一步应用实例 …… (185)
4.4.1 无源网络 …… (185)
4.4.2 频谱分析 …… (190)

4.4.3 波形变换 …… (194)
4.4.4 频率响应 …… (199)
4.4.5 有源网络 …… (215)
4.4.6 滤波器 …… (232)
第五章 电子工程中的复变函数(Ⅰ) …… (245)
§5.1 复数 …… (245)
5.1.1 复数的表示方法 …… (245)
5.1.2 基本运算 …… (249)
5.1.3 相量 $re^{j\omega t}$ …… (253)
5.1.4 复数共轭和模的常用性质 …… (258)
5.1.5 其他初等运算 …… (261)
§5.2 复变函数 …… (267)
5.2.1 复变函数的定义及多值性 …… (267)
5.2.2 极限、连续性、可导性和解析性 …… (272)
5.2.3 柯西-黎曼条件 …… (281)
5.2.4 调和函数 …… (284)
5.2.5 静电场问题 …… (287)
§5.3 保角映射 …… (292)
5.3.1 什么是保角映射 …… (292)
5.3.2 分式线性映射 …… (299)
5.3.3 阻抗圆图 …… (306)
第六章 电子工程中的复变函数(Ⅱ) …… (313)
§6.1 复变函数的积分 …… (313)
6.1.1 从实积分到复积分 …… (313)
6.1.2 一个重要的不等式 …… (315)
6.1.3 积分和积分路径的关系 …… (318)
6.1.4 解析函数的闭路积分表示 …… (322)
§6.2 解析函数的级数表示 …… (325)

6.2.1 初步讨论 …… (325)
6.2.2 罗朗级数 …… (327)
6.2.3 留数 …… (335)
6.2.4 再论部分分式展开 …… (341)
6.2.5 应用实例:*RC* 二端网络结构设计 …… (343)
§6.3 复变函数的进一步应用 …… (346)
6.3.1 反馈系统的稳定性 …… (347)
6.3.2 电路系统稳定性的罗斯－胡维茨判据 …… (356)
6.3.3 *LC* 二端网络结构的实现 …… (365)
6.3.4 正实函数与网络综合 …… (370)
习题 …… (383)
参考书目 …… (407)
习题答案 …… (408)
附录Ⅰ 常用周期函数的傅里叶级数 …… (419)
附录Ⅱ 傅里叶变换表 …… (421)
附录Ⅲ 拉普拉斯变换表 …… (425)

第一章　电子工程中的傅里叶级数

§1.1　傅里叶级数

1.1.1　什么是傅里叶级数

在电子学实验中，我们从示波器的荧光屏上看到过各种各样的周期性电信号(图 1.1.1)。所谓周期性就是说每经过一个周期 T 的时间，信号波形就重复一次。如果以 $f(t)$表示信号波形随时间 t 的变化，则周期性的数学表示式为

$$f(t+nT)=f(t) \qquad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (1.1.1)$$

我们在实际工作中已经知道，一个复杂的无线电信号一般地可以分解为以下三部分：

1.直流分量；　2.基波分量；　3.谐波分量；

其中基波分量就是与原来的周期信号频率相同的正弦波，谐波分量就是频率为原信号频率整数倍的一系列正弦波。

我们用一个常数表示直流分量(记为$\frac{a_0}{2}$)，基波分量可表示为 $D_1\cos(\omega t-\varphi_1)$，这里 D_1 是基波分量的幅度，ω 是它的角频率($\omega=2\pi f$，f 为频率)，φ_1 是初位相，基波的表示式也可以改写成

$$\begin{aligned} D_1\cos(\omega t-\varphi_1) &= D_1\cos\varphi_1\cos\omega t + D_1\sin\varphi_1\sin\omega t \\ &= a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \end{aligned}$$

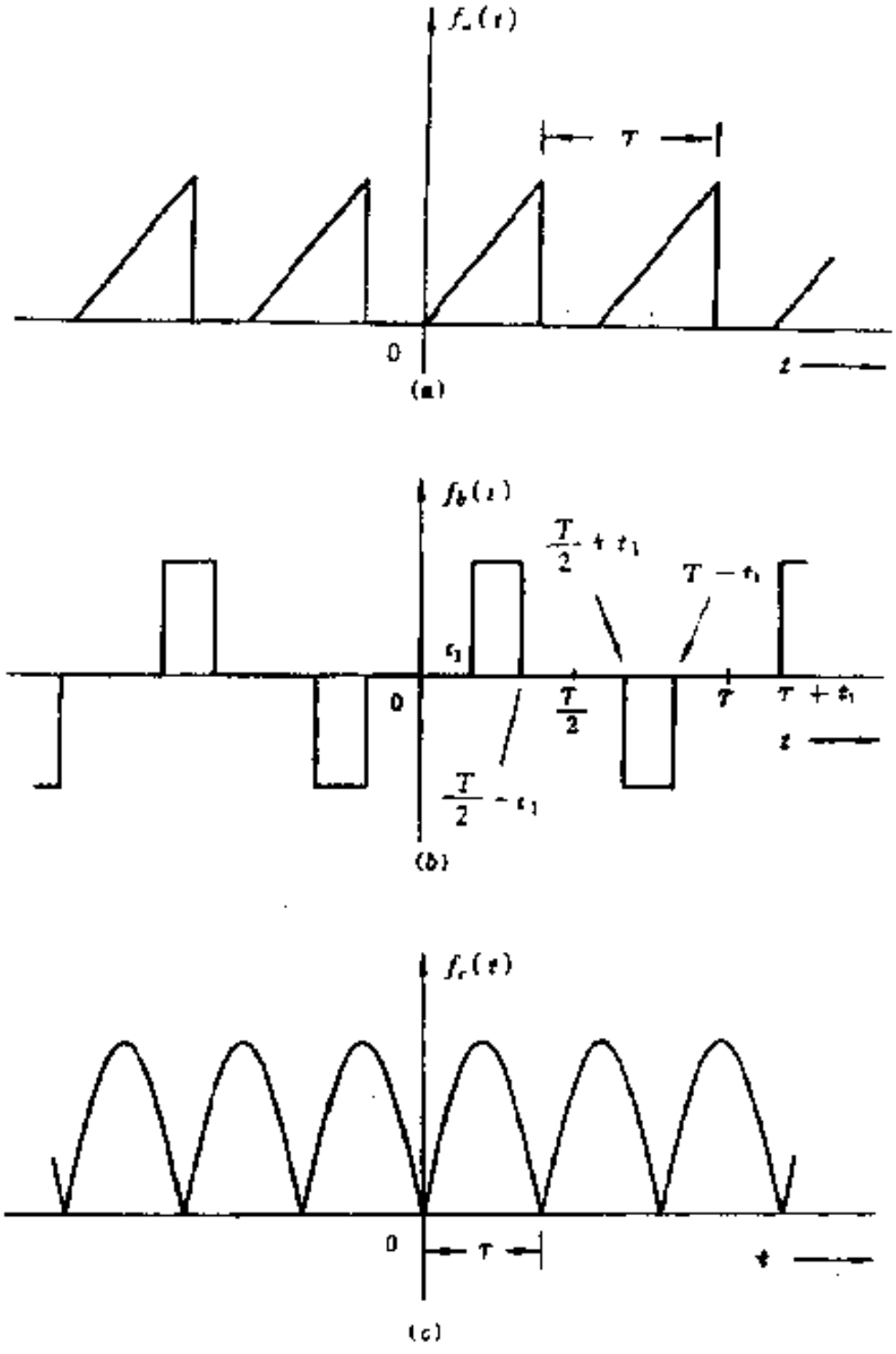


图 1.1.1　周期性信号的例子

其中

$$D_1^2 = a_1^2 + b_1^2; \quad \mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{b_1}{a_1}$$

二次谐波的角频率是 2ω，它同样可表示成：

$$D_2\cos(2\omega t - \varphi_2) = a_2\cos 2\omega t + b_2\sin 2\omega t$$

其中

$$D_2^2 = a_2^2 + b_2^2; \quad \mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{b_2}{a_2}$$

对于其他高次谐波也可以类似地表示出来。这样，原来复杂周期信号 $f(t)$就可以表示为直流分量、基波分量与一系列谐波分量之和：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + a_3\cos 3\omega t + \cdots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + b_3\sin 3\omega t + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\omega t + b_m\sin m\omega t) \qquad (1.1.2)$$

(1.1.2)式称为周期信号 $f(t)$的傅里叶级数展开式，它也常表示成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} D_m\cos(m\omega t - \varphi_m) \qquad (1.1.3a)$$

其中 D_m 和 φ_m 分别是第 n 次谐波的幅度和位相：

$$D_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \qquad (1.1.3b)$$

$$\varphi_m = \mathrm{tg}^{-1}\frac{b_m}{a_m} \qquad (1.1.3c)$$

是不是任意周期函数 $f(t)$都可以展开成傅里叶级数的形式呢？不是的，因为有些周期函数的傅里叶级数可能不收敛，即使收敛也可能不收敛于 $f(t)$。严格的数学理论已经证明，$f(t)$和 $[f(t)]^2$仅在一个周期内是连续的(或者有第一类间断点)和可积的条件下，它的傅里叶级数才是收敛的，并收敛于 $f(t)$。例如，周期函数 $f(t) = |\mathrm{tg}t|$在它的周期内就是不可积的，因为 $\int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}t\,\mathrm{d}t \to \infty$。如果用几何图形来解释，上述收敛条件就要求曲线 $f(t)$下面的面积是有限的。要求$[f(t)]^2$ 是可积的这个条件可以这样来理解，假定 $f(t)$代表电流函数，那么$[f(t)]^2\mathrm{d}t$ 对一个周期的积

分就表示电流$f(t)$流过1欧姆电阻时每周期消耗的能量，这个条件要求每周期消耗的能量是有限的。

一个周期函数能否展开成收敛的傅里叶级数，还有一些别的判别方法，如狄里赫利条件等等。但是，由于实际存在的电信号都是满足这些条件的，所以我们不打算过多地讨论这些条件，而把注意力放在如何将一个周期性信号展开成傅里叶级数。

1.1.2 傅里叶系数的确定

要把一个已知的周期性信号$f(t)$展开成傅里叶级数，就必须求出展开式(1.1.2)式中的系数a_0、a_m和b_m(傅里叶系数)。由这些系数可以知道各谐波分量的幅度和位相。下面我们来讨论确定这些系数的方法。

1.a_0的计算 将(1.1.2)式逐项对ωt积分，积分区间取一个周期，即从$\omega t=0$到$\omega t=2\pi$：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega t) &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\mathrm{d}(\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty}\Big[\int_0^{2\pi} a_m \cos\, m\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) + \\ &\qquad \int_0^{2\pi} b_m \sin\, m\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)\Big] \\ &= a_0\pi\end{aligned}$$

在以上推导中，考虑到正弦函数和余弦函数在它的周期内的积分为零，故有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega t) \tag{1.1.4}$$

从上式可以看出，直流分量$a_0/2$的意义正是$f(t)$在一个周期内的平均值。

2.a_m的计算 为了找出系数a_m的计算公式，我们将(1.1.2)式中各项乘以$\cos k\omega t$并从$\omega t=0$到$\omega t=2\pi$逐项对ωt积分；

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos\, k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\cos\, k\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\int_0^{2\pi} a_m \cos k\omega t \cos m\omega t \,\mathrm{d}(\omega t) + \int_0^{2\pi} b_m \cos k\omega t \sin m\omega t \,\mathrm{d}(\omega t)\right] \tag{1.1.5}$$

上式右端第一项积分显然为零。为计算其他积分项，我们利用三角公式：

$$\cos k\omega t \cos m\omega t = \frac{1}{2}[\cos(k+m)\omega t + \cos(k-m)\omega t]$$

$$\cos k\omega t \sin m\omega t = \frac{1}{2}[\sin(k+m)\omega t + \sin(m-k)\omega t]$$

这样，把两个三角函数的乘积化为单个三角函数之和以后就可看出，任意两个不同三角函数($m \neq k$)的乘积在区间$(0, 2\pi)$上的积分均为零(称为正交性)，所以(1.1.5)式中所有 $m \neq k$ 的项的积分为零。对于 $m = k$ 的项则要仔细考虑，因为这时有

$$\frac{1}{2}\cos(k-m)\omega t = \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2} \qquad (m = k)$$

$$\frac{1}{2}\sin(k-m)\omega t = \frac{1}{2}\sin(0) = 0 \qquad (m = k)$$

这样一来，在(1.1.5)式右端所有的积分项中只有一个非零项，即

$$\int_0^{2\pi} a_k\left[\frac{1}{2}\cos(k-m)\omega t\right]\mathrm{d}(\omega t) \qquad (m = k)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a_k}{2}\mathrm{d}(\omega t) = a_k\pi$$

把上式代入(1.1.5)式可得(为一致起见，我们把下标 k 仍换为 m)：

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos m\omega t \,\mathrm{d}(\omega t) \tag{1.1.6}$$

这就是求系数 a_m 的公式。

3. b_m 的计算 将(1.1.2)式中各项乘以 $\sin k\omega t$ 并从0到2π对 ωt 积分，与求 a_m 的步骤完全类似地可以求出

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin m\omega t \,\mathrm{d}(\omega t) \tag{1.1.7}$$

4.关于积分区间

上面我们假定周期函数 $f(t)$ 在区间$(0,2\pi)$ 展开。实际上 $f(t)$ 可以在长为 2π 的任意区间上展开，例如在区间$(-\pi,\pi)$ 上展开也常采用。这只相当于移动了周期的起点，并没有改变 $f(t)$ 本身的特性。当我们在示波器荧光屏上测量一个周期信号时，为某些目的常移动坐标网格(实际是移动信号的水平位置)。这时，信号周期的起点就改变了，然而信号还是原来的信号。一般地，如果坐标原点(0点)相对于信号波形移动了 θ 角度(θ 为正，表示向右移；θ 为负，表示向左移)，则在信号的傅里叶级数中可用 $\omega t+\theta$ 代替 ωt，系数 a_0、a_m 和 b_m 和积分区间则是由 $-\theta$ 到 $2\pi-\theta$，例如坐标原点向右移动 π，则积分区间$(0,2\pi)$ 变为$(-\pi,\pi)$。

有时我们遇到的信号波形在一个周期里包含两个连续函数曲线 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，图 1.1:2 给出的波形就是一个例子，其中由 $\omega t=0$ 到 $\omega t=\pi$ 的函数曲线是 $f_1(t)=\omega t_1$；由 $\omega t=\pi$ 到 $\omega t=2\pi$ 的函数曲线是 $f_2(t)=\pi$；为计算系数 a_0、a_m 和 b_m，我们可以把积分区间分割成两部分，这样(1.1.4)、(1.1.6) 和(1.1.7) 式就分别成为：

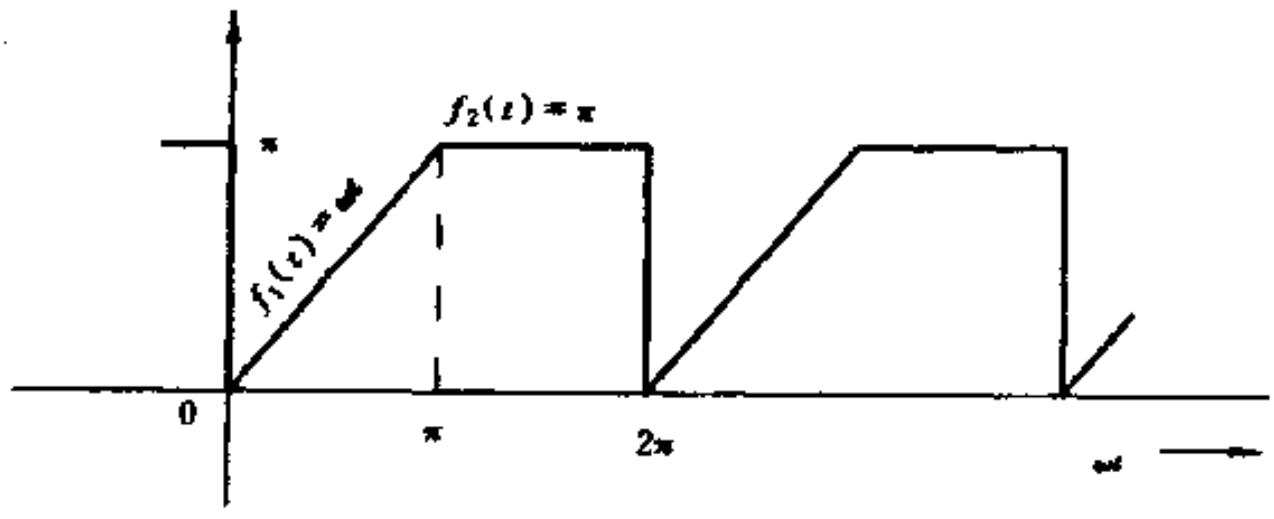


图 1.1.2　积分区间的分割

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(t)\mathrm{d}(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f_2(t)\mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.8)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(t)\cos m\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f_2(t)\cos m\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.9)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(t)\sin m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f_2(t)\sin m\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.10)$$

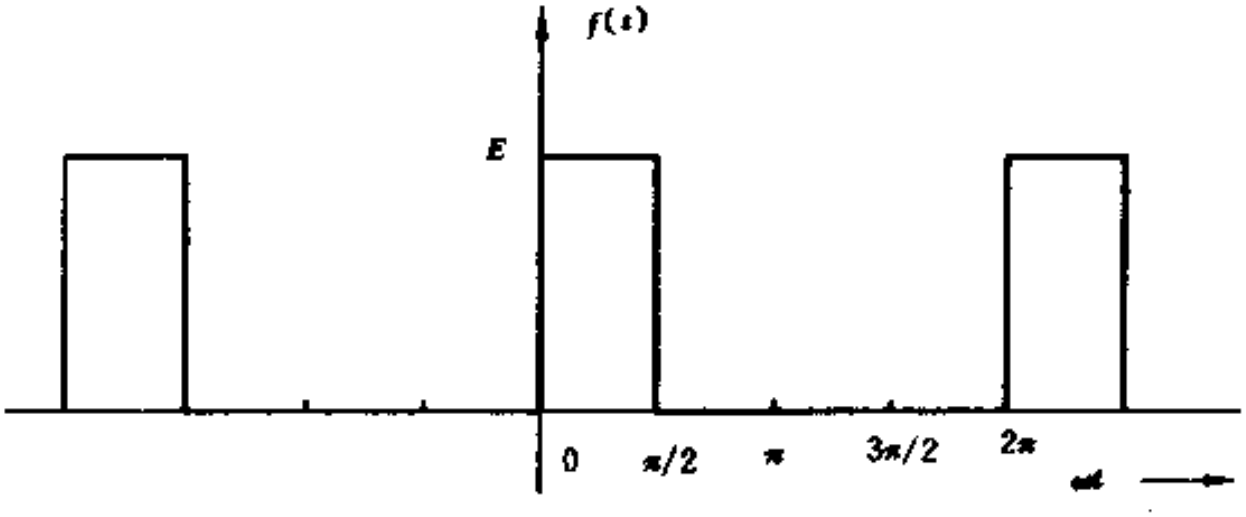


图 1.1.3　周期性矩形脉冲信号

5. 周期性矩形脉冲的傅里叶分析

通信工程中常遇到类似于图 1.1.3 的周期性矩形脉冲信号。如果取 $-\pi$ 到 π 作为一个周期，则这个波形可以表示成：

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < \omega t < 0 \\ E, & 0 < \omega t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < \omega t < \pi \end{cases}$$

它的傅里叶系数可计算如下：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega t) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(0)\mathrm{d}(\omega t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} E\mathrm{d}(\omega t) + \cdots\right.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(0)\mathrm{d}(\omega t)\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} E\mathrm{d}(\omega t) = \frac{E}{2}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\ m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} E\cos\ m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{E\sin m\omega t}{m}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{E\sin(m\pi/2)}{m\pi}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\ m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} E\sin\ m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-E\cos\ m\omega t}{m}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{E(1-\cos(m\pi/2))}{m\pi}$$

把计算出的这些系数代入(1.1.2)式就得到周期性矩形脉冲信号的傅里叶级数展开式:

$$f(t) = \frac{E}{4} + \frac{E}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(m\pi/2)}{m}\cos\ m\omega t + \frac{1-\cos(m\pi/2)}{m}\sin\ m\omega t\right\}$$

$$= \frac{E}{4} + \frac{E}{\pi}(\cos\ \omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots) + \frac{E}{\pi}(\sin\ \omega t + \sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{3}\sin 6\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \frac{1}{9}\sin 9\omega t + \frac{1}{5}\sin 10\omega t + \cdots) \qquad (1.1.11)$$

由(1.1.3b)式可求出第 m 次谐波的幅度为

$$D_m = \frac{E}{\pi m}\sqrt{(\sin(m\pi/2))^2 + (1-\cos(m\pi/2))^2}$$

$$= \frac{E}{\pi m}\sqrt{2(1-\cos(m\pi/2))} = \frac{2E}{m\pi}\sin(m\pi/4)$$

我们考查一下，m 为何值时，D_m 取极大值。这只要使 $m\pi/4 = \pi(2n+1)/2$，即 $m = 2(2n+1)$ 即可。所以应注意这种波形中的 2 次、6 次、10 次 …… 谐波的成分较大，这从它的傅里叶级数展开式中系数的数值也可以看出。

6. 锯齿波的傅里叶分析

我们在工作中遇到过锯齿波（例如示波器的扫描部分），它的波形如图 1.1.4 所示。我们来求出它的傅里叶级数展开式。这个锯齿波可表示成

$$f(t) = \omega t \qquad (\text{以 } 2\pi \text{ 为周期})$$

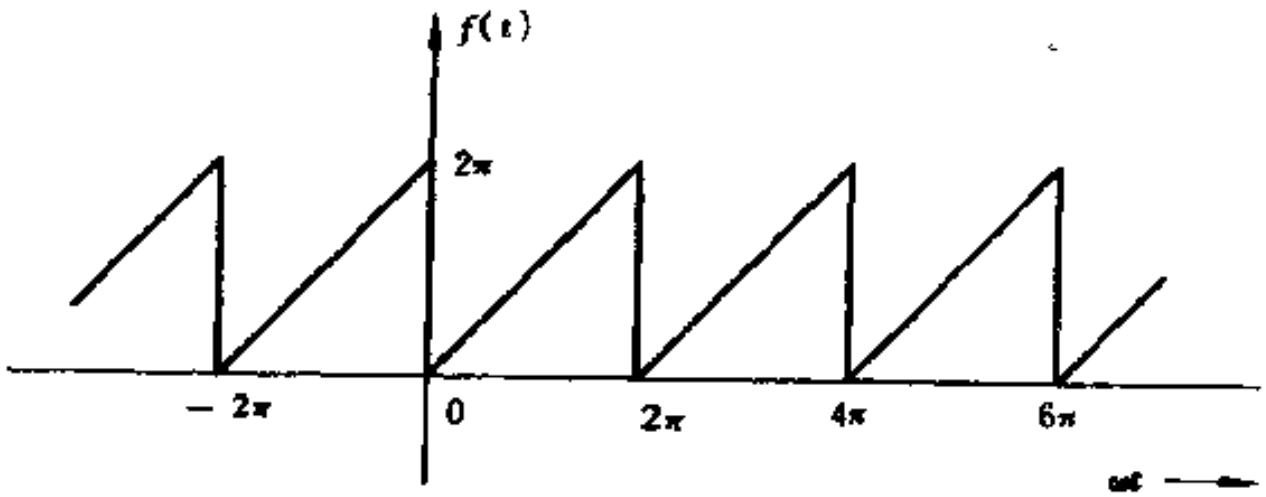


图 1.1.4　锯齿波

首先我们求直流分量，由(1.1.4) 式

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \omega t \ \mathrm{d}(\omega t) = 2\pi; \qquad \frac{a_0}{2} = \pi$$

由(1.1.6) 式，余弦项的系数为

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \omega t \ \cos m\omega t \ \mathrm{d}(\omega t) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \omega t \ \mathrm{d}\left(\frac{\sin m\omega t}{m}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\omega t \ \sin m\omega t}{m}\right]_{\omega t=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin m\omega t}{m}\mathrm{d}(\omega t)\right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\omega t \sin m\omega t}{m}\right]_{\omega t=0}^{2\pi} + \left[\frac{\cos m\omega t}{m^2}\right]_{\omega t=0}^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{2\pi\sin 2m\pi}{m} + \frac{\cos 2m\pi}{m^2} - \frac{0\sin 0}{m} - \frac{\cos 0}{m^2}\right\}$$

$$= 0$$

因此展开式不包含余弦项。由(1.1.7)式,正弦项的系数为

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \omega t \sin m\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin m\omega t}{m^2} - \frac{\omega t \cos m\omega t}{m}\right]_{\omega t=0}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin 2m\pi}{m^2} - \frac{2\pi\cos 2m\pi}{m} - \frac{\sin 0}{m^2} + \frac{0\cos 0}{m}\right\}$$

$$= -\frac{2}{m}$$

将 a_0、a_m 和 b_m 的值代入(1.1.2)式就得到锯齿波的傅里叶级数展开式:

$$f(t) = \pi - 2\left(\sin \omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{4}\sin 4\omega t + \cdots\right) \tag{1.1.12}$$

这个展开式中各正弦项前面的负号表示当 ωt 趋向零值时,各次谐波是从负值到零值,如图1.1.5所示。图中画出了上述展开式前五项之和与锯齿波 $f(t)$ 在一个周期内的比较。可以看出,前五项之和已经大体上接近原来的锯齿波,高于四次的谐波只是改变着锯齿上的小波纹。所以在分析一个信号波形时,常用它的前几次谐波来近似地表示它,取的谐波愈多,这样的表示就愈精确。

1.1.3 波形的对称性

许多电信号的波形具有某种对称性,这时它的傅里叶级数比较简单。我们来讨论几种常见的对称性,说明对称波形傅里叶系数简化的情况。

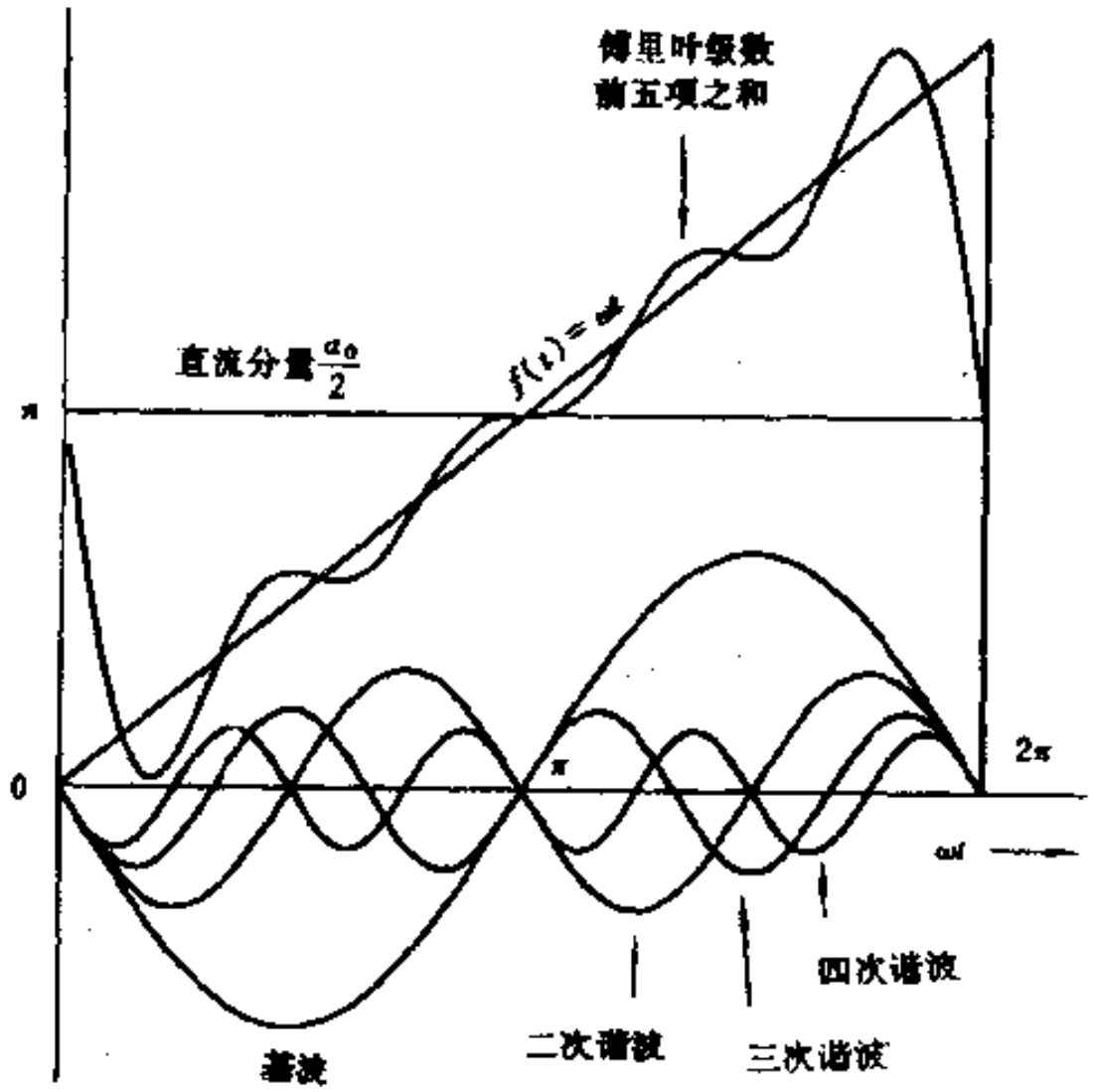


图 1.1.5　锯齿波的头四次谐波

1.偶对称

如果波形 $f(t)$ 对纵轴是对称的(图 1.1.6a),即

$$f(t) = f(-t)$$

则称 $f(t)$ 具有偶对称性,或称 $f(t)$ 为偶函数。这时 $f(t)$ 的傅里叶级数中仅包含余弦项,因为 $f(t)$(偶函数)与 $\sin m\omega t$(奇函数)的乘积是奇函数。它在一个周期内的积分为零:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin m\omega t \, \mathrm{d}(\omega t) = 0$$

而 $f(t)\cos m\omega t$ 是偶函数,故有

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos m\omega t \ \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos m\omega t \ \mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.13a)$$

同理

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.13b)$$

2.奇对称

如果 $f(t)$ 对坐标原点对称(图 1.1.6b),即

$$f(t) = -f(-t)$$

则称 $f(t)$ 具有奇对称性。这时 $f(t)$ 的傅里叶级数中仅包含正弦项,因为 $f(t)\cos m\omega t$ 是奇函数,故有

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos m\omega t \ \mathrm{d}(\omega t) = 0$$

而 $f(t)\sin m\omega t$ 是偶函数,故有

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin m\omega t \ \mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.14)$$

3.半波对称

如果把 $f(t)$ 移动半周期与原波形关于横轴对称(图 1.1.6c),即

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

则称 $f(t)$ 具有半波对称性或镜对称性,这时 $f(t)$ 的傅里叶级数中不包含偶次谐波。

我们来考察系数 a_m:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos m\omega t \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos m\omega t \mathrm{d}(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos m\omega t \mathrm{d}(\omega t)$$

令 $x = t - T/2$,则 $t = x + T/2$, $\omega t = \omega x + \omega T/2 = \omega x + \pi$,于是上式第一项积分为

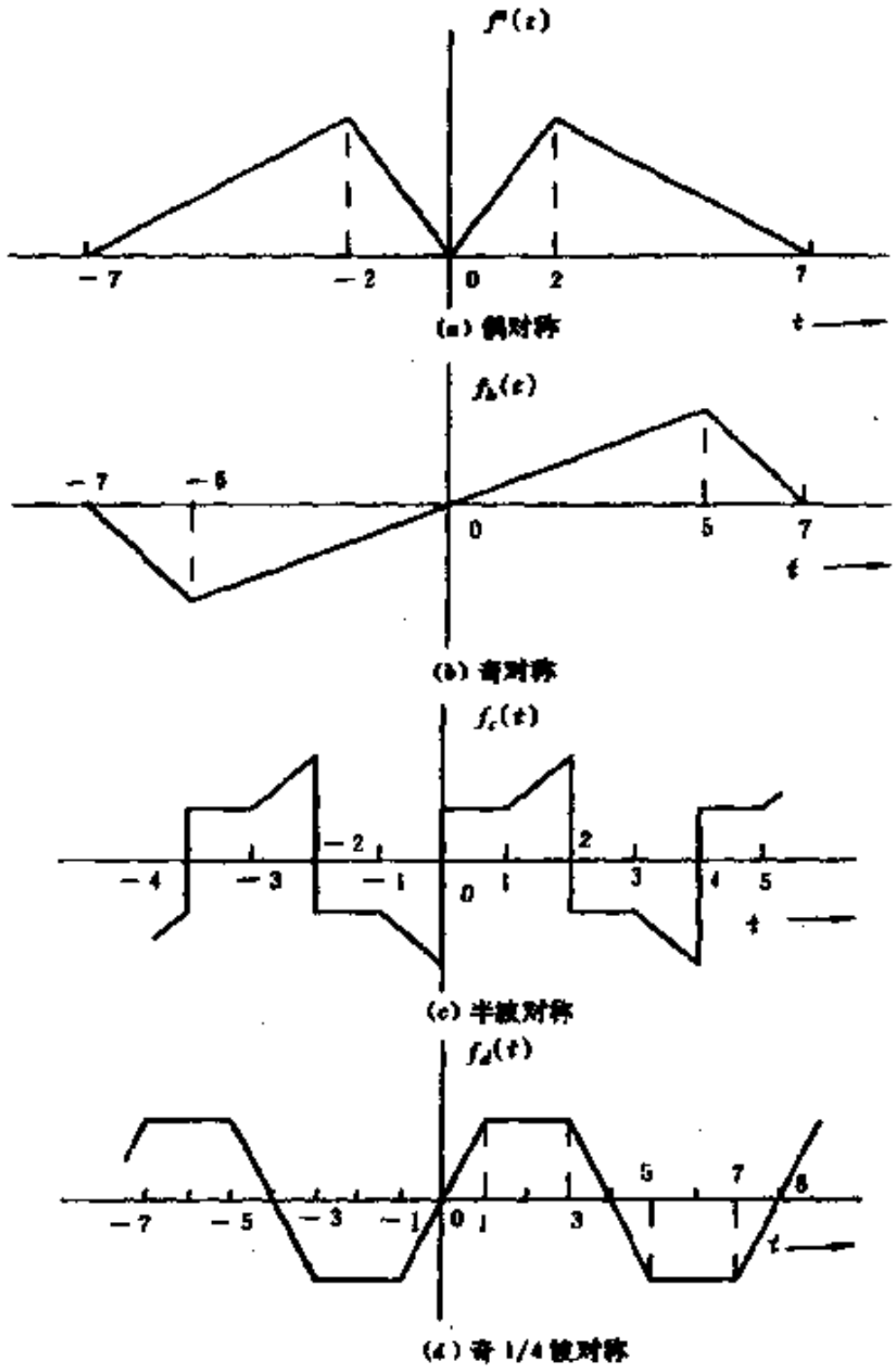


图 1.1.6　几种不同对称性的波形

$$\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos\, m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t) = \int_{0}^{\pi} f\left(x+\frac{T}{2}\right)\cos m(\omega x+\pi)\mathrm{d}(\omega x)$$

$$= -\int_{0}^{\pi} f(x)\cos\, m(\omega x+\pi)\mathrm{d}(\omega x)$$

$$= -\int_{0}^{\pi} f(t)\cos\, m(\omega t+\pi)\mathrm{d}(\omega t)$$

上面第二步推导是考虑到 $f(x + T/2) = -f(x)$，第三步推导则是将变量 x 换为 t。当 m 为偶数时，$\cos\, m(\omega t + \pi) = \cos\, m\omega t$，于是上述积分为零，进而 $a_m = 0$；当 m 为奇数时，$\cos m(\omega t + \pi) = -\cos\, \omega t$，于是有

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos\, m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t) \qquad (m \text{ 为奇数})$$

(1.1.15)

对系数 b_m 作类似的分析可知：

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin\, m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t) \qquad (m \text{ 为奇数})$$

(1.1.16)

4. 1/4 波对称

如果 $f(t)$ 具有半波对称性，同时它又是偶函数(或奇函数)，则我们称它具有1/4波对称性(图1.1.6d)。这时 $f(t)$ 的傅里叶级数只包含有奇次的余弦项(或正弦项)，这容易从前三种对称推论出来，它的傅里叶系数见表 1.1.1。为查阅方便，表中也列出了其他对称性波形的傅里叶级数公式。

最后我们指出，坐标原点的移动可以改变波形的对称性，例如由奇对称变为偶对称，于是它的傅里叶级数的形式也要变化，但却仍然表示同一波形。

5. 梯形波的傅里叶分析

图 1.1.7 中梯形波的数学表示为

$$f(t)=\begin{cases}\pi+\omega t, & -\pi<\omega t<-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}<\omega t<\dfrac{\pi}{2}\\ \pi-\omega t, & \dfrac{\pi}{2}<\omega t<\pi\end{cases}$$

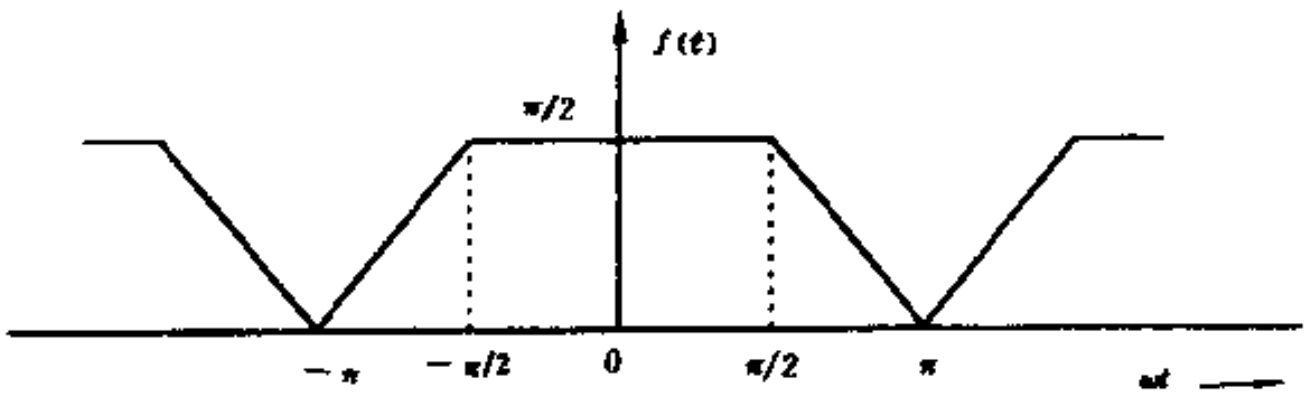


图 1.1.7　梯形波

表 1.1　对称性周期信号的傅里叶级数

对称性	对称条件	傅里叶级数的形式	傅里叶系数公式
奇对称	$f(t)=-f(-t)$	$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin m\omega t$	$a_m=0;\quad a_0=0;$ $b_m=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin m\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$
偶对称	$f(t)=f(-t)$	$f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos m\omega t$	$b_m=0;$ $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos m\omega t\,\mathrm{d}(\omega t);$ $a_m=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos m\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)$

续表

对称性	对称条件	傅里叶级数的形式	傅里叶系数公式
半波对称	$f(t) = -f(t + T/2)$	$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty}[a_{2m-1}\cos(2m-1)\omega t + b_{2m-1}\sin(2m-1)\omega t]$	$a_{2m-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(2m-1)\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$ $b_{2m-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(2m-1)\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$
奇 1/4 波对称	$f(t) = -f(-t)$ 并且 $f(t) = -f(t + T/2)$	$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}\sin(2m-1)\omega t$	$a_m = 0;$ $b_{2m-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\sin(2m-1)\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$
偶 1/4 波对称	$f(t) = f(-t)$ 并且 $f(t) = -f(t + T/2)$	$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1}\cos(2m-1)\omega t$	$b_m = 0$ $a_{2m-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\sin(2m-1)\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$

容易看出，这个梯形波具有偶对称性，它的傅里叶级数中不包含正弦项，即 $b_m = 0$，根据表 1.1 给出的公式可求出 a_0、a_m：

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}(\omega t) \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}(\omega t) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - \omega t)\,\mathrm{d}(\omega t)\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi}{2}\omega t\right]\Big|_{\omega t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\pi\omega t - \frac{(\omega t)^2}{2}\right]\Big|_{\omega t=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{4} + \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}\right)\right\} \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos m\omega t \ \mathrm{d}(\omega t) \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos m\omega t \ \mathrm{d}(\omega t) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - \omega t)\cos m\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin m\omega t}{m}\right]\Bigg|_{\omega t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \left[(\pi - \omega t)\frac{\sin m\omega t}{m}\right]\Bigg|_{\omega t=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{m}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin m\omega t \ \mathrm{d}(\omega t)\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2m}\sin\frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\sin\frac{m\pi}{2} + \frac{1}{m}\left[-\frac{\cos m\omega t}{m}\right]\Bigg|_{\omega t=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1}{m^2}(-1)^m + \frac{1}{m^2}\cos\frac{m\pi}{2}\right\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{m^2}, & m \text{ 为奇数} \\ \dfrac{2}{\pi}\left[-\dfrac{1}{m^2} + (-1)^{\frac{m}{2}}\dfrac{1}{m^2}\right], & m \text{ 为偶数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此，这个波形的傅里叶级数为

$$
\begin{aligned}
f(t) = \frac{3\pi}{8} &+ \frac{2}{\pi}\left(\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + \cdots\right) \\
&- \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2\omega t + \frac{1}{6^2}\cos 6\omega t + \frac{1}{10^2}\cos 10\omega t + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

我们看到，这个级数收敛很快，并且它不包含 $4n$ 次谐波。

在附录 I 中给出一些常用周期函数的傅里叶级数展开式。

1.1.4 傅里叶级数的复数形式

在频谱分析中，利用傅里叶级数的复数形式比较方便，我们来找出它的复数形式。利用公式

$$\cos m\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{jm\omega t} + e^{-jm\omega t}\right) \tag{1.1.17a}$$

$$\sin m\omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{jm\omega t} - e^{-jm\omega t}\right) \tag{1.1.17b}$$

代入(1.1.2)式可得：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{a_m}{2}(e^{jm\omega t} + e^{-jm\omega t}) + \frac{b_m}{2j}(e^{jm\omega t} - e^{-jm\omega t})\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_m - jb_m)e^{jm\omega t} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_m + jb_m)e^{-jm\omega t}$$

$$= D_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{D}_m e^{jm\omega t} + \sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{D}_{-m}e^{-jm\omega t} \qquad (1.1.18)$$

其中：

$$D_0 = \frac{a_0}{2} \qquad (1.1.19a)$$

$$\widetilde{D}_m = \frac{1}{2}(a_m - jb_m)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos m\omega t - j\sin m\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jm\omega t}\mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.19b)$$

$$\widetilde{D}_{-m} = \widetilde{D}_m^* = \frac{1}{2}(a_m + jb_m)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{jm\omega t}\mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.19c)$$

令 $-m = k$，把(1.1.18)式右端第二个求和项改写成：

$$\sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{D}_{-m}e^{-jm\omega t} = \sum_{k=-1}^{-\infty}\widetilde{D}_k e^{jk\omega t} = \sum_{m=-1}^{\infty}\widetilde{D}_m e^{jm\omega t}$$

上式中最后一步是简单地把字母 k 再换成 m 而得到的，把上式代入(1.1.18)式得

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\widetilde{D}_m e^{jm\omega t} \qquad (1.1.20)$$

$$\widetilde{D}_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jm\omega t}\mathrm{d}(\omega t) \qquad (1.1.21)$$

以上二式就是傅里叶级数的复数形式。注意(1.1.20)式中似乎出现了"负"频率,这是由数学技巧所引起的,并无实际意义。因为将(1.1.20)式重新写成实数形式,就根本不存在负频率了。从公式(1.1.20)和(1.1.21)可以看出,$f(t)$是时间t的函数,而系数$\widetilde{D}_m$是变量$m\omega$的函数,即$\widetilde{D}_m = \widetilde{D}_m(m\omega)$,$m\omega$是$m$次谐波的角频率,因为$m$只能取整数,所以变量$m\omega$是不连续的,从而$\widetilde{D}_m(m\omega)$也只能取一些分立的值。一旦确定了$\widetilde{D}_m(m\omega)$,则$f(t)$也就唯一地被确定,反之亦然。因此,$f(t)$与$\widetilde{D}_m(m\omega)$表示的是同一件客观事物——某一周期信号,所不同的只是前者是以时间t为自变量(称为时域表示),后者是以频率$m\omega$为自变量(称为频域表示)。这些讨论正是频谱分析的基础。

请注意,$\widetilde{D}_m$为复数,它可表示成

$$\widetilde{D}_m = |\widetilde{D}_m| e^{-j\varphi_m} \tag{1.1.22}$$

它的模$|\widetilde{D}_m|$和辐角φ_m分别为(根据1.1.19b式):

$$|\widetilde{D}_m| = \frac{1}{2}\sqrt{a_m^2 + b_m^2} \tag{1.1.23a}$$

$$\varphi_m = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right) \tag{1.1.23b}$$

注意这里定义的$|\widetilde{D}_m|$与(1.1.3b)式中的D_m相差因子$\frac{1}{2}$。

§1.2 离散谱

1.2.1 什么是频谱

关于用几何图形表示周期信号波形$f(t)$与时间t的函数关

系，我们已经很熟悉了，它是以时间 t 为横轴，以函数 $f(t)$ 为纵轴画出的曲线。同样地，我们也可以把频率 $m\omega$ 当作横轴，把与 $f(t)$ 等价的 $D_m(m\omega)$ 当作纵轴而画出 $D_m(m\omega)$ 与 $m\omega$ 的关系图形。这种图形一般称为频谱。从频谱上可以一目了然地看出一个信号波形包含哪些谐波以及各次谐波成分的多少。

因为函数 $\widetilde{D}_m(m\omega)$ 是复数，所以需要分别做出它的模 $|\widetilde{D}_m|$ 与 $m\omega$ 和辐角 φ_m 同 $m\omega$ 的关系图形，前者称为 $f(t)$ 的幅度谱，后者称为 $f(t)$ 的位相谱。因为 $m\omega$ 取分立值，所以画出的图形不是连续曲线，而是一系列垂直于横轴的线段。这些线段按整数 m 的顺序排列，线段的高度表示 $|\widetilde{D}_m|$ 或 φ_m 的数值。因此，这种频谱称为离散谱或线状谱。

信号的频谱研究在信息技术中是很重要的。例如，如果已经知道了一个周期信号的频谱，即知道了这个信号主要包含哪些谐波以及它们的幅度和位相，那么，当使这个信号通过一个线性四端网络时，若要研究输出信号的特性，则只要分别研究每一个谐波通过网络时幅度和位相的变化就行了。另外，如果要求这个信号不失真地通过一个电路，那么知道信号的频谱就可以对这个电路的通频带等指标提出设计要求。

1.2.2 周期性方波的频谱

我们首先把图 1.2.1 所示的周期性方波展开为傅里叶级数，然后再做出它的频谱。容易看出，这个方波具有奇 1/4 波对称性，因此它的傅里叶级数中应该仅包含奇次的正弦项。这时用表1.1.1中给出的公式计算最方便。但为练习起见，我们采用复数形式来计算。这个方波可表示成

$$f(t)=\begin{cases}-1, & -\pi<\omega t<0\\ 1, & 0<\omega t<\pi\end{cases} \tag{1.2.1}$$

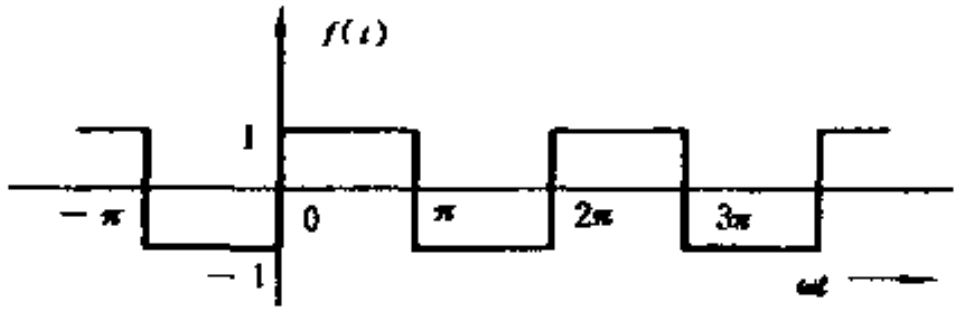


图 1.2.1　周期性方波

为确定复数傅里叶系数 $\widetilde{D}_m$，把(1.2.1)式代入(1.1.21)式有

$$\widetilde{D}_m = \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0} e^{-jm\omega t}\mathrm{d}(\omega t) + \int_{0}^{\pi} e^{-jm\omega t}\mathrm{d}(\omega t)\right\}$$

令 $\omega x = \omega t + \pi$，则上式括号内第一项积分成为

$$-\int_{0}^{\pi} e^{-jm(\omega x-\pi)}\mathrm{d}(\omega x) = -e^{jm\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-jm\omega x}\mathrm{d}(\omega x)$$

$$= -e^{jm\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-jm\omega t}\mathrm{d}(\omega t)$$

上式最后一步是将变量 ωx 又换成 ωt，于是

$$\widetilde{D}_m = \frac{1}{2\pi}(1-e^{jm\pi})\int_{0}^{\pi} e^{-jm\omega t}\mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1-e^{-jm\pi})\left[\frac{e^{-jm\omega t}}{-jm}\right]\Bigg|_{\omega t=0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1-e^{jm\pi})\,\frac{1}{jm}(1-e^{-jm\pi})$$

$$= \frac{2-e^{jm\pi}-e^{-jm\pi}}{2\pi jm} = \frac{1-\cos m\pi}{j\pi m}$$

$$= \begin{cases} 0 & , m \text{ 为偶数} \\ \dfrac{2}{j\pi m} & , m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

把这结果代入(1.1.20)式就得到方波的复数形式的傅里叶级数：

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\pi m} e^{jm\omega t} \qquad (m \text{ 为奇数})$$

如果把上式中的 $e^{jm\omega t}$ 与 $e^{-jm\omega t}$ 合并成正弦项，则得到

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{4}{\pi m} \sin\, m\omega t \qquad (m \text{ 为奇数})$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\sin\,\omega t}{1} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \cdots\right\} \qquad (1.2.2)$$

我们看到，这级数中仅包含奇次的正弦项，这是我们预期的结果。

为作出方波的频谱，我们计算幅度 $|\widetilde{D}_m|$ 和位相 φ_m，由(1.1.23)式有

$$\widetilde{D}_m = \frac{1}{2}\sqrt{a_m^2 + b_m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{0 + (-\frac{4}{\pi m})^2} = \frac{2}{\pi m}$$

$$\varphi_m = \mathrm{tg}^{-1}\frac{b_m}{a_m} = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-4/\pi m}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

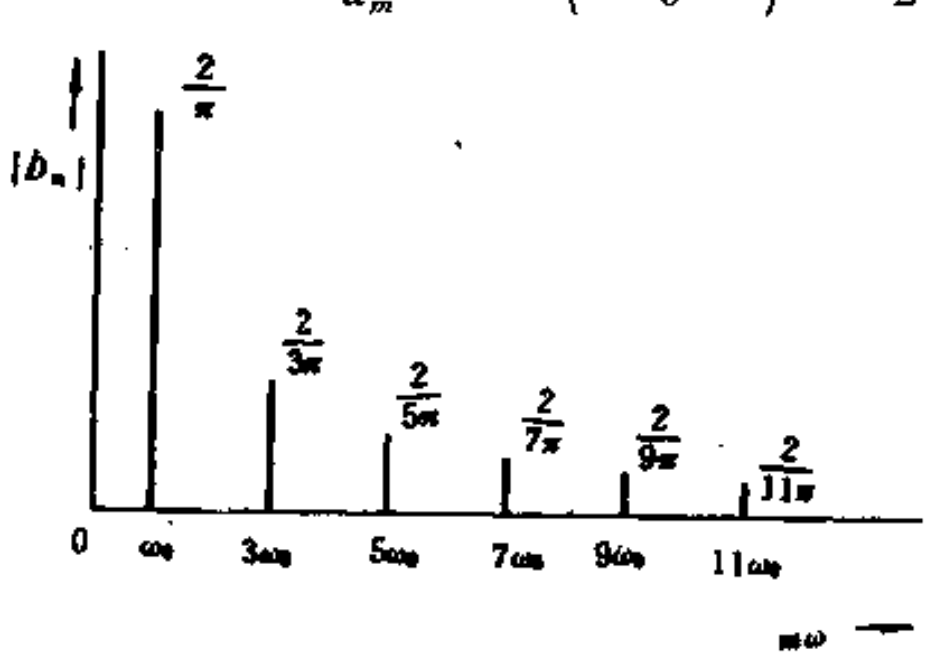


图 1.2.2　方波的幅度谱

由此可作出方波的幅度谱和位相谱(见图 1.2.2 和 1.2.3)。位相谱在应用中并不很重要，故我们简单讨论一下幅度谱。从方波的幅度谱中可以了解到，随着所包含的谐波次数的增加，谐波的幅

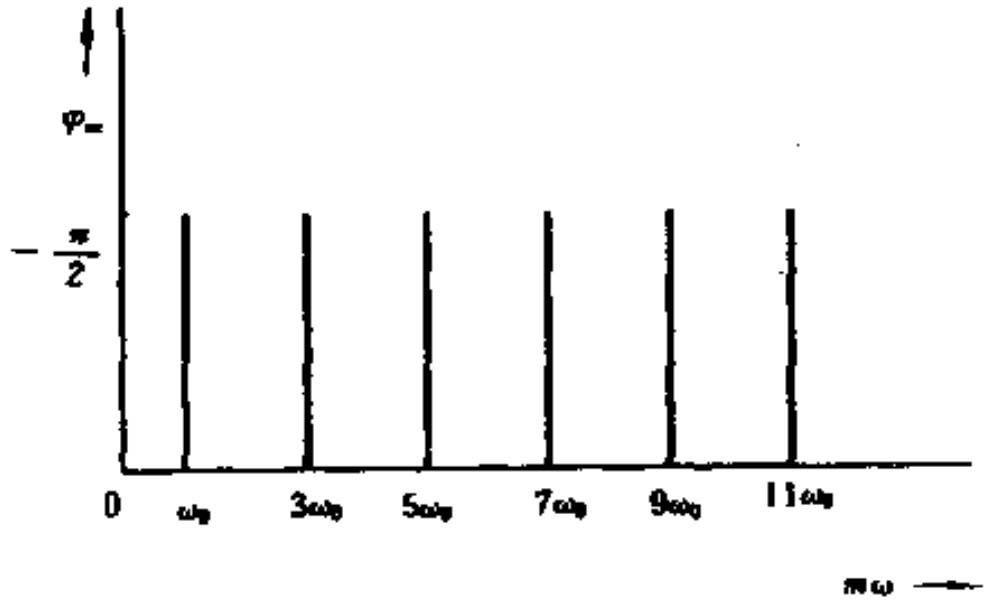


图 1.2.3　方波的位相谱

度逐渐减小，这说明方波的能量主要分配在基波和次数较低的谐波上。在实际应用中，幅度小于基波幅度的$\frac{1}{10}$的高次谐波就可忽略不计了，所以对于图 1.1.1 中的周期性方波而言，需要考虑到第 9 次谐波，它的幅度为基波幅度的$\frac{1}{9}$，它的频率为基波频率 f_0（即方波的重复频率）的 9 倍。我们称 $\Delta f = 9f_0$ 为这个方波的频谱宽度。请注意，方波的傅里叶级数收敛得较慢，而像 1.1.3 中讨论的梯形波的傅里叶级数收敛就很快，只要考虑到它的第 3 次谐波就够了，它的频谱宽度 $\Delta f = 3f_0$。

1.2.3　间断正弦波的频谱

1.一般情形

这里讨论的间断正弦波是每间隔一定时间出现一个正半周的正弦波（图 1.2.4a）。这种波形可表示成

$$f_a(t) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2\theta_0}\omega t, & 0 < \omega t < \theta_0 \\ 0, & \theta_0 < \omega t < \pi \end{cases}$$

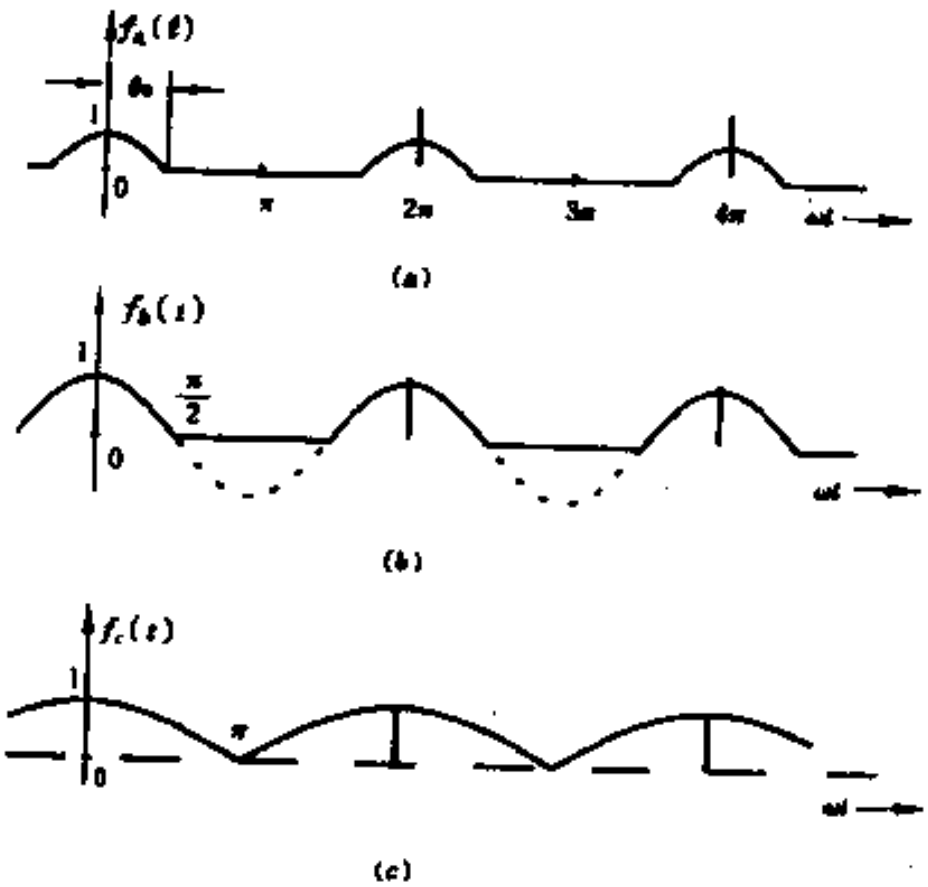


图 1.2.4　间断正弦波

这个波形具有偶对称性，所以 $b_m = 0$，它的傅里叶级数中不包含正弦项，令 $N = \frac{\pi}{2\theta_0}$，根据表 1.1.1 给出的偶对称情况下的公式，我们有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_0}\cos N\omega t \, \mathrm{d}(\omega t) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{N}\sin N\omega t\right]_{\omega t=0}^{\theta_0}$$

$$= \frac{2}{N\pi}\sin N\theta_0 = \frac{2}{N\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{N\pi} = \frac{4\theta_0}{\pi^2}$$

所以直流分量为

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2\theta_0}{\pi^2} \tag{1.2.3}$$

又

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_0}\cos N\omega t \cos m\omega t \, \mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_0}[\cos(N+m)\omega t + \cos(N-m)\omega t]\mathrm{d}(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(N+m)\omega t}{N+m} + \frac{\sin(N-m)\omega t}{N-m}\right]_{\omega t=0}^{\theta_0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin(N+m)\theta_0}{N+m} + \frac{\sin(N-m)\theta_0}{N-m}\right\} \qquad (1.2.4)$$

上式可进一步简化

$$a_m = \frac{1}{\pi(N^2-m^2)}\{(N-m)\sin(N+m)\theta_0 + (N+m)\sin(N-m)\theta_0\}$$

$$= \frac{2}{\pi(N^2-m^2)}\{N\sin N\theta_0\cos m\theta_0 - m\cos N\theta_0\sin m\theta_0\}$$

但 $N\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\sin N\theta_0 = 1$, $\cos N\theta_0 = 0$, 所以有

$$a_m = \frac{2N}{\pi(N^2-m^2)}\cos m\theta_0 \qquad (1.2.5)$$

注意，当 $N = \frac{\pi}{2\theta_0}$ 为整数时会出现 $m = N$ 的项，上式成为不定式。为确定 $a_{m=N}$ 就需要使用罗贝塔法则，这时利用(1.2.4)式比较方便，(1.2.4)式中第二项为

$$\lim_{N\to m}\frac{\sin(N-m)\theta_0}{N-m} = \lim_{N\to m}\frac{\theta_0\cos(N-m)\theta_0}{1} = \theta_0$$

对(1.2.4)式中第一项，当 $N = m$ 时有 $\sin(N+m)\theta_0 = \sin 2N\theta_0 = \sin\pi = 0$, 所以

$$a_{m=N} = \frac{\theta_0}{\pi} = \frac{1}{2N} \qquad (1.2.6)$$

根据(1.2.3)、(1.2.5)和(1.2.6)式就可以完全确定上述间断正弦波的傅里叶级数。这种波形有两个重要的特殊情况，就是当 $N = 1$ 和 $N = 1/2$ 的情况，下面我们分别来讨论。

2.半波整流

如果在图 1.2.4a 中的信号半宽度$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$,就成为图 1.2.4b 的形状,这时 $N = \frac{\pi}{2\theta_0} = 1$,这个波形是我们所熟悉的正弦波经过半波整流后所得到的波形。由(1.2.3) 式可知它的直流分量$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}$。当 $m = N = 1$ 时,由(1.2.6) 式有 $a_0 = \frac{1}{2}$;当 $m > 1$ 时由(1.2.5) 式有

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \text{ 为奇数} \\ \dfrac{-2}{\pi(m^2-1)}, & \text{当 } m = 4n \quad (n = 1,2,3,\cdots) \\ \dfrac{2}{\pi(m^2-1)}, & \text{当 } m = 4n+2 \ (n = 0,1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

所以经半波整流后波形的傅里叶级数为

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos \omega t + \frac{2}{3\pi}\cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi}\cos 4\omega t + \frac{2}{35\pi}\cos 6\omega t - \frac{2}{63\pi}\cos 8\omega t + \cdots \qquad (1.2.7)$$

由于 $b_m = 0$,所以幅度 $|D_m| = \frac{a_m}{2}$,我们只考虑幅度的相对值,就可以直接用(1.2.7) 式中各项的系数值做成幅度谱。它的前 12 项系数的数值见表 1.2,由此做出它的幅度谱如图 1.2.5a 所示。从幅度谱中可以清楚看出,规则正弦电压经过半波整流后的电压波形中包含的主要成分是直流分量、基波和二次谐波,较高次谐波幅度都极小,并且半波整流后的基波幅度仍然大于直流分量。这就说明半波整流的效果是相当差的。这些结论是我们在实际工作中已熟悉的,这里不过是从理论上给以证明。

表 1.2　整流波形傅里叶系数值

m	半波整流 (图 1.2.4b)	全波整流 (图 1.2.4c)
0	0.318	0.637
1	0.500	0.425
2	0.212	−0.085
3	0	0.036
4	−0.042	−0.020
5	0	0.013
6	0.018	−0.009
7	0	0.007
8	−0.010	−0.005
9	0	0.004
10	0.006	−0.003
11	0	0.003

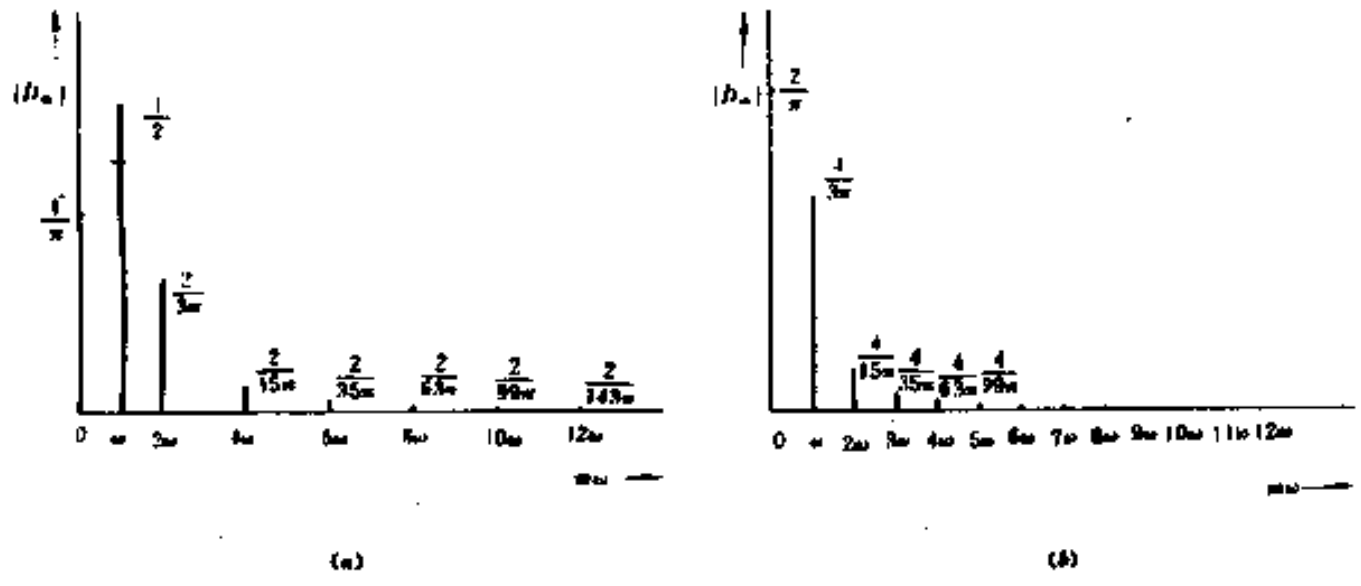


图 1.2.5　半波整流(a)和全波整流(b)的幅度谱

3. 全波整流

正弦电压全波整流的电压波形如图 1.2.4c 所示，它对应于 N

$= \frac{1}{2}$ 即 $\theta_0 = \pi$ 的情况，它的傅里叶系数根据(1.2.3)和(1.2.5)式可算出：

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_m = \frac{-\cos m\pi}{\pi\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

若 m 为奇数，则 $\cos m\pi = -1$，若 m 为偶数，则 $\cos m\pi = 1$，故有

$$a_m = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)}, & \text{当 } m \text{ 为奇数} \\ \dfrac{-1}{\pi\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)}, & \text{当 } m \text{ 为偶数} \end{cases}$$

于是全波整流后波形的傅里叶级数为

$$f_c(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos\omega t - \frac{4}{15\pi}\cos 2\omega t + \frac{4}{35\pi}\cos 3\omega t - \frac{4}{63\pi}\cos 4\omega t + \cdots \tag{1.2.8}$$

它的前 12 项系数的数值亦见表 1.2，由此做出它的幅度谱如图 1.2.5*b* 所示。从中我们看到，正弦波经全波整流后，直流分量大大增加了(与半波整流相比)，基波幅度虽仍较大，但已小于直流分量。所以全波整流的效果比半波整流要好。

1.2.4 调幅波的频谱

我们知道，广播电台传递信息并不是直接发射语音频率的无线电波，而是发射频率远高于语音频率的无线电波，即射频载波。这个载波的振幅是按照语音信号而变化的，所以称为调幅波。没有被语音信号调制的射频载波常常是频率极高的等幅正弦波：

$$E_0\cos\omega_0 t$$

其中 E_0 和 ω_0 都是常数。语音信号的波形是很复杂的。假定它是周期信号，可以分解为一系列不同频率的正弦波，即可以按傅里叶级数展开。我们先讨论语音信号仅由单一频率的正弦波组成(纯音)，即只取傅里叶级数中的一项(不考虑初位相)：

$$D_m \cos \omega_m t$$

如果用它来使载波调幅(图 1.2.6a)，那么载波的振幅就不是常数 E_0，而成为

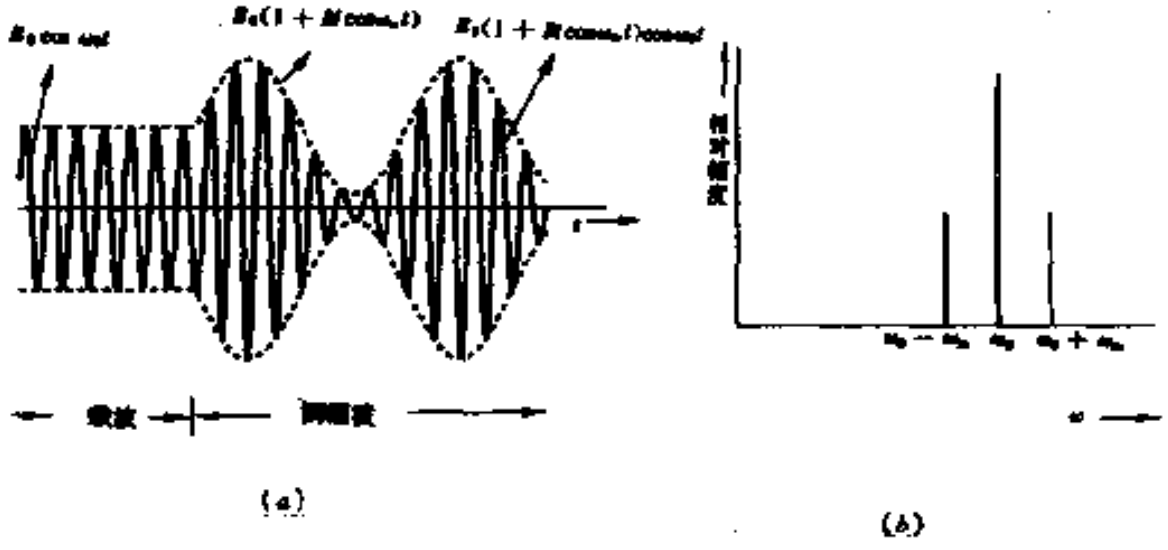
$$E = E_0 + KD_m \cos \omega_m t$$

这里 K 是一个比例常数。于是调幅波可以表示成：

$$\begin{aligned} e(t) &= (E_0 + KD_m \cos \omega_m t)\cos \omega_0 t \\ &= E_0(1 + M\cos \omega_m t)\cos \omega_0 t \end{aligned}$$

其中 $M = KD_m/E_0$ 为常数，它表示调制的程度，称为调幅度。上式可化为

$$\begin{aligned} e(t) &= E_0\cos \omega_0 t + ME_0\cos \omega_m t\cos \omega_0 t \\ &= E_0\cos \omega_0 t + \frac{ME_0}{2}\cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{ME_0}{2}\cos(\omega_0 \\ &\quad + \omega_m)t \end{aligned} \tag{1.2.9}$$



(a)　　(b)

图 1.2.6　正弦调制的波形(a)及其频谱(b)

从上式可以看出，这个调幅波包含三个频率成分，第一项是载波；第二项是载波频率减去调制信号频率，称为“下边频”；第三项是载波频率加上调制信号频率，称为“上边频”。可见，这种正弦调制的调幅波的离散频谱由三条谱线组成(图 1.2.6*b*)。

我们再来讨论调制信号为复杂的语音信号 $f(t)$(图 1.2.7)的情况。假定它是周期信号，那么它可以展开为傅里叶级数(略去直流分量，不考虑初位相)：

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos\ m\omega t$$

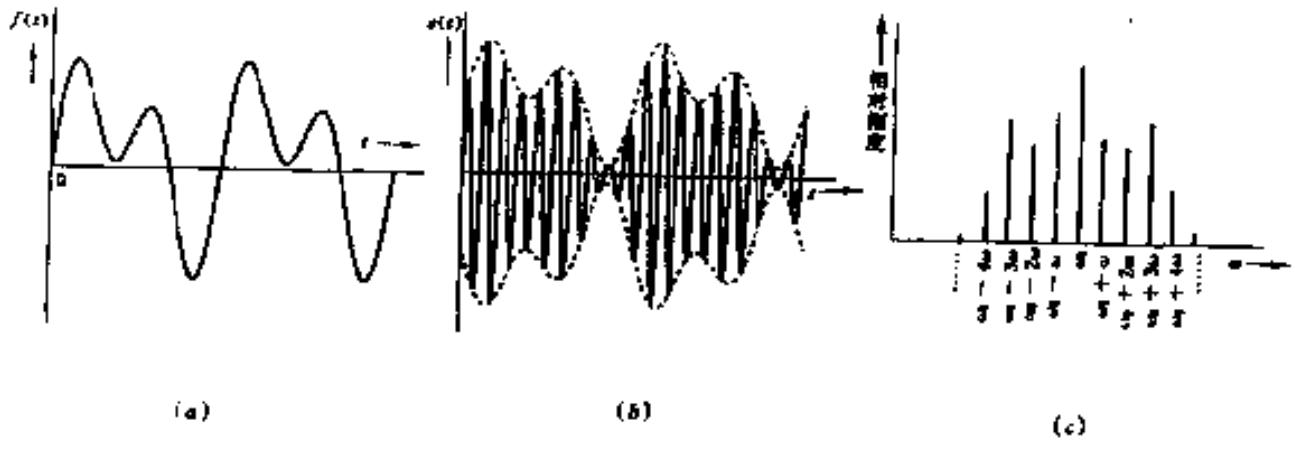
这时调幅波(图 1.2.7*b*) 可表示成

$$e(t) = [E_0 + K\sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos\ m\omega t]\cos\ \omega_0 t$$

$$= E_0[1 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \cos\ m\omega t]\cos\ \omega_0 t$$

其中 $M_m = KD_m/E_0$，上式可进一步化为

$$e(t) = E_0 \cos\ \omega_0 t + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{M_m E_0}{2}\cos(\omega_0 - m\omega)t + \frac{M_m E_0}{2}\cos(\omega_0 + m\omega)t\right] \qquad (1.2.10)$$



(*a*)　　(*b*)　　(*c*)

图 1.2.7　任意周期信号(*a*) 的调幅波(*b*) 及其频谱(*c*)

我们看到，这时上边频和下边频不再是单一频率，而是一组频率，分别称为“上边带”和“下边带”。上边带包括 $\omega_0 + \omega, \omega_0 + 2\omega, \omega_0 + 3\omega, \cdots$ 等一组频率，下边带包括 $\omega_0 - \omega, \omega_0 - 2\omega, \omega_0 - 3\omega, \cdots$ 等一组频率。在频谱图上，上边带和下边带相对于载波频率 ω_0 的谱线是对称的(图 1.2.7*c*)。

假定语音信号所包含的频率是从零赫到 5 千赫，载波频率是 1 兆赫，那么调幅波中的最高边频为 1005000 千赫，而最低边频为 995000 赫。这调幅波所占据的频带宽度等于原来语音信号所占频宽的二倍，即 10 千赫。实际规定的每一广播电台所允许占据的频宽正是这个数值。

1.2.5 几点说明

1. 我们在前面列举过的周期性信号波形是比较简单的，在实际工作中会遇到波形 $f(t)$ 十分复杂的情况，利用傅里叶级数展开式找出它的频谱是十分困难的。有时不能确定波形 $f(t)$ 的解析表示式，这就无从计算它的傅里叶系数。在这些情况下，就必须以实验解决问题，通过仪器测量来确定周期信号的频谱成分。这种仪器称为频谱分析仪。仪器中有一系列滤波器，每个滤波器只允许某一谐波通过，这样在输出端就可分别测出各次谐波的幅度来。实际上，由于有这样方便的仪器，所以在工作中需要真正动笔去计算傅里叶系数的情况并不多，但要了解使用和设计这类仪器，又必须懂得傅里叶级数的数学方法及物理意义。

2. 许多周期信号的傅里叶级数收敛很快，二次或三次谐波是它们的主要成分，因此我们应该对二次和三次谐波对信号波形的影响非常熟悉，这对于实际工作是很有意义的。

我们来看二次和三次谐波对规则正弦波的影响。如果在示波器荧光屏上观察到图 1.2.8*b* 的波形，那么应立即判断出这个正弦波中混有二次谐波，因为这个波形可以看作是规则正弦波(基波)

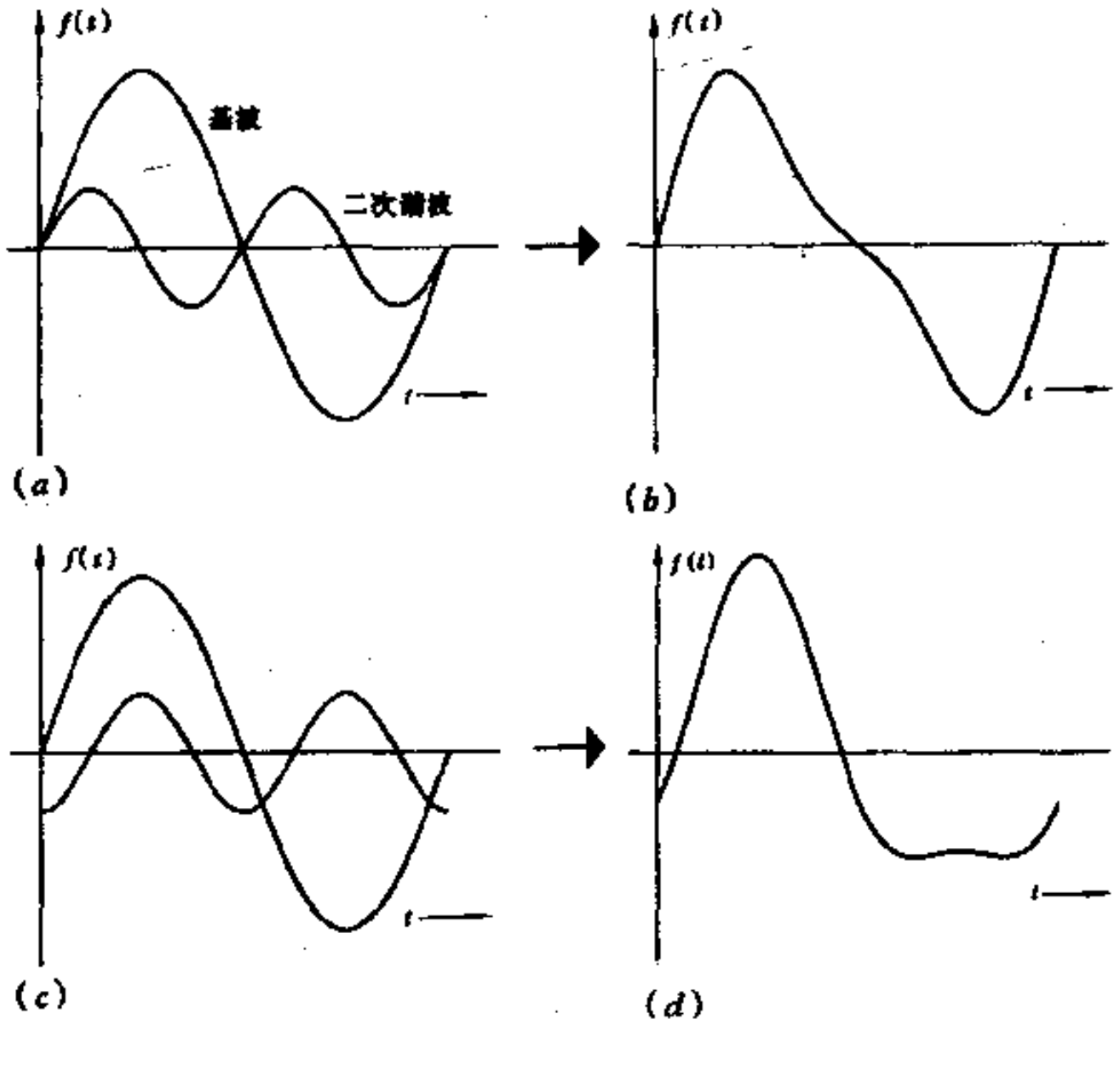


图 1.2.8　基波与二次谐波的叠加

和二次谐波的叠加(见图 1.2.8*a*)。如果观察到图 1.2.8d 的波形，则它也混有二次谐波，但这二次谐波带有一定相移(图 1.2.8*c*)。同样地，当观察到图 1.2.9*b* 的波形，我们就知道它除了基波以外混有三次谐波(见图 1.2.9*a*)。图 1.2.9d 的波形也混有三次谐波，并带有一定相移(图 1.2.9*c*)。

我们再来看低次谐波对周期性方波波形的影响(图 1.2.10)。前面我们已经分析了这个周期方波的傅里叶级数和它的频谱。图 1.2.10*a* 表示滤除 3 次以上的谐波仅保留基波，图 1.2.10*b* 表示滤除 5 次以上的谐波仅保留基波与 3 次谐波，图 1.2.10*c* 表示仅保留

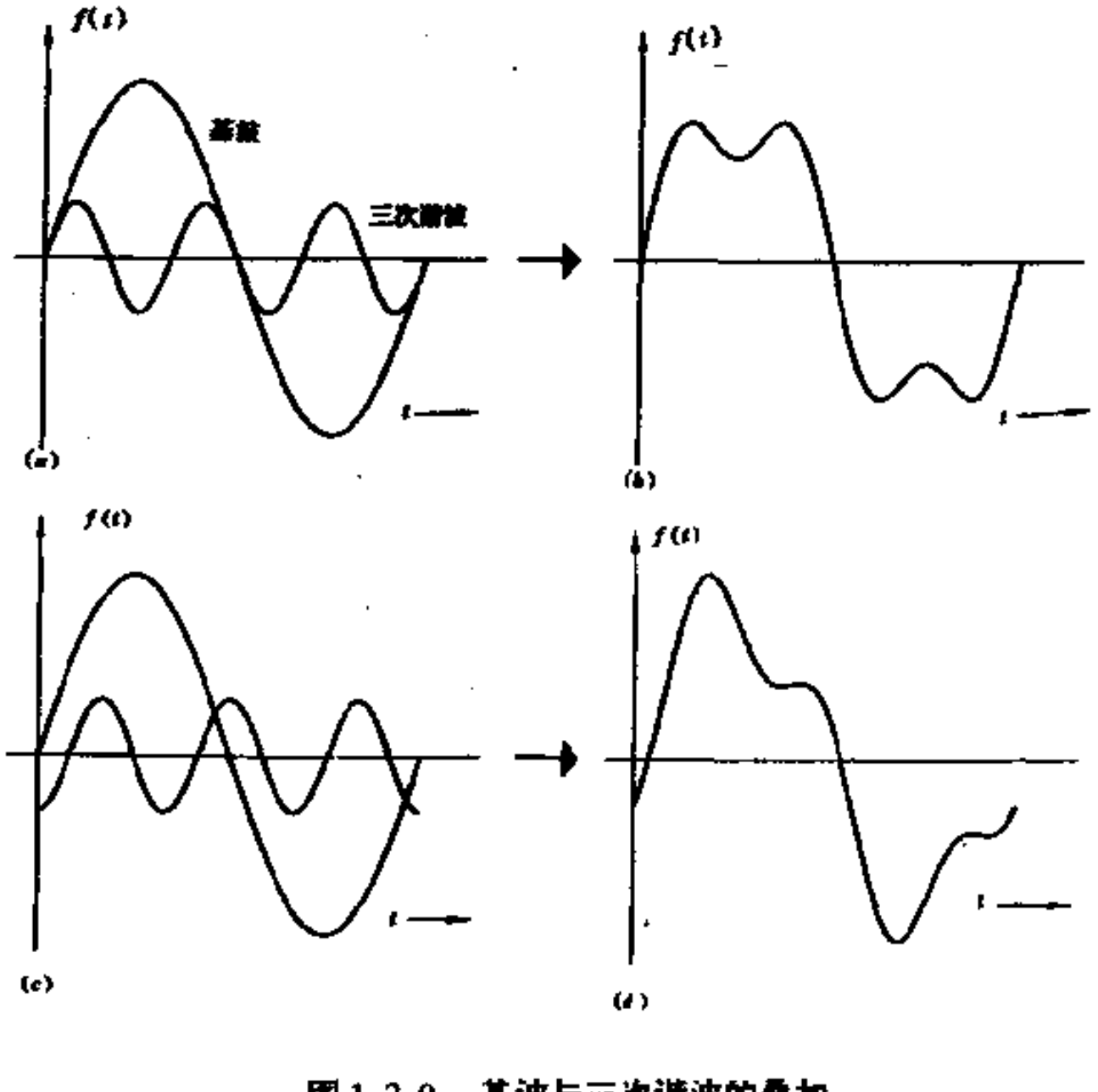
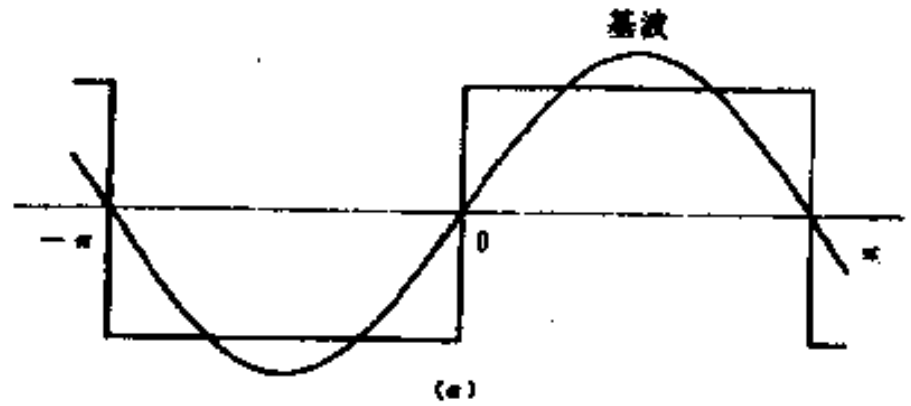


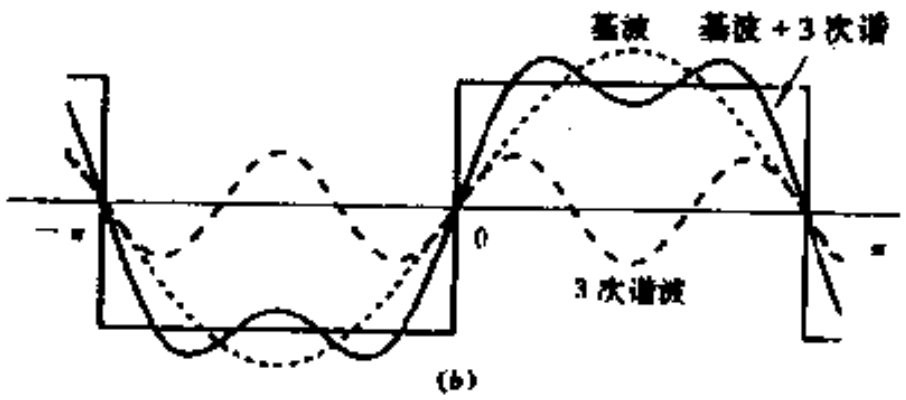
图 1.2.9　基波与三次谐波的叠加

基波，3 次谐波和 5 次谐波，图 1.2.10d 则表示基波与 3、5、7 次谐波之和。我们看出，较低次谐波主要影响方波的上、下顶部。如果这方波信号通过某电路后低次谐波被滤掉，那么方波的上、下顶部就会严重畸变。我们还可看出，高次谐波越多，方波的前沿和后沿就越陡。这些结论是实际工作中应具备的基本知识。

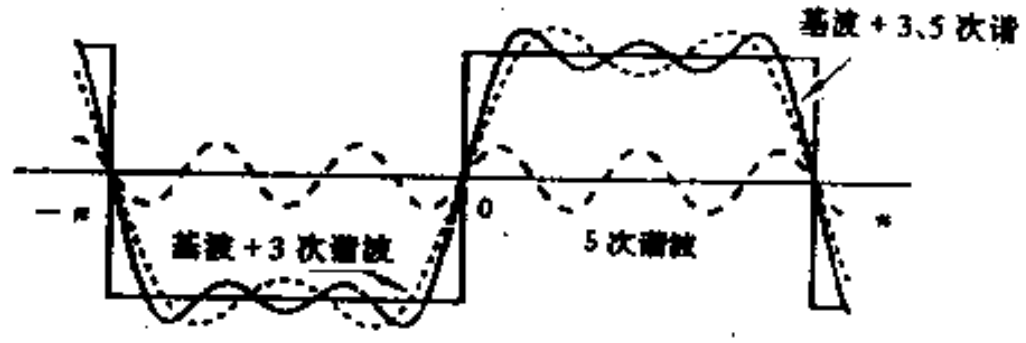
最后须指出的是，以上两节所讨论的仅限于周期性信号（对于非周期性信号波形的讨论将在后几节进行），即满足（1.1.1）式的信号。这种在时间上从 $-\infty$ 延续到 $+\infty$ 的周期信号不过是一种数学抽象。因为实际存在的信号总是有始有终的。但是如果实际信



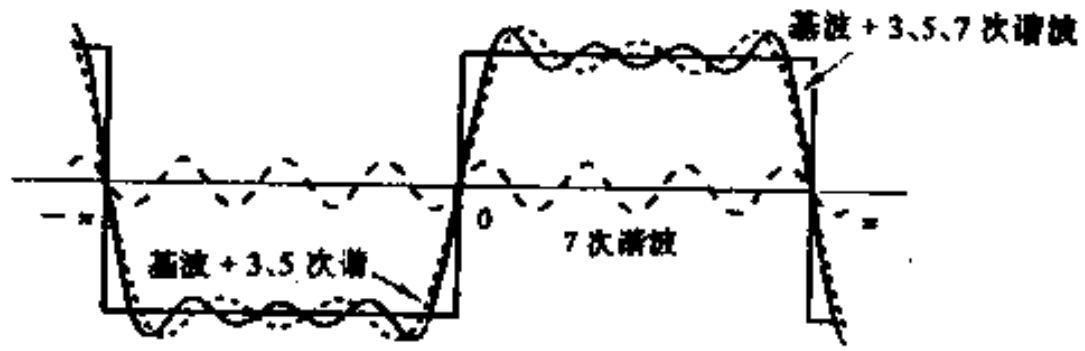
(a)



(b)



(c)



(d)

图 1.2.10　低次谐波对方波的影响

号周期性地持续相当长时间，周期数目 $n \gg 1$，我们就可以把它当作是周期信号。如果周期数目很少，那就不能当作是周期信号，而

必须当作非周期信号来处理。

§1.3 傅里叶积分

1.3.1 周期信号转化为非周期信号

有些脉冲发生器产生的周期性脉冲信号，它的重复周期 T 远大于脉冲宽度 τ，即 $T/\tau \gg 1$，比值 T/τ 称为空度系数。例如，间歇振荡器产生的脉冲，其空度系数可以做到几百到几千。某些雷达中使用的就是这种空度系数很大的脉冲信号。当我们观察这种空度系数很大的周期信号时，前一个脉冲过去以后，隔很长时间（相对而言）才出现第二个脉冲。前一个脉冲和后一个脉冲可以看作根本没有什么关系。于是我们研究这种空度系数很大的周期信号的特性时，只要研究单独一个脉冲的特性就够了。对于单个脉冲，它不存在什么周期问题，我们称之为非周期函数。从数学角度来看，在脉冲宽度 τ 固定的条件下，非周期函数（单个脉冲）不过是当周期函数的周期 T 趋于无限大时的极限情况。我们来具体讨论一个周期信号转化为非周期信号的例子。图 1.3.1a 表示周期为 T 的矩形脉冲信号，脉冲高度为 I，脉冲宽度为 τ（图 1.3.1a 中画出的是 $T/\tau = 2$ 的情况），这个波形可表示为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 \leqslant t < -\tau/2 \\ I, & -\tau/2 \leqslant t \leqslant \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < t \leqslant T/2 \end{cases}$$

$f(t)$ 显然是偶函数，故它的傅里叶系数 $b_m = 0$，由（1.1.13b）式有

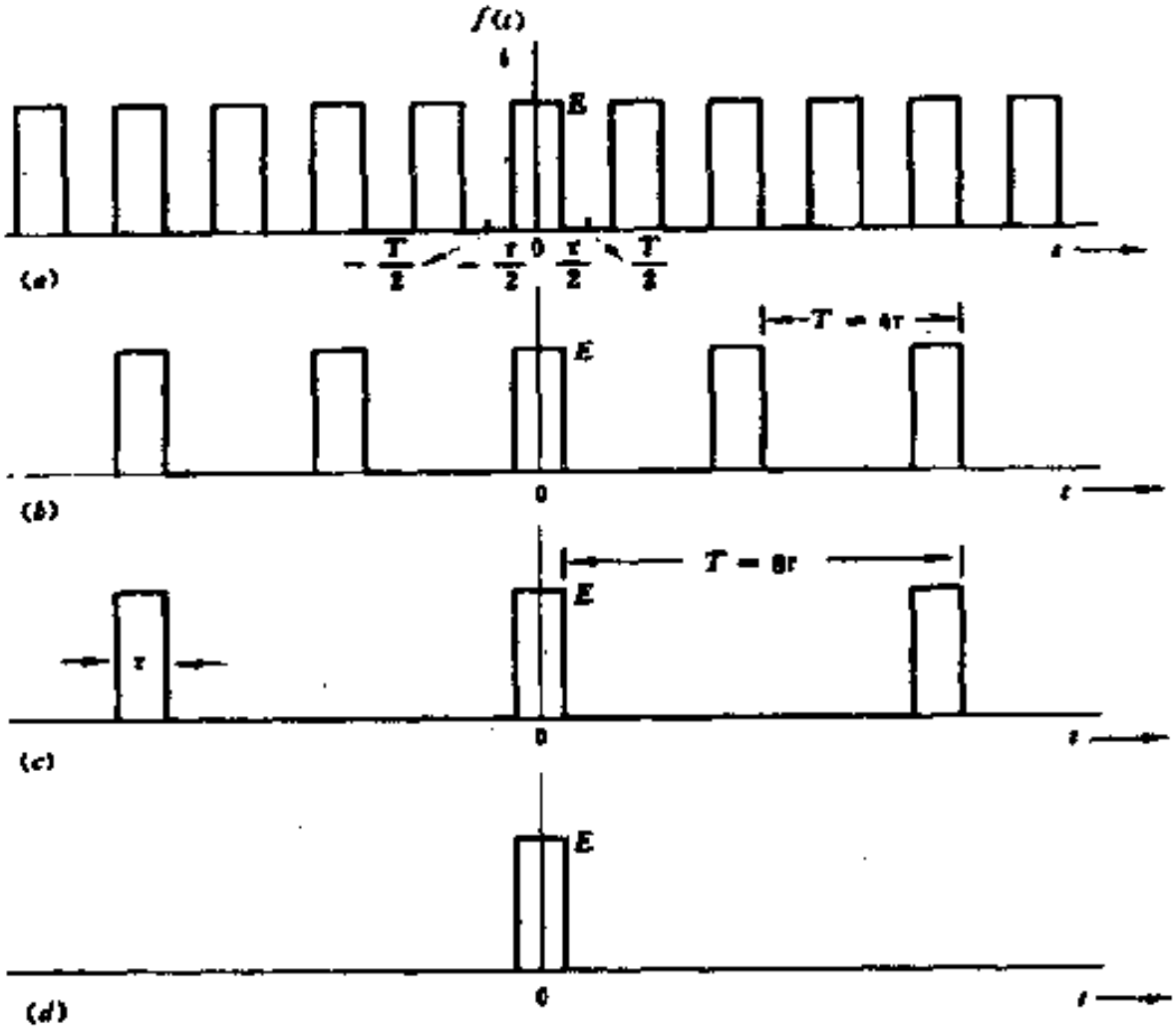


图 1.3.1　当周期 T 无限增加时周期脉冲过渡到单个脉冲

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega t) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{\tau}{2}} I\mathrm{d}t = \frac{2\tau I}{T} \qquad (1.3.1)$$

其中基波频率 $\omega = 2\pi/T$，直流分量为

$$|D_0| = \frac{a_0}{2} = \frac{\tau I}{T}$$

由(1.1.13a)式有

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos m\omega t\ \mathrm{d}(\omega t) = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi\omega t}{T}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{\tau}{2}} I\cos\frac{2\pi mt}{T}\mathrm{d}t = \frac{4I}{T}\left[\frac{\sin\frac{2\pi mt}{T}}{\frac{2\pi m}{T}}\right]_{t=0}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{2I\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{\pi m\tau}{T}}{\frac{\pi m\tau}{T}} = \frac{2I\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{\omega_m\tau}{2}}{\frac{\omega_m\tau}{2}}$$

其中 ω_m 为第 m 次谐波的频率：

$$\omega_m = m\omega = \frac{2\pi m}{T} \tag{1.3.2}$$

复数振幅为

$$D_m = \frac{a_m}{2} = \frac{I\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{\omega_m\tau}{2}}{\frac{\omega_m\tau}{2}} \tag{1.3.3}$$

若令$\frac{\omega_m\tau}{2} = x$($x$ 是无量纲的量)，那么(1.3.3)式中后一个因子可写成为

$$\mathrm{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{1.3.4}$$

这个函数在频谱分析中常常出现，称为取样函数。这个函数的最大值在 $x = 0$ 处，这时 $\sin x \to x$，$\sin x/x \to 1$；当 $x \to \infty$ 时，取样函数摆动于正值和负值之间，并逐渐趋于零。假定 x 是连续变量，那么取样函数的图形如图 1.3.2 所示。

现在回到原来的问题。我们来看看当脉冲重复周期 T 增加时出现什么情况。假定脉冲宽度 τ 固定而使 T 增加，当 $T/\tau = 2, 4, 8$ 时的信号波形对应于图 1.3.1a、b、c。对这三种情况，按照(1.3.1)至(1.3.3)式可列出表 1.3 的结果，相应的幅度频谱见图 1.3.3。从表 1.3 和图 1.3.3 可以得出以下结论：第一，脉冲重复周期 T 每增加一倍，基波频率 $2\pi/T = \omega$ 就减小一倍，即谱线间距减小一

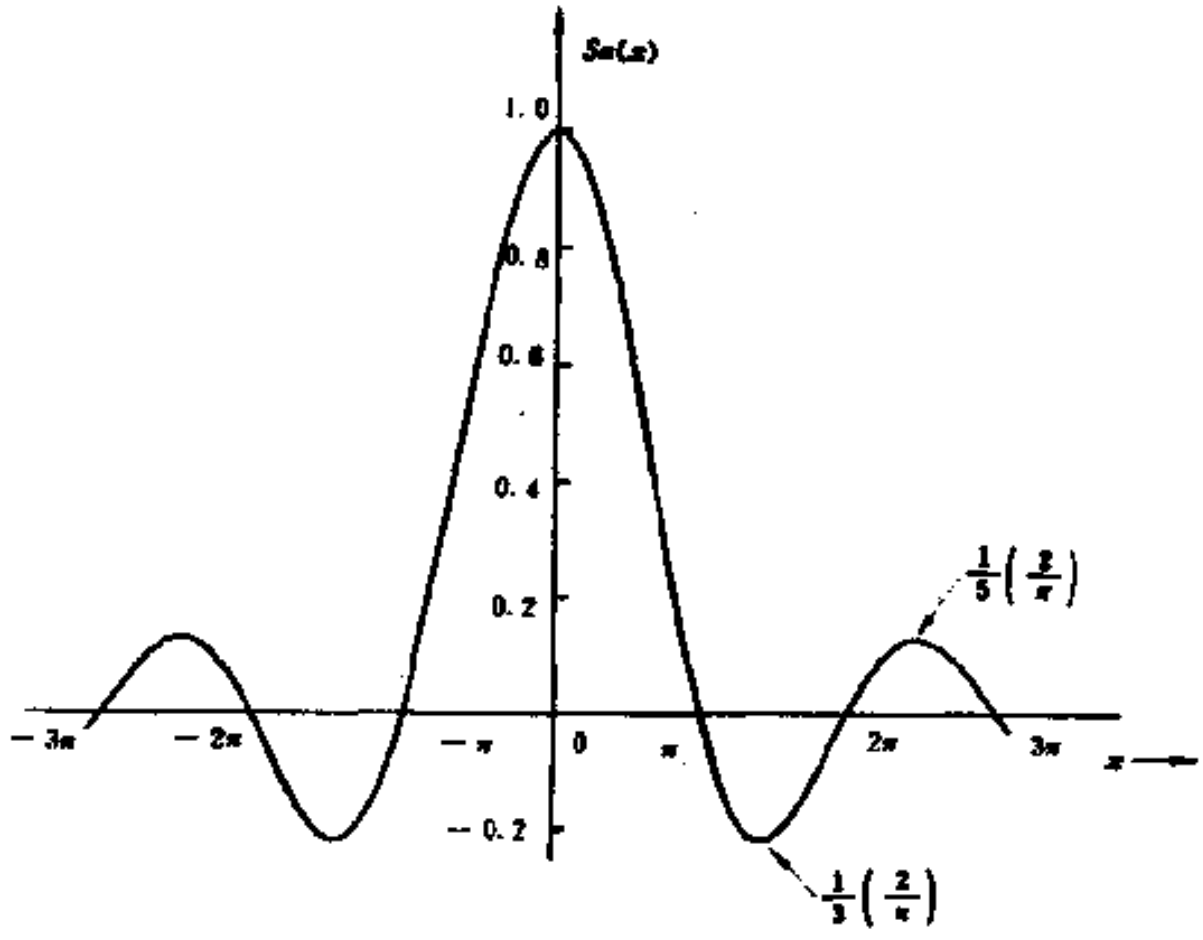


图 1.3.2　取样函数 $\mathrm{Sa}(x) = \sin x / x$

倍，谱线变得密集起来。第二，当 T 增加时，直流分量与 T 成反比地减小，基波与谐波幅度也相应减小。

表 1.3　周期增加时谐波幅度和频率的变化

空度系数	直流分量	第 m 次谐波幅度	第 m 次谐波频率
$\frac{T}{\tau} = 2$	$\lvert D_0 \rvert = \frac{I}{2}$	$\lvert D_m \rvert = \frac{I}{\pi m} \lvert \sin \frac{\pi m}{2} \rvert$	$\omega_m = \frac{\pi m}{\tau}$
$\frac{T}{\tau} = 4$	$\lvert D_0 \rvert = \frac{I}{4}$	$\lvert D_m \rvert = \frac{I}{\pi m} \lvert \sin \frac{\pi m}{4} \rvert$	$\omega_m = \frac{\pi m}{2\tau}$
$\frac{T}{\tau} = 8$	$\lvert D_0 \rvert = \frac{I}{8}$	$\lvert D_m \rvert = \frac{I}{\pi m} \lvert \sin \frac{\pi m}{8} \rvert$	$\omega_m = \frac{\pi m}{4\tau}$

当 T 无限增加时，$T \to \infty$，从波形来看(图 1.3.1d)，周期性矩形脉冲只剩下了一个，成为非周期性的单个矩形脉冲。从频谱来

看，这时似乎谱线高度和谱线间距都将趋于零。如果我们凭直观想象，就会认为在周期渐长、谱线渐密、谱线高度渐小的极限过程中，最后一切都将化为无有，于是对单个脉冲也就无频谱可言。然而这样的想法是错误的。当 $T\to\infty$ 时，矩形脉冲的傅里叶级数尽管每项都是无穷小量，但无限多个无穷小量之和是可以等于一个有限值的。当 $T\to\infty$ 时，尽管只剩下一个电流脉冲，但有电流就有能量，不管把脉冲信号怎样分解，它的能量绝不会消灭，而是分配到各个分量中，因而必定存在单个脉冲的频谱，只不过采取了全新的形式。我们将看到，随着周期信号转化为非周期信号，傅里叶级数将转化为傅里叶积分，离散频谱将转化为连续频谱。

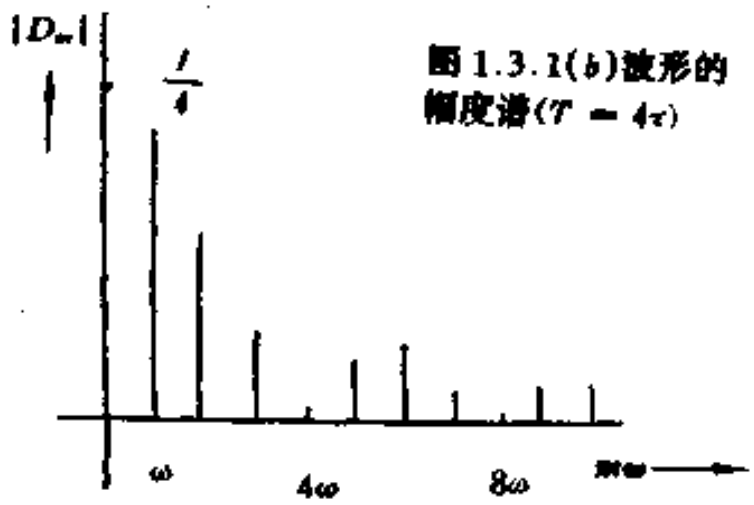


图 1.3.1(*c*)波形的幅度谱($T=4\tau$)

(*a*)

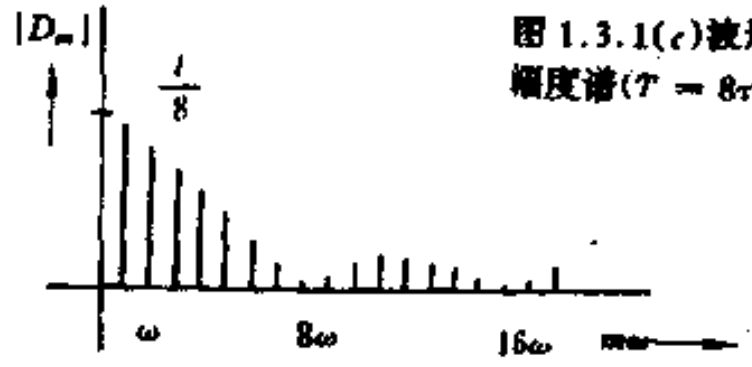


图 1.3.1(*c*)波形的幅度谱($T=8\tau$)

(*b*)

图 1.3.3　矩形脉冲的频谱

1.3.2 傅里叶积分公式

上面讨论的单个矩形脉冲只是非周期信号的一个例子。实际上,从任意周期函数截取出一部分就成为非周期信号。一般地,凡是不满足

$$f(t + nT) = f(t) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

的信号都是非周期信号(图 1.3.4)。有些非周期信号延续的时间很长,可能从 $-\infty$ 延续到 $+\infty$ 的全部时间。这里仅讨论下述非周期信号,即在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的全部时间内信号的能量(正比于 $|f(t)|^2$)为有限值:[①]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \text{有限值} \tag{1.3.5}$$

现在我们从周期信号的傅里叶级数(复数形式)出发,考虑当周期 $T \to \infty$ 时它的傅里叶级数如何转化为积分形式。首先,我们把复数形式的傅里叶级数(1.1.20)和(1.1.21)式改写成明显包含周期 T 的形式,为此,将基波角频率 ω 换为 $2\pi/T$,得到

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widetilde{D}_m e^{j\frac{2\pi m}{T}t} \tag{1.3.6}$$

$$\widetilde{D}_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi m}{T}} dt \tag{1.3.7}$$

我们注意到,$1/T$ 就是周期信号 $f(t)$ 的基波频率 f;同时,它也是第 m 次谐波与第$(m-1)$次谐波频率之差:$f_m - f_{m-1} = \Delta f = 1/T$。在它的离散谱上,相邻两条谱线间的距离可表示为 $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$。于是(1.3.6)和(1.3.7)式可进一步改写为

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{j(m\Delta\omega)t} \tag{1.3.8}$$

---

① 这个条件的限制过于严格。它是充分的,但不是必要的,在 2.2.2 将指出,不满足这个条件的非周期函数仍可用傅里叶积分表示。

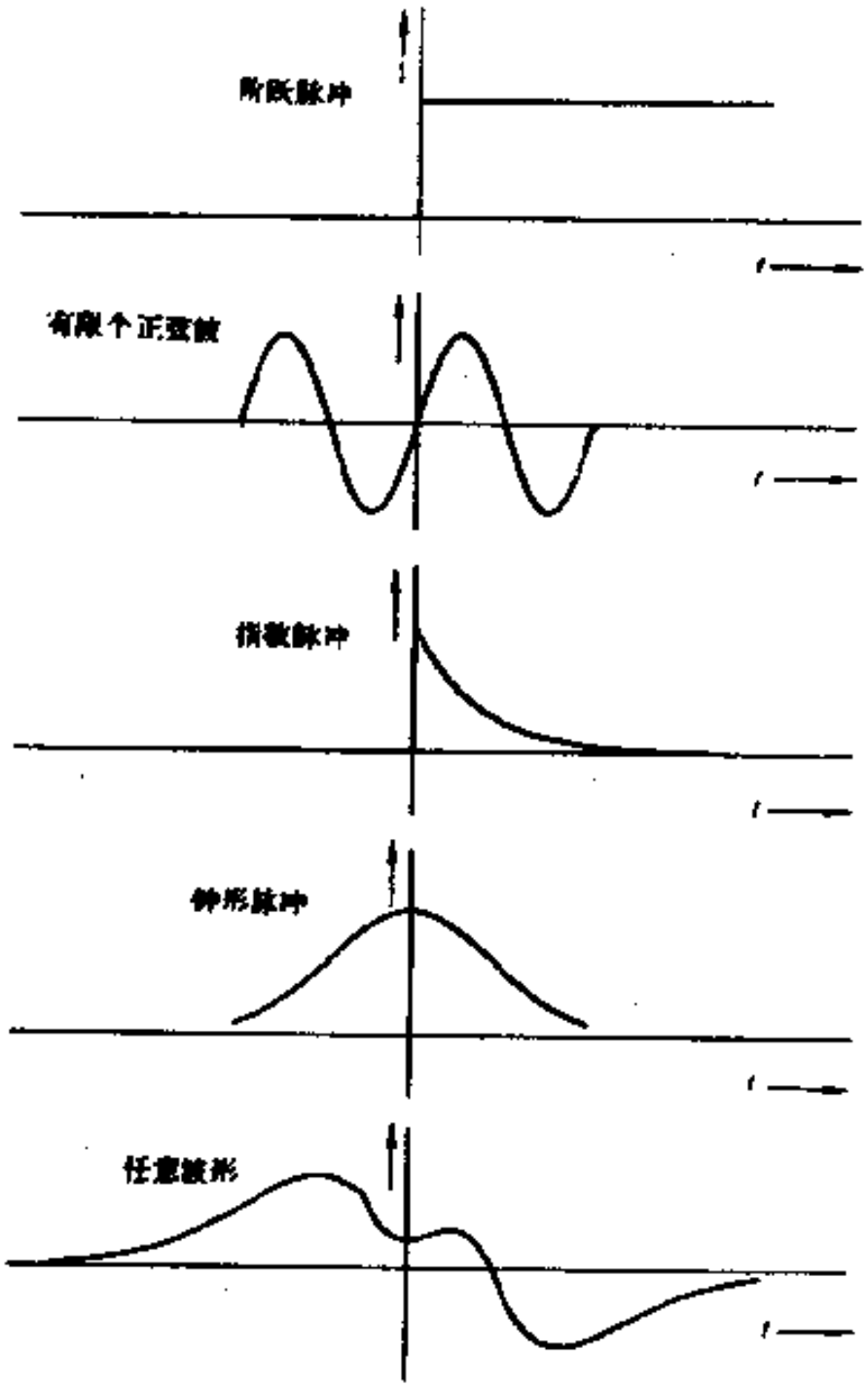


图 1.3.4　非周期信号的例子

$$\widetilde{D}_m = \Delta f \int_{-\frac{1}{2\Delta f}}^{\frac{1}{2\Delta f}} f(t) e^{-j(m\Delta\omega)t} \mathrm{d}t \tag{1.3.9}$$

在以上二式中，$m\Delta\omega$ 为第 m 次谐波的角频率。

从(1.3.9)式可以看出，当周期 $T\to\infty$ 即 $\Delta f\to 0$ 时，$D_m\to 0$。然而，只要保证当 $\Delta f\to 0$ 时下式成立

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(m\Delta\omega)t}\mathrm{d}t = \text{有限值} \tag{1.3.10}$$

则比值 $D_m/\Delta f$ 当 $\Delta f\to 0$ 时就是有限值，由于我们已经有了限制条件(1.3.5)式，就可以充分保证(1.3.10)式成立。因为(1.3.10)式中被积函数的绝对值总小于(1.3.5)式中被积函数的绝对值。积分式(1.3.5)收敛，则积分式(1.3.10)也必收敛。

我们在前面的讨论中已经知道，当 $\Delta f\to 0$ 时，信号的离散谱上各次谐波的谱线就彼此靠紧，谱线间的距离最终成为无穷小。如果在上述傅里叶级数中用 ω 表示第 m 次谐波的角频率，$\omega = m\Delta\omega$，当 $\Delta\omega\to 0$ 时，m 必须趋于无穷大才能保证乘积 $m\Delta\omega$ 等于有限值。在极限情况下，谐波频率 ω 就不是取对应于参数 m 的分立值，而是可以连续地取任何值，即 ω 成为连续变量。这时，(1.3.9)式中的 D_m 也就不是只能取对应于参数 m 的分立值，而是变量 ω 的连续函数 $D(\omega)$。我们把(1.3.9)式中的 $m\Delta\omega$ 换为 ω，D_m 换为 $D(\omega)$，于是有

$$\lim_{\Delta f\to 0}\frac{D(\omega)}{\Delta f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

上式中的极限 $\lim\limits_{\Delta f\to 0}\dfrac{D(\omega)}{\Delta f}$ 一般记为 $F(\omega)$，并称为函数 $f(t)$ 的傅里叶变换：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.3.11}$$

我们再来考虑(1.3.8)式中的级数和当 $T\to\infty$ 时的极限情况。把(1.3.8)式中的 D_m 换为 $F(\omega)\Delta f = F(\omega)\Delta\omega/2\pi$，把 $m\Delta\omega$ 换为 ω，得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\Delta\omega$$

在 $\Delta\omega\to 0$ 的极限情况下有

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \qquad (1.3.12)$$

上式称为傅里叶积分公式，而

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (1.3.13)$$

称为傅里叶逆变换。我们看到，时间函数 $f(t)$ 和频率函数 $F(\omega)$ 是彼此等价的，已知 $f(t)$ 就可由(1.3.11)式求出 $F(\omega)$；反之，已知 $F(\omega)$ 就可由(1.3.13)式求出 $f(t)$。

下面讨论几种有用的情况。如果非周期函数 $f(t)$ 仅存在于 $t>0$ 的时间内，即当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则傅里叶变换公式(1.3.11)可写成

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \qquad (1.3.14)$$

傅里叶变换公式(1.3.11)也可以用三角函数形式表示出来：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\ \omega t\ \mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\ \omega t\ \mathrm{d}t$$

(1.3.15)

如果 $f(t)$ 具有偶对称性，则 $f(t)\sin\ \omega t$ 是 t 的奇函数，于是上式第二项积分为零，$F(\omega)$ 成为 ω 的实函数：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\ \omega t\ \mathrm{d}t$$

或者

$$F(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\ \omega t\ \mathrm{d}t, \quad f(t) = f(-t)$$

(1.3.16)

如果 $f(t)$ 具有奇对称性，则 $f(t)\cos\ \omega t$ 也是奇函数，于是

(1.3.15) 式 中第一项积分为零,这时 $F(\omega)$ 成为 ω 的虚函数:

$$F(\omega) = -j\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \omega t \ \mathrm{d}t$$

或者

$$F(\omega) = -2j\int_{0}^{+\infty} j(t)\sin \omega t \ \mathrm{d}t, \quad f(t) = -f(-t) \tag{1.3.17}$$

回顾周期信号的傅里叶级数,当周期信号为偶(奇) 对称时,它的傅里叶级数仅包含余弦(正弦) 项,(1.3.16) 和(1.3.17) 式与此完全类似。

如果对(1.3.11) 式两端取复数共轭则有

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}\mathrm{d}t \tag{1.3.18}$$

在电子工程中 $f(t)$ 代表的常常是电流或电压等物理量,故 $f(t)$ 总是实函数。这样 j 的符号的改变可以看作是 ω 符号的改变,上面最后一个积分就是 $F(-\omega)$,于是有:

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

§1.4 连续谱

1.4.1 频谱密度

比较非周期函数的傅里叶逆变换公式(1.3.13) 和周期函数的傅里叶级数(1.3.6),我们看到:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$ 类似于

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m e^{j\frac{2\pi m}{T}t} \tag{1.4.1}$$

比较非周期函数的傅里叶变换公式(1.3.11)和周期函期的谐波幅度公式(1.3.7)我们看到：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad \text{类似于}$$

$$D_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\frac{2\pi m}{T}t}dt \tag{1.4.2}$$

然而，傅里叶积分与傅里叶级数之间存在本质的区别。特别应注意的是，$F(\omega)$ 的单位是 D_m 的单位除以频率的单位[$F(\omega) = \lim_{\Delta f \to 0} D_m/\Delta f$]。如果 $f(t)$ 表示电压波形，则 $f(t)$ 和 D_m 的单位都是伏特，而 $F(\omega)$ 的单位是伏特 / 赫。因此，$F(\omega)$ 并不表示谐波幅度，而是表示在频谱图上谱线的密度，$F(\omega)$ 通常就称为频谱密度。

傅里叶变换公式(1.3.11)和(1.3.13)是对非周期信号进行频谱分析的基础。由(1.4.1)式的类似关系，我们可以把(1.3.13)式的积分理解为频率由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的无限多个“谐波”的总和，这些“谐波”的振幅 $F(\omega)d\omega$ 为无限小，$F(\omega)d\omega$ 相当于傅里叶级数中复数振幅 D_m，$F(\omega)$ 则相当于谱线密度。如果以横轴表示连续变量 ω，以纵轴表示 $F(\omega)$，画出频谱密度 $F(\omega)$ 与 ω 之间关系的连续曲线，我们称之为连续谱。

为了更好地理解频谱密度的概念，我们将物体的质量密度做一对比。比方说一个物体是由均匀材料做成的，例如一个铁块，它的质量为 M，体积为 V，它的密度是 $\rho = M/V$。我们再来考虑垂直于地平面的一个柱体内空气的质量。它的体积 V 是底面积 s 乘以高 h。为简单计，设底面积 $s = 1$(单位面积)。在地面与高为 h_1 的截面之间包含一定质量的空气，记为 $m(h_1)$。如果空气的密度 ρ 是均匀的，则 $m(h_1) = \rho v_1 = \rho h_1 \cdot 1$。但实际上地面上方的空气密

度是不均匀的，离地面越高，空气密度越小，即空气密度 ρ 是高度 h 的函数：$\rho = \rho(h)$，假设

$$\rho(h) = \frac{\rho_o}{1 + h^2}$$

这里 ρ_o 表示地面处($h = 0$)的空气密度，于是从地面到高为 h_1 的柱体内的空气质量为：

$$m(h_1) = \int_0^{h_1} \frac{\rho_o}{1 + h^2} \mathrm{d}h$$

显然从 $h = 0$ 到 $h = h_1$ 的空气柱的质量大于从 h_1 到 $2h_1$ 的空气柱的质量。我们注意到，在空气柱的任一截面内空气的质量是零，因为平面的体积是零。但是，在高为 h_1 处，取单位截面和无限小的高度 $\mathrm{d}h$ 做成的无限小柱体内却包含无限小的质量：

$$\mathrm{d}m = \rho(h)\mathrm{d}h = \frac{\rho_o}{1 + h^2}\mathrm{d}h$$

并且在不同高度处的这个无限小柱体具有不同的无限小质量。因此，我们可以说，尽管在高为 h_1 和 h_2 的两个平面内空气质量都为零，但是这两个“零”是不同的，因为在这两个高度处空气的密度是不同的：在 h_1 处是 $\rho_o/(1 + h_1^2)$，在 h_2 处是 $\rho_o/(1 + h_2^2)$。

连续谱的频谱密度与空气的质量密度有点类似：在连续谱中，对某一个指定频率 f_1(在一个指定高度 h_1)，它的谐波幅度为零(截面内空气质量为零)。但幅度密度 $F(\omega_1)$ 是有限值并随 ω_1 而改变(空气密度是有限值并随高度 h 而改变)。谐波幅度 $F(\omega)\mathrm{d}\omega$ 与无限小的频率间隔 $\mathrm{d}\omega$ 有关。这正如上例中空气质量 $[\rho_o/(1 + h_1^2)]\mathrm{d}h$ 与 h_1 处的无限小体积 $\mathrm{d}h \cdot 1$ 的关系一样。由于这些考虑，$F(\omega)$ 称为非周期函数 $f(t)$ 在角频率为 ω 处的谐波幅度密度是合适的。幅度密度、频谱密度、频谱函数、频谱特性或频率分布函数都是一个意思，都是指 $F(\omega)$。我们主要使用“频谱密度”一词。下面我们就一些基本的非周期信号来说明如何计算它们的频谱密度

$F(\omega)$，并做出它们的连续谱。

$F(\omega)$ 一般为复变量函数，它可写为

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi} \tag{1.4.3}$$

这与(1.1.22)式类似，因此连续谱也分为幅度谱和位相谱，前者取决于 $F(\omega)$ 的模，后者取决于 $F(\omega)$ 的辐角。在实际应用中主要使用幅度谱。

1.4.2 指数衰减信号的频谱

图 1.4.1*a* 表示指数衰减信号，它的数学表示式为：

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

其中衰减常数 β 为正实数。为求出它的频谱密度，由傅里叶变换公式(1.3.11)有：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta + j\omega)t} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{-(\beta + j\omega)t}}{-(\beta + j\omega)} \right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{0 - 1}{-(\beta + j\omega)} = \frac{1}{\beta + j\omega} \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

由此可求出频谱密度的模和辐角分别为：

$$|F(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega}{\beta^2 + \omega^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\beta}\right)$$

图 1.4.1*b* 和图 1.4.1*c* 分别画出了指数衰减信号的幅度谱和位相谱。

如果用这种指数衰减信号对周期性正弦(或余弦)信号调幅，就得到图 1.4.2*a* 所示的指数衰减正弦信号(或余弦信号)，这个时

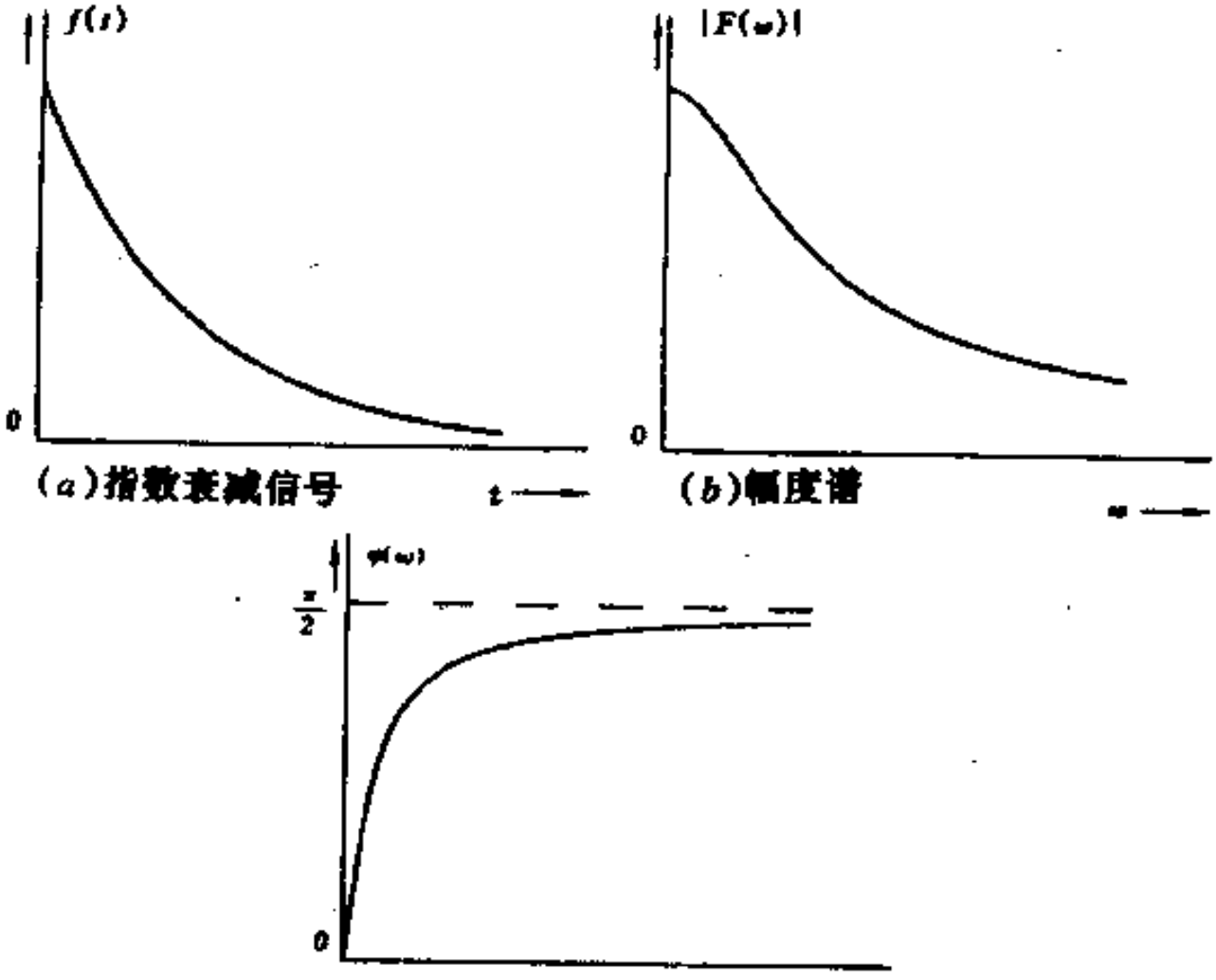


图 1.4.1　指数衰减信号及其频谱

间函数可表示为

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}\sin\ \omega_0 t, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad \text{(衰减正弦)}$$

或

$$f_2(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}\cos\ \omega_0 t & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad \text{(衰减余弦)}$$

它们的傅里叶变换分别为

$$F_1(\omega) = \int_0^\infty e^{-\beta t}\sin\ \omega_0 t e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(\beta+j\omega)t}\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$F_2(\omega) = \int_0^\infty e^{-\beta t}\cos\omega_0 t e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(\beta+j\omega)t}\cos\ \omega_0 t\ \mathrm{d}t$$

令 $-(\beta + j\omega) = \alpha$，对以上二式进行分部积分有

$$F_1(\omega) = \int_0^\infty e^{\alpha t}\mathrm{d}\left(\frac{-\cos\omega_0 t}{\omega_0}\right) = \left[\frac{e^{\alpha t}(-\cos\omega_0 t)}{\omega_0}\right]_0^\infty + \frac{\alpha}{\omega_0}\int_0^\infty e^{\alpha t}\cos\ \omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$F_2(\omega) = \int_0^\infty e^{\alpha t}\mathrm{d}\left(\frac{\sin\ \omega_0 t}{\omega_0}\right) = \left[\frac{e^{\alpha t}\sin\ \omega_0 t}{\omega_0}\right]_0^\infty - \frac{\alpha}{\omega_0}\int_0^\infty e^{\alpha t}\sin\ \omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

由此可得

$$\alpha F_2(\omega) - \omega_0 F_1(\omega) = [e^{\alpha t}\cos\ \omega_0 t]_0^\infty$$

$$\omega_0 F_2(\omega) + \alpha F_1(\omega) = [e^{\alpha t}\sin\ \omega_0 t]_0^\infty$$

注意到 $\alpha = -(\beta + j\omega)$，故有

$$[e^{\alpha t}\cos\ \omega_0 t]_0^\infty = -1, \quad [e^{\alpha t}\sin\ \omega_0 t]_0^\infty = 0,$$

于是求出

$$F_1(\omega) = \frac{\omega_0}{(\beta + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

$$F_2(\omega_0) = \frac{\beta + j\omega}{(\beta + j\omega)^2 + \omega_0^2} \tag{1.4.5}$$

对于衰减正弦有

$$|F_1(\omega)| = \frac{\omega_0}{\sqrt{(\beta^2 + \omega_0^2)^2 + \omega^4 + 2\omega^2(\beta^2 - \omega_0^2)}}$$

相应的幅度谱见图 1.4.2*b*。最原始的火花式发报机所发出的无线电信号就是一系列这种衰减正弦振荡。从图 1.4.2*b* 可以看出，这种信号所占的频带是很宽的；并且衰减系数 β 愈大，所占频带就愈宽，发报机之间干扰十分厉害，这是用火花式发报机传输信息的严重缺点之一。

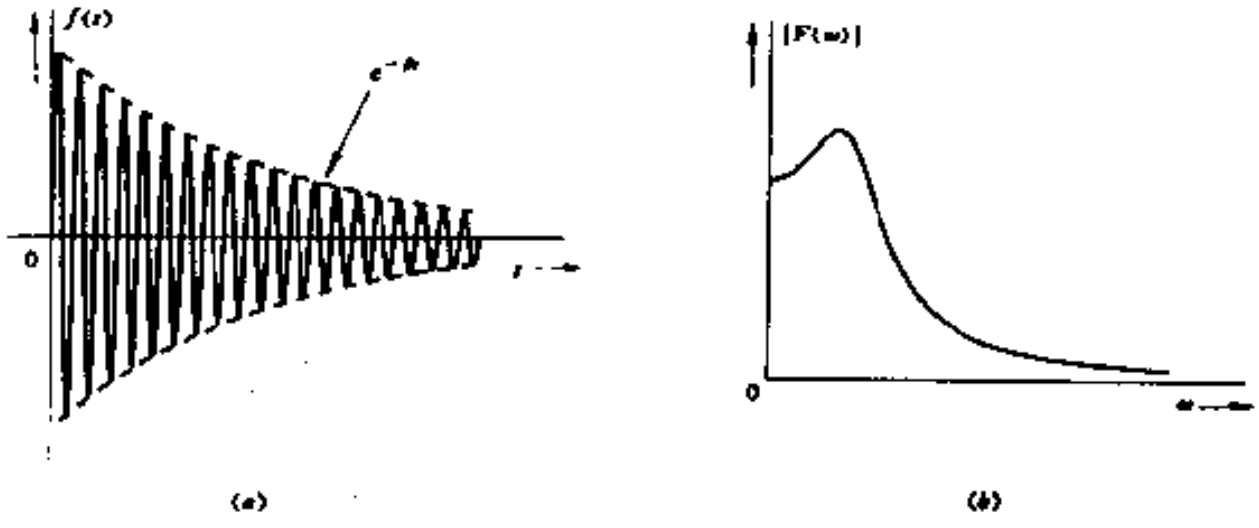


图 1.4.2　指数衰减正弦信号(a) 及其幅度谱(b)

1.4.3　单个矩形脉冲信号的频谱

设单个矩形脉冲高度为 I,作用时间为 τ(图 1.4.3a),它可表示成

$$f(t)=\begin{cases} I, & -\frac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由于 $f(t)$ 具有偶对称性,故利用(1.3.16)式计算频谱密度 $F(\omega)$ 较方便:

$$F(\omega)=2\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\tau}{2}}I\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=2I\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_{t=0}^{\frac{\tau}{2}}=I\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)} \qquad (1.4.6)$$

$F(\omega)$ 的模为

$$|F(\omega)|=I\tau\left|\frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}\right|$$

由此画出的幅度谱如图 1.4.3b 所示,它与图 1.3.2 的取样函数图

形一致。为清楚计，在幅度谱上，横轴不是以 ω，而是以 $\omega\tau/2$ 表示的。$F(\omega)$ 的辐角比较简单，它只取决于 $\sin\ \omega\tau/2$ 何时改变符号，例如，

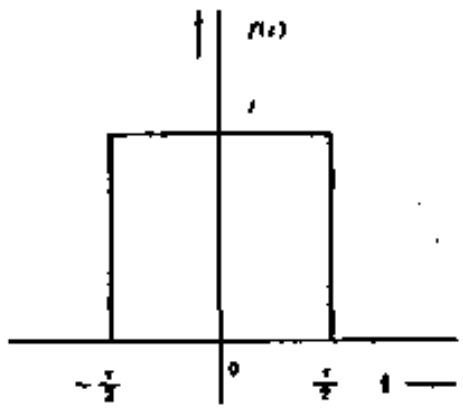
当 $0 < \frac{\omega\tau}{2} < \pi$ 时，$\sin\frac{\omega\tau}{2} = |\sin\frac{\omega\tau}{2}| = |\sin\frac{\omega\tau}{2}|e^{-j0}$，故 $\varphi(\omega) = 0$；

当 $0 < \frac{\omega\tau}{2} < 2\pi$ 时，$\sin\frac{\omega\tau}{2} = -|\sin\frac{\omega\tau}{2}| = |\sin\frac{\omega\tau}{2}|e^{-j\pi}$，故 $\varphi(\omega) = \pi$；

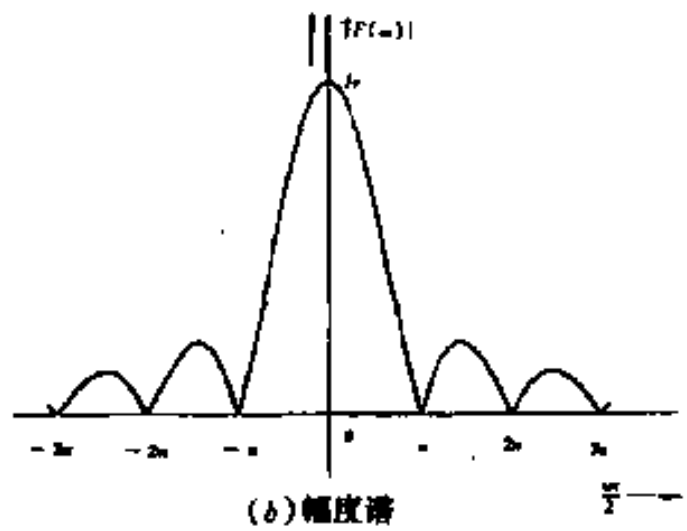
当 $2\pi < \frac{\omega\tau}{2} < 3\pi$ 时，$\sin\frac{\omega\tau}{2} = |\sin\frac{\omega\tau}{2}| = |\sin\frac{\omega\tau}{2}|e^{-j2\pi}$，故 $\varphi(\omega) = 2\pi$。

依此类推，可以确定出当 $\omega\tau/2$ 改变时辐角 $\varphi(\omega)$ 变化的整个情况，由此做出的相位谱如图 1.4.3c 所示，其中横轴是以 $\omega\tau/2$ 表示的。

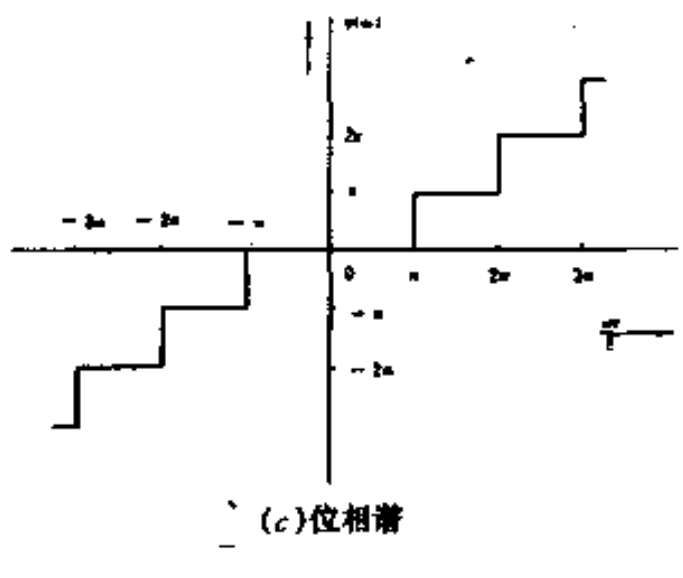
从幅度谱(图 1.4.3.b) 可以看出，当$0 < \frac{\omega\tau}{2} < \pi$ 时，亦即在 $0 < \omega < \frac{2\pi}{\tau}$ 的频率范围内，$|F(\omega)|$ 具有较大的数值，这个频带可以定义为信号的占有频带 Δf，Δf 与 τ 成反比关系，脉冲宽度 τ 愈小，则所占频带愈宽，这是一个具有普遍意义的重要结论。比较 (1.4.6) 式和(1.3.3) 式，发现它们仅相差因子 $1/T$。反映到幅度谱上，单个矩形脉冲的连续谱与周期性矩形脉冲的离散谱的包络线(取样函数) 除相对尺度不同外，形状完全一致。所差的因子 $1/T$ 正说明(1.3.3) 式中的 D_m 表示的是谐波幅度，而(1.4.6) 式中的 $F(\omega)$ 表示的则是幅度密度或频谱密度。



(a) 单个矩形脉冲波形



(b) 幅度谱



(c) 位相谱

图 1.4.3　单个矩形脉冲波形及其频谱

1.4.4　钟形脉冲信号的频谱

钟形脉冲信号可表示为

$$f(t) = e^{-a^2t^2} \tag{1.4.7}$$

这个函数也称为高斯函数，在讨论不规则信号(噪声信号)时将会遇到它。这个信号的波形如图 1.4.4a 所示。我们来计算它的频谱密度：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t^2} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2t^2+j\omega t)}\,\mathrm{d}t$$

为完成上述积分，我们做一些变换，令 $x = at + j\dfrac{\omega}{2a}$，则有

$$a^2t^2 + j\omega t = (at + j\frac{\omega}{2a})^2 + \frac{\omega^2}{4a^2}$$

$$= x^2 + \frac{\omega^2}{4a^2}$$

代入上述积分中得：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+\omega^2/4a^2)} \mathrm{d}(\frac{x}{a}) = \frac{e^{-\omega^2/4a^2}}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2e^{-\omega^2/4a^2}}{a}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

上式中的积分我们在学习广义积分时已经计算过：

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

于是有

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\omega^2/4a^2} \tag{1.4.8}$$

若取 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$，则有

$$f(t) = e^{-t^2/2} \text{ 和 } F(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$$

我们清楚地看到，钟形脉冲的频谱密度仍是钟形脉冲，仅相差常数因子$\sqrt{2\pi}$(图 1.4.4)。

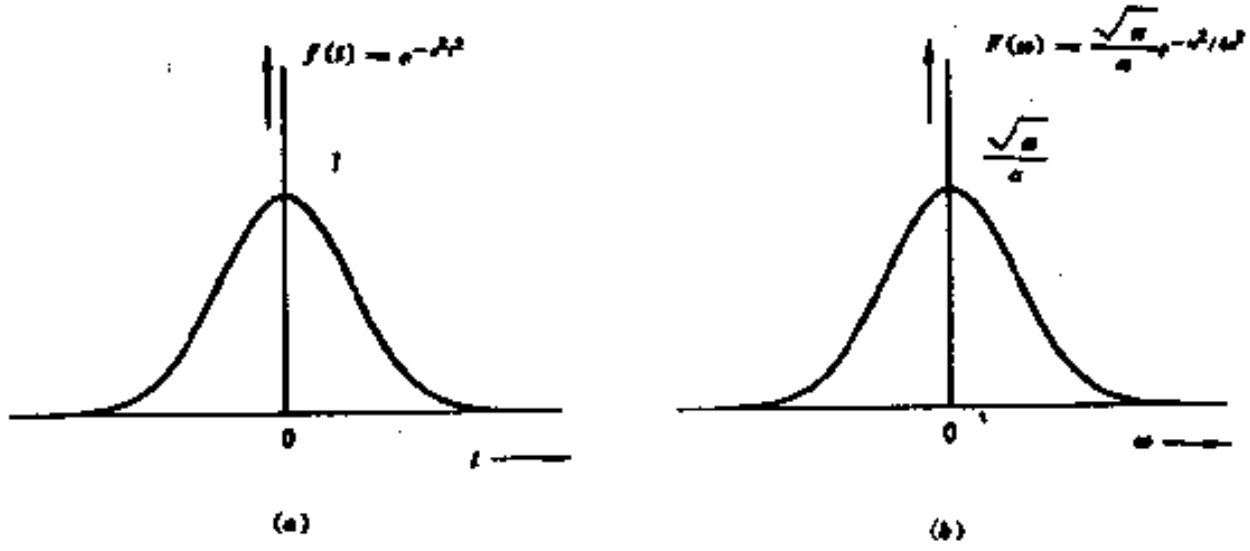


图 1.4.4　钟形脉冲及其频谱

第二章　电子工程中的傅里叶变换方法

§2.1　傅里叶变换及其性质

2.1.1　符号 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{-1}$

在 1.3 中我们看到，傅里叶积分公式(1.3.12) 可以分为两个公式，即(1.3.11) 和(1.3.13) 式，它们分别称为傅里叶变换和傅里叶逆变换。为书写方便，习惯上把这两个公式用符号表示成：

$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = F(\omega) \qquad (2.1.1)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t) \qquad (2.1.2)$$

$\mathscr{F}$ 表示“求傅里叶(正) 变换，$\mathscr{F}^{-1}$表示“求傅里叶逆变换”。

下面介绍傅里叶变换的主要性质，它们对解决实际问题带来许多方便。

2.1.2　线性叠加性质

如果信号 $f(t)$ 乘以常数 a，则它的频谱密度 $F(\omega)$ 也必乘以常数 a，因为由(2.1.1) 式，常数 a 可以提到积分号外面。此外，两个信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 之和的频谱密度等于它们各自的频谱密度之和 $F_1(\omega) + F_2(\omega)$。这从积分的性质也可直接看出。这两个性质可以合起来表示成

$$\mathscr{F}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1\mathscr{F}[f_1(t)]+a_2\mathscr{F}[f_2(t)]$$
$$=a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega) \tag{2.1.3}$$

这是一个简单但非常有用的公式，它表示傅里叶变换的线性叠加性质。类似地，对傅里叶逆变换也有

$$\mathscr{F}^{-1}[a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)]=a_1f_1(t)+a_2f_2(t) \tag{2.1.4}$$

线性叠加性质对于多个信号当然也是成立的。

2.1.3 平移性质

1.时移

如果把信号 $f(t)$ 沿着时间轴平移一段距离，它的频谱会产生什么变化呢?我们假定 $f(t)$ 滞后一段时间 t_0，则 $f(t)$ 变成 $f(t-t_0)$，由(2.1.1)式有

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

令 $t'=t-t_0$，于是 $t=t'+t_0$，$\mathrm{d}t=\mathrm{d}t'$，代入上式得

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')e^{-j\omega(t'+t_0)}\mathrm{d}t'$$
$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')e^{-j\omega t'}\mathrm{d}t'\right]e^{-j\omega t_0}$$

上式括号内的积分就是 $F(\omega)$，故得

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=F(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{2.1.5}$$

从上式表示的时间平移性质可以看出：第一，信号 $f(t)$ 沿时间轴的平移只改变它的频谱密度 $F(\omega)$ 的相位，并不改变其幅度；第二，相位的变化与频率有关：$\varphi(\omega)=\omega t_0$。可见信号 $f(t)$ 的不同频率成分所遭受的相移是与频率成线性关系的。

2.频移

如果信号的频谱密度曲线 $F(\omega)$ 沿频率轴被平移一个固定值

ω_0,成为 $F(\omega - \omega_0)$,那么会给信号带来什么变化呢?由傅里叶逆变换式(2.1.2)有

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

令 $\omega' = \omega - \omega_0$,则 $\omega = \omega' + \omega_0$,$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega'$,代入上式得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega')e^{j(\omega'+\omega_0)t}\mathrm{d}\omega' \\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega')e^{j\omega' t}\mathrm{d}\omega'\right]e^{j\omega_0 t}\end{aligned}$$

上式括号内的项就是 $f(t)$,所以

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)] = f(t)e^{j\omega_0 t} \tag{2.1.6}$$

从上式表示的频移性质可以看出,若将信号的频谱 $F(\omega)$ 沿频率轴正向平移 ω_0 时,则相当于将信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$。反之,若将信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$,则相当于将它的频谱向正方向平移 ω_0。频移性质对于分析调幅信号的频谱是很有用的。因为信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$ 相当于用这信号去调制角频率为 ω_0 的载波(正弦振荡)振幅。

3.双脉冲的频谱

双脉冲是由两个相隔时间为 t_0 的同样的脉冲构成的非周期信号。设其中一个脉冲波形为 $f_1(t)$,则另一个为 $f_2(t) = f_1(t - t_0)$,于是双脉冲信号可表示为

$$\begin{aligned}f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \\ &= f_1(t) + f_1(t - t_0)\end{aligned}$$

假定 $f_1(t)$ 的频谱密度已知为 $F_1(\omega)$,则可利用线性叠加性质和时间平移性质求出双脉冲的频谱密度:

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}[f_1(t)] + \mathscr{F}[f_1(t - t_0)] \\ &= F_1(\omega) + F_1(\omega)e^{-j\omega t_0} \\ &= F_1(\omega)(1 + e^{-j\omega t_0})\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

如果每个脉冲都是高度为 I，宽度为 τ 的矩形脉冲，则由(1.4.6)式得

$$F(\omega) = I\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}(1 + e^{-j\omega t_0}) \tag{2.1.8}$$

2.1.4 伸缩性质

设脉冲波形 $f(t)$ 的宽度为 τ，若将宽度压缩成 $\tau/5$，这相当于保持波形不变而将时间坐标尺度伸展 5 倍，这时的脉冲波形变成为 $f(5t)$。一般地，如果将脉冲宽度压缩到原来的 $1/b$ 倍，则压缩后的波形为 $f(bt)$。设 $f(bt)$ 的频谱密度是 $F_b(\omega)$，把(2.1.1)式中的 $f(t)$ 换为 $f(bt)$ 就得到

$$F_b(\omega) = \mathscr{F}[f(bt)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(bt)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

令 $x = bt$，则 $t = \frac{x}{b}$，$\mathrm{d}t = \frac{1}{b}\mathrm{d}x$，代入上式得

$$F_b(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{b}x}\frac{1}{b}\mathrm{d}x = \frac{1}{b}F(\frac{\omega}{b})$$

或写成

$$\mathscr{F}[f(bt)] = \frac{1}{b}F(\frac{\omega}{b}) \tag{2.1.9}$$

上式表示了傅里叶变换的坐标伸缩性质。对于傅里叶逆变换同样有

$$\mathscr{F}^{-1}[F(c\omega)] = \frac{1}{c}f(\frac{t}{c}) \tag{2.1.10}$$

其中 c 为大于零的常数。由(2.1.9)式可知，当时间坐标尺度伸展到 b 倍(亦即将脉冲宽度压缩到 $1/b$ 倍)，反映到频谱上的影响是：频率坐标尺度被压缩到 $1/b$(亦即频谱密度曲线沿频率轴伸展到 b 倍)，并且幅度也被压缩到 $1/b$ 倍。所以，不论什么脉冲信号，要想缩短它的时间宽度 τ，就必须展宽它的占有频带 $\Delta\omega$，它们成反比关系，即 $\tau \cdot \Delta\omega$ = 常数。这个性质本身在信息传输技术中具有重要意义。例如，为了提高通信速度，往往采用短脉冲，希望它的时间

宽度 τ 尽可能小，这就必须付出展宽频带的代价，从而带来如频带拥挤等一系列问题。

2.1.5 微分性质

1. 微分性质的表述

大多数非周期信号 $f(t)$ 的持续时间都是有限的，就是说

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0 \tag{2.1.11}$$

下面仅讨论满足上述条件的信号。[注] 我们来考虑，如果已知信号 $f(t)$ 的频谱密度 $F(\omega)$，那么由 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 构成的新信号的频谱是什么？由(2.1.1)式有

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

对上式进行分部积分得

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \left[f(t)e^{-j\omega t}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

由条件(2.1.11)式，当 $t = \pm\infty$ 时，$f(t) = 0$，于是上式右端第一项为零，而第二项中的积分就是 $F(\omega)$，所以

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = j\omega F(\omega) \tag{2.1.12}$$

可见信号 $f(t)$ 对时间 t 求导数后所得到的新信号的频谱密度就是原信号的频谱密度 $F(\omega)$ 乘以因子 $j\omega$。当把 $F(\omega)$ 对角频率 ω 求导数时，由(2.1.2)式类似可得：

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right] = -jtf(t) \tag{2.1.13}$$

(2.1.12)和(2.1.13)式可以推广到 n 阶导数的情况：

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega) \tag{2.1.14}$$

[注] 对于不满足条件(2.1.11)式的信号，经适当处理，微分性质仍是适用的。

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}] = (-jt)^n f(t) \qquad (2.1.15)$$

在求某些信号的频谱时,上述微分性质可使计算大为简化。

表 2.1　傅里叶变换的性质

频谱密度	$\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = F(\omega)$
时间函数	$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t)$
线性叠加性质	$\mathscr{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
时间平移性质	$\mathscr{F}[f(t \pm t_0)] = F(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$
频率平移性质	$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega \pm \omega_0)] = f(t)e^{\mp j\omega_0 t}$
伸缩性质	$\mathscr{F}[f(bt)] = \frac{1}{b}F(\frac{\omega}{b})$　　(b 为正实数)
反演性质	$\mathscr{F}[f(-t)] = F(-\omega)$
时间函数的微分性质	$\mathscr{F}[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}] = j\omega F(\omega)$
频谱密度的微分性质	$\mathscr{F}^{-1}[\frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega}] = -jtf(t)$
时间函数的积分性质	$\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t] = \frac{F(\omega)}{j\omega}$
频谱密度的积分性质	$\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega] = \frac{f(t)}{-jt}$
时间函数的乘积	$\mathscr{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\Omega) \cdot F_2(\omega - \Omega)\mathrm{d}\Omega$
频谱密度的乘积	$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$
伯塞瓦等式	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(t)\rvert^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert F(\omega)\rvert^2\mathrm{d}\omega$

傅里叶变换还有许多其他性质,其中较主要的在表 2.1 中给出。此外,在附录 Ⅱ 中给出了常用函数的傅里叶变换。

2.脉冲调制信号的频谱

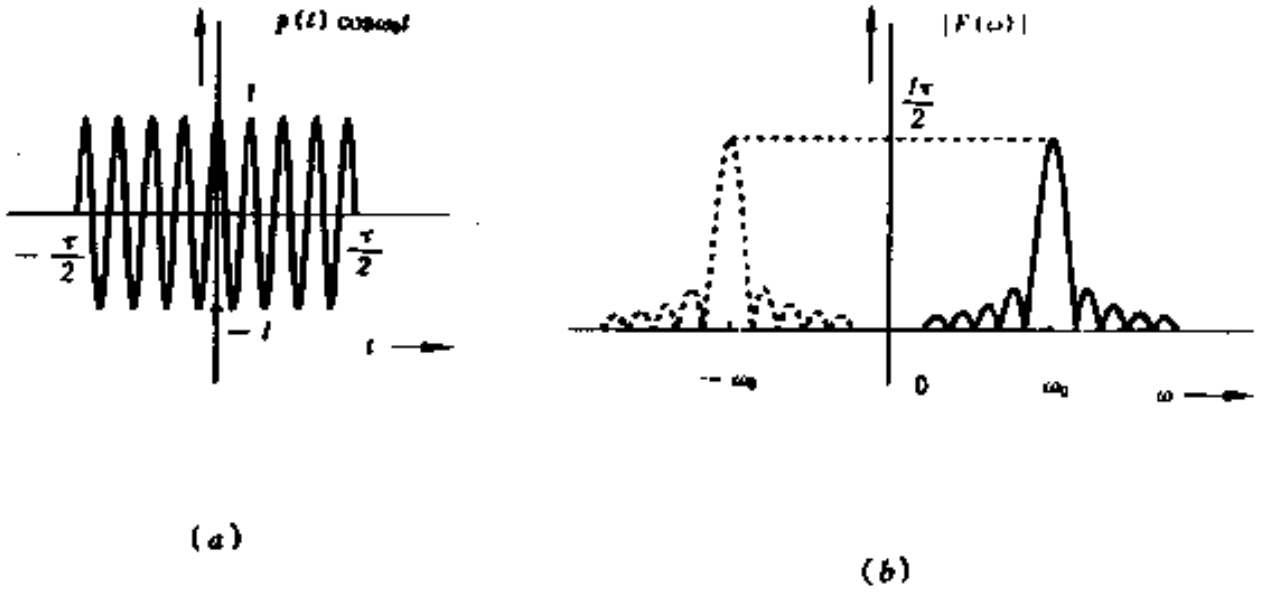
现求脉冲调制信号 $f(t) = p(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱。这是具有矩形脉冲包络线的余弦振荡(图 2.1.1a)。若由傅里叶变换公式(2.1.1)直接求频谱密度 $F(\omega)$ 是很麻烦的,但矩形脉冲 $p(t)$ 的频谱我们在前面已经求出,利用频移性质容易得到上述脉冲调制信号的频谱:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}[p(t)\cos\omega_0 t] \\ &= \mathscr{F}\left[p(t)\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}P(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}P(\omega+\omega_0) \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

上式中 $P(\omega)$ 表示矩形脉冲 $p(t)$ 的频谱密度,它的表示式见(1.4.6)式,故有

$$F(\omega) = \frac{\tau}{2}\left\{\frac{\sin[\frac{\tau}{2}(\omega-\omega_0)]}{\frac{\tau}{2}(\omega-\omega_0)} + \frac{\sin[\frac{\tau}{2}(\omega+\omega_0)]}{\frac{\tau}{2}(\omega+\omega_0)}\right\} \tag{2.1.17}$$

上式右端第一项表示将矩形脉冲的频谱密度曲线 $P(\omega)$ 向右平移 ω_0,第二项表示将 $P(\omega)$ 向左平移 ω_0,因而脉冲调制信号的频谱等于将包络线(脉冲)的频谱平分为二,各向左右移一载频 ω_0,其幅度谱如图 2.1.1 所示。其他调幅波的频谱也可用上述方法分析。(2.1.16)式有一定普遍意义。我们再强调一下,频谱图上出现的负频率并没有实际意义(画成虚线)。在许多实际问题中我们会遇到脉冲调制信号,例如在波长为 3cm 的雷达中(载波频率为 10^{10} 赫),如果脉冲重复频率为 1000 赫,脉冲持续时间是 1 微秒,那么每个脉冲包含的载波周期数为 $10^{10}\times 10^{-6} = 10^4$ 个。这时在 ω_0 附近 $|F(\omega)|$ 的主峰变得窄而高,很接近纯粹余弦波($\cos\omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$)的频谱(在 ω_0 处的一条谱线)。



(a)　　(b)

图 2.1.1　脉冲调制信号(a)及其频谱(b)

§2.2 δ 函数及其傅里叶变换

2.2.1 δ 函数

1.定性讨论

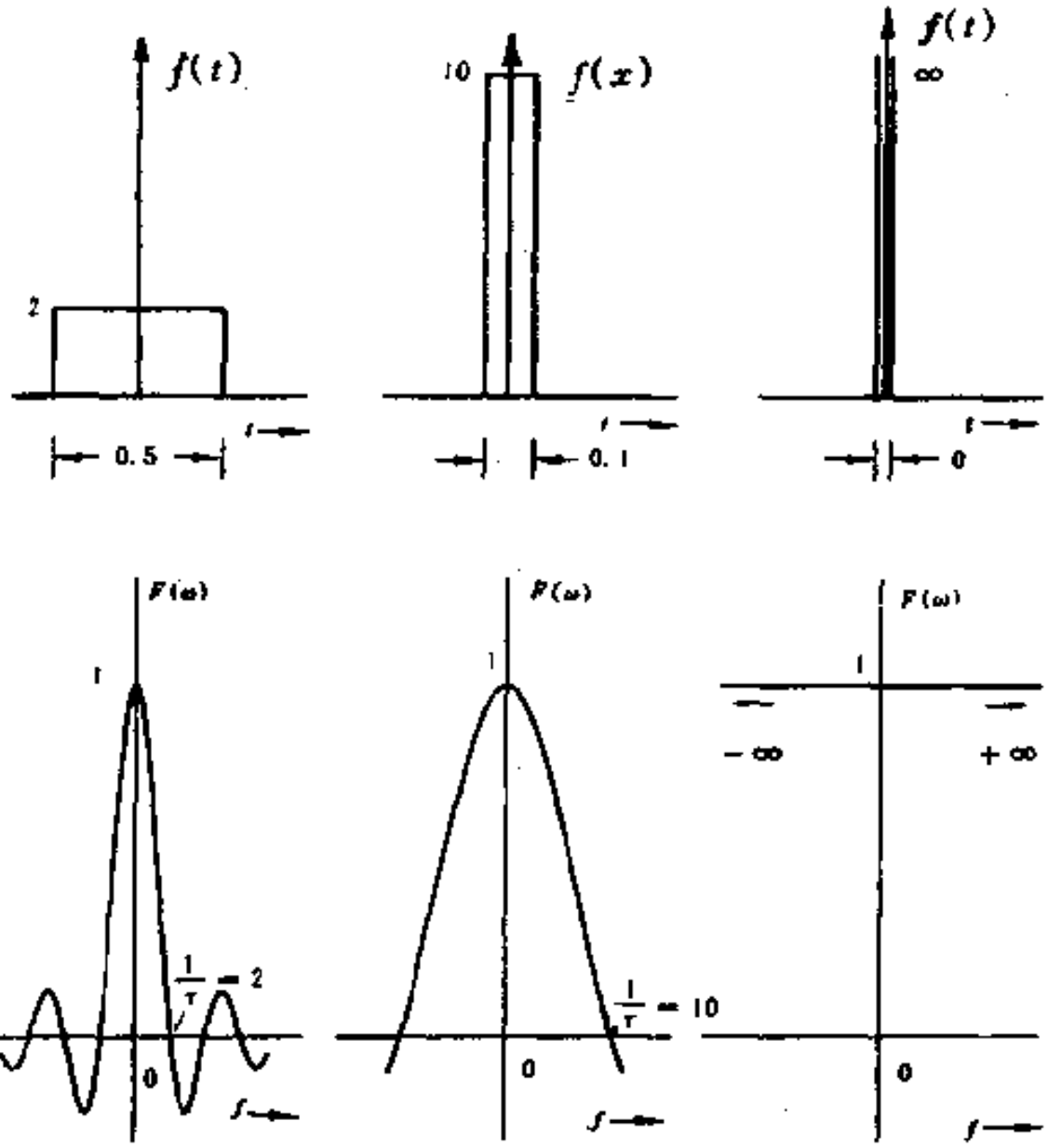
我们从 §1.4.3 讨论的单个矩形脉冲信号(图 1.4.3a)谈起。矩形脉冲的高度为 I,持续时间为 τ。我们用 $i(t)$ 表示这个矩形脉冲的波形,用 A 表示这个矩形脉冲的面积。于是有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(t)\mathrm{d}t = I\tau = A \tag{2.2.1}$$

如果我们把这矩形脉冲的持续时间 τ 减小 5 倍,同时将它的高度增加 5 倍,那么面积 $I\tau = (5I)\cdot(\tau/5) = A$ 保持不变。若继续减小持续时间 τ,同时增加高度 I,在极限情况下,即 $\tau \to 0$ 和 $I \to \infty$,所得到的波形称为冲激函数,它仍然保持着恒定的面积 A。如果令常数 $A = 1$,则上述极限情况下的波形称为单位冲激函数,或 δ 函

数。图 2.2.1 表示出单位冲激函数及其频谱的形成过程。其中频谱 $F(\omega)$ 是根据(1.4.6)式

$$F(\omega) = I\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \tag{2.2.2}$$



$(a)\tau = 0.5$　　$(b)\tau = 0.1$　　$(c)\tau = 0$

图 2.2.1　单位冲激函数及其频谱的形成过程

并令 $I\tau = A = 1$ 画出的。为清楚计，频率轴是以 $f = \omega/2\pi$ 标度的。我们从图中看到，随着矩形脉冲变窄，它的频谱变宽(成反比关

系)，在 $\tau \to 0$，$I \to \infty$（保持 $I\tau = 1$）的极限情况下，频谱成为与频率轴平行的直线，即对所有频率均有 $F(\omega) = 1$，这结果很容易由对(2.2.2)式求极限而得到：

$$F(\omega) = \lim_{\substack{\tau \to 0,\ I \to \infty \\ I\tau \to 1}} I\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

从上述简单讨论，我们可以初步了解 δ 函数的傅里叶变换为1，即

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = F(\omega) = 1 \tag{2.2.3}$$

2. δ 函数的定义

上面我们是把 δ 函数(单位冲激函数)作为单个矩形脉冲的极限情况来讨论的。其实，对于钟形脉冲、指数型脉冲、三角形脉冲……，当它们的持续时间无限减小，高度无限增加而保持波形包围的面积不变时，在极限情况下都可以得到 δ 函数。为了能够定量地研究 δ 函数，就需要从数学上给以严格的定义。δ 函数可以有各种不同的定义，我们采取下式作为 δ 函数的定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{2.2.4}$$

其中 $f(t)$ 是在 $t = t_0$ 点连续的任意函数。上式的意义是说，δ 函数的作用是指定函数 $f(t)$ 取 $t = t_0$ 的数值 $f(t_0)$，当 $t_0 = 0$(坐标原点)时，上式成为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0) \tag{2.2.5}$$

上式表明，$\delta(t)$ 的作用是指定函数 $f(t)$ 取坐标原点的数值 $f(0)$。如果 $f(t) = 1$，则(2.2.5)式成为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{2.2.6}$$

前面讨论的(2.2.1)式与上式是一致的，因为在 $\tau \to 0$，$I \to \infty$（$I\tau = A$）的极限情况下，若把 $i(t)$ 记为 $A\delta(t)$ 就得到(2.2.6)式。在前面的定性讨论中，我们可以直观地把 $\delta(t)$ 理解为以下形式的函

数：

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

δ 函数不符合普通函数的定义(普通函数 $y = f(x)$，给定一个 x 值，就有一个确定的 y 值与之对应)。通常我们并不去讨论某一点 t 的函数$\delta(t)$ 的数值。在 δ 函数的各种实际应用中，它总是以被积函数的形式出现。因此，采用(2.2.4) 或(2.2.5) 式来定义 δ 函数是较为合理的。

3. δ 函数在信息传输中的作用

为什么要定义 δ 函数?它有什么用处?我们仅介绍一下 δ 函数在信息传输领域中的应用。在其他科学领域中，δ 函数也有广泛的应用。

在前面的定性讨论中我们已经知道，δ 函数作为电信号(冲激脉冲)，它的频谱是平行于频率轴的无限长的直线。就是说，冲激脉冲包含着频率从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有频率分量，并且各频率分量均彼此相等。如果把这样一个信号输入到某线性电路中，就必然等效于把许多具有等振幅、等位相并覆盖所有可能频率的振荡器同时加在这个线性电路上。于是，输入一个冲激脉冲，我们就能够决定电路对所有频率的响应。因为在电路输出端(例如用频谱分析仪)测量到的任何振幅和相位变化必然是由电路系统本身所引起的，从而可以确定该电路的频率特性和相位特性。这是非常理想的事情。

不幸的是，δ 函数仅仅是从现实中抽象出来的理想化的数学模型，实际能够实现的脉冲信号不管其宽度 τ 多么小，也总还具有一定的数值($\tau > 0$)；脉冲高度 h 不管多么大，也总是具有有限的数值($h < \infty$)。因此，实际上我们能够得到的只是近似的冲激脉冲，其近似的程度是与被测电路的响应时间(带宽的倒数) 相比较而言的。如果一个窄脉冲的宽度 τ 远小于被测试电路的响应时间

$\tau_0, \tau \ll \tau_0$，即可以认为这窄脉冲接近于理想的冲激脉冲（δ 函数）。若电路的带宽为 1 兆赫的数量级，则将 0.1 微秒宽的脉冲加到电路输入端时，对该电路而言就可以认为近似于输入一个理想的 δ 函数脉冲。

δ 函数在信息传输领域中还有许多其他用途。如果已知一个电路对 δ 函数脉冲的响应特性，就可以通过数学计算求出该电路对各种不同输入信号的响应特性。采用 δ 函数还可以使很多线性电路的数学分析得到简化（下面将会看到）。此外，在研究信息传输中的功率和能量、噪声和干扰等问题时，δ 函数也起着重要作用。

2.2.2 δ 函数的傅里叶变换

前几节我们讨论的信号波形都是满足条件(1.3.5) 式的，这个条件对于信号波形的傅里叶变换是否存在来说，是充分的，但不必要。其实，只要信号波形满足下述的绝对可积条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | f(t) | \mathrm{d}t = \text{有限值} \tag{2.2.8}$$

则它的傅里叶变换

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \tag{2.2.9}$$

就一定存在（为有限值）。因为 $f(t)$ 为实函数：

$$| f(t) e^{-j\omega t} | = | f(t) |$$

(2.2.8) 式中的积分收敛，则积分式(2.2.9) 也必收敛，即 $f(t)$ 的傅里叶变换为有限值。δ 函数不满足条件(1.3.5)，[注] 但是 δ 函数

[注] 这从本节开始时对 δ 函数的定性讨论即可看出，δ 函数可看作是单个矩形脉冲当宽度 $\tau \to 0$，高度 $I \to \infty$（$I\tau = 1$）时的极限情况。单个矩形脉冲通过 1 欧姆电阻时所消耗的能量是 $I^2 R\tau = (\frac{1}{\tau})^2 \cdot 1 \cdot \tau = \frac{1}{\tau}$，当 $\tau \to 0$ 时，这能量将趋于 ∞，可以不满足条件(1.3.5) 式。

满足绝对可积条件(2.2.8) 式,因为由(2.2.6) 式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

所以 $\delta(t)$ 的傅里叶变换是存在的:

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

这个积分是(2.2.5) 式的特殊情况,在(2.2.5) 式中令 $f(t) = e^{-j\omega t}$ 就得到上式,因此

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = e^{j\omega t} = 1 \qquad (2.2.10)$$

这与前面定性讨论的结果是一致的。图 2.2.2 表示 δ 函数及其频谱。一般地,函数 $A\delta(t)$ 的几何图形是用一个带箭头的窄矩形脉冲表示,窄矩形的面积(阴影部分) 为 A。在图2.2.2b 中,$\omega < 0$ 的部分用虚线表示,因为实际上不存在负频率。

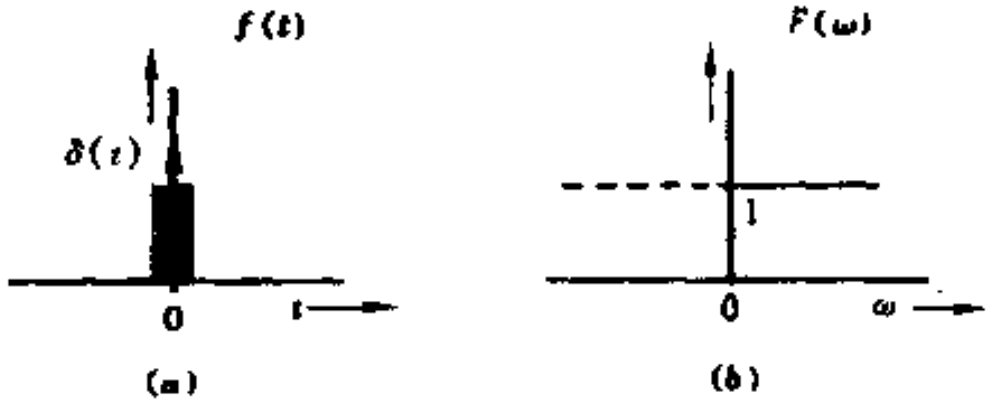


图 2.2.2 δ 函数(a) 及其频谱(b)

根据时间平移性质(2.1.5) 式,可得 $\delta(t - t_0)$ 的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \qquad (2.2.11)$$

它的频谱密度 $|F(\omega)| = 1$,但具有线性相位 $\varphi(\omega) = \omega t_0$。

我们来考虑(2.2.10) 式的傅里叶逆变换:

$$\delta(t) = \mathscr{F}^{-1}[1]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1 \cdot e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\ \omega t + j\ \sin\ \omega t)\mathrm{d}\omega$$

利用正弦和余弦函数的奇偶性，上式可化为

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\ \omega t\ \mathrm{d}\omega \tag{2.2.12}$$

一般地，可写成

$$\delta(y) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\ xy\ \mathrm{d}x \tag{2.2.13}$$

注意上述积分在普通函数积分理论中是没有任何意义的(没有确定值)，然而在广义函数理论中它是有意义的。这里我们仅做一点粗浅的说明。积分是求和的极限情况，(2.2.12) 式中的积分可看作是频率由 0 到 $+\infty$ 的一系列等幅余弦振荡之和。当 $t = 0$ 时，对于不同频率总有 $\cos\ \omega t = 1$，于是

$$\int_{0}^{+\infty}\cos(0\cdot\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\omega = \infty$$

这说明在时间轴上 $t = 0$ 点无限个等幅(幅度为 1) 余弦振荡叠加的结果，在这点出现无限大的振幅。在时间轴上 $t \neq 0$ 的诸点，无限个不同频率的等幅余弦振荡叠加的结果将互相抵消，即

$$\int_{0}^{+\infty}\cos\ \omega t\mathrm{d}\omega = 0,\ t \neq 0$$

总起来看，(2.2.12) 式右端的积分为

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\ \omega t\ \mathrm{d}\omega = \begin{cases}0, & t \neq 0\\ \infty, & t = 0\end{cases}$$

这正是 δ 函数的特征。当对(2.2.12) 式的积分做上述解释时，则它可以当作是 δ 函数的积分表示式。

2.2.3 与 δ 函数有关的某些信号的频谱

1. 直流信号

直流信号是在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的全部时间内为常数的时间函数(图 2.2.3a)：

$$f_1(t) = \text{常数}, \quad -\infty < t < +\infty$$

直流信号可看作是零频率的正弦信号。我们很容易想到，它的频谱图上除了 $\omega = 0$ 处外都应为零。现在我们利用傅里叶变换来求出它的频谱密度。为简单计，设 $f_1(t) = 1$，于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[1] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\ &= 1\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\omega t - j\sin\omega t)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{0}^{+\infty}\cos\omega t\ \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

利用(2.2.13)式，令其中 $x = t, y = \omega$，得到

$$\delta(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\omega t\ \mathrm{d}t \tag{2.2.15}$$

比较(2.2.14)和(2.2.15)式，可知

$$\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \tag{2.2.16}$$

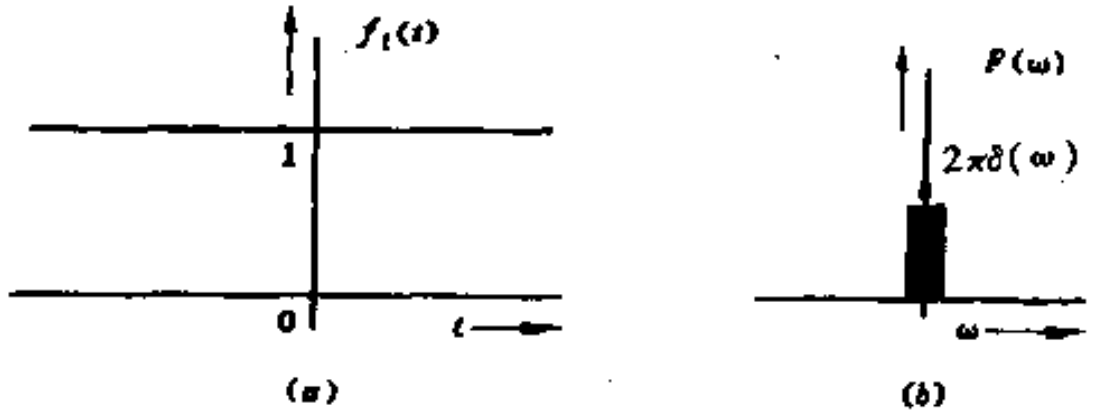


图 2.2.3　直流信号(a)及其频谱(b)

因此，直流信号具有“冲激脉冲”式的频谱密度分布(图 2.2.3b)，在 $\omega = 0$ 处有一个无限大的高峰，而在任何其他频率上频谱密度均为零。这与我们预想的结果一致。由(2.2.16)式，根据傅里叶变换的频移性质(1.4.5)式可得：

$$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{2.2.17}$$

2. 奇对称阶跃信号

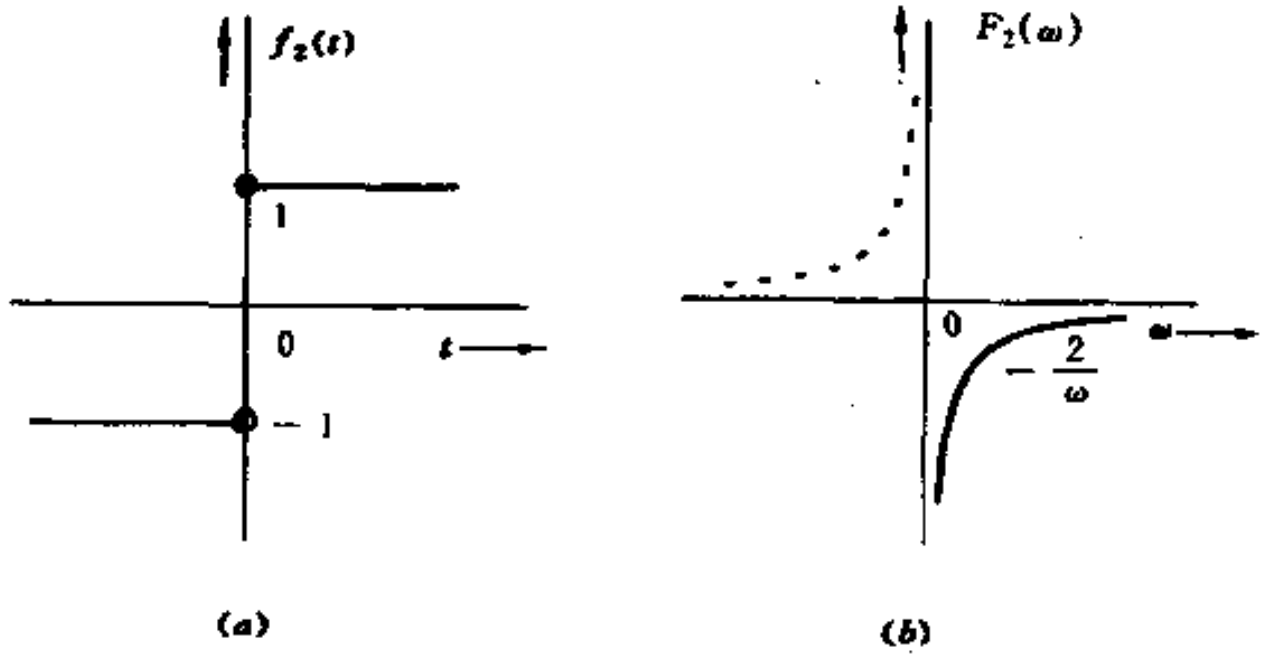
奇对称阶跃信号(图 2.2.4a) 可表示为

$$f_2(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

可以证明,它的傅里叶变换(图 2.2.4b) 为

$$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]=\frac{2}{j\omega} \tag{2.2.18}$$

这只要证明 $2/j\omega$ 的傅里叶逆变换是奇对称阶跃函数即可。由(2.1.2) 式有



(a) (b)

图 2.2.4 奇对称阶跃信号(a) 及其频谱(b)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[F_2(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{j\omega}e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{j\omega}(\cos\omega t + j\sin\omega t)\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

利用积分公式:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$$

得到

$$\mathscr{F}^{-1}[F_2(\omega)] = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

这就是奇对称阶跃函数,可见傅里叶变换式(2.2.18)是正确的。

3.单位阶跃信号

单位阶跃信号:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

可以看作是直流信号与奇对称阶跃信号的叠加(图 2.2.5a):

$$u(t) = \frac{1}{2}[f_1(t) + f_2(t)]$$

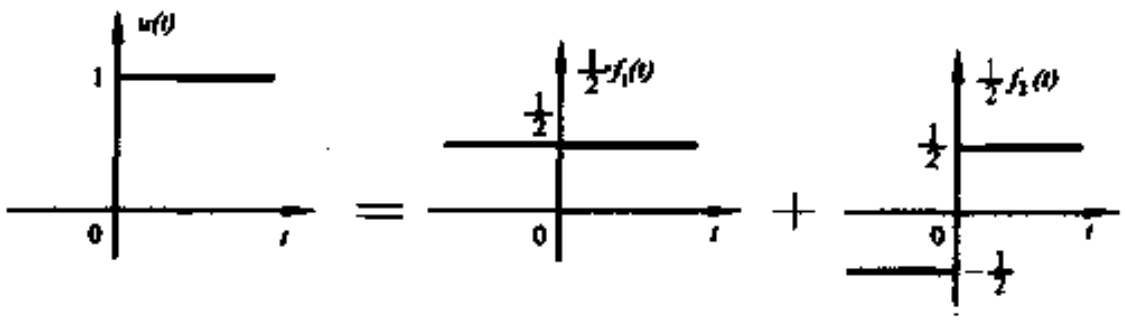


图 2.2.5a　单位阶跃信号 = 直流信号 + 奇对称阶跃信号

根据傅里叶变换的线性叠加性质,利用(2.2.16)和(2.2.18)式的结果,可以求出单位阶跃信号的傅里叶变换:

$$\mathscr{F}[u(t)] = \mathscr{F}\left[\frac{1}{2}f_1(t) + \frac{1}{2}f_2(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathscr{F}[1] + \mathscr{F}[f_2(t)]\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega}\right\}$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{2.2.20}$$

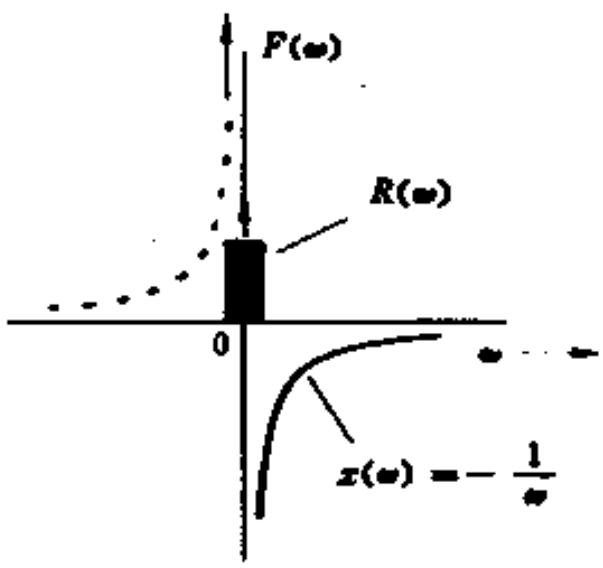


图 2.2.5*b*　单位阶跃信号的频谱

上式的实部是 $R(\omega) = \pi\delta(\omega)$，虚部是 $x(\omega) = -\frac{1}{\omega}$。由此画出的频谱如图(2.2.5*b*)所示。我们知道，单位阶跃信号 $u(t)$ 可以简单地理解为由 $t = 0$ 时刻起接通直流电源。由图 2.2.5*b* 看出，$u(t)$ 频谱包含 $\omega \neq 0$ 的高频分量，这可以解释在我们听收音机时若附近接通(或断开)电源，收音机为什么会相应地发出一个响声。

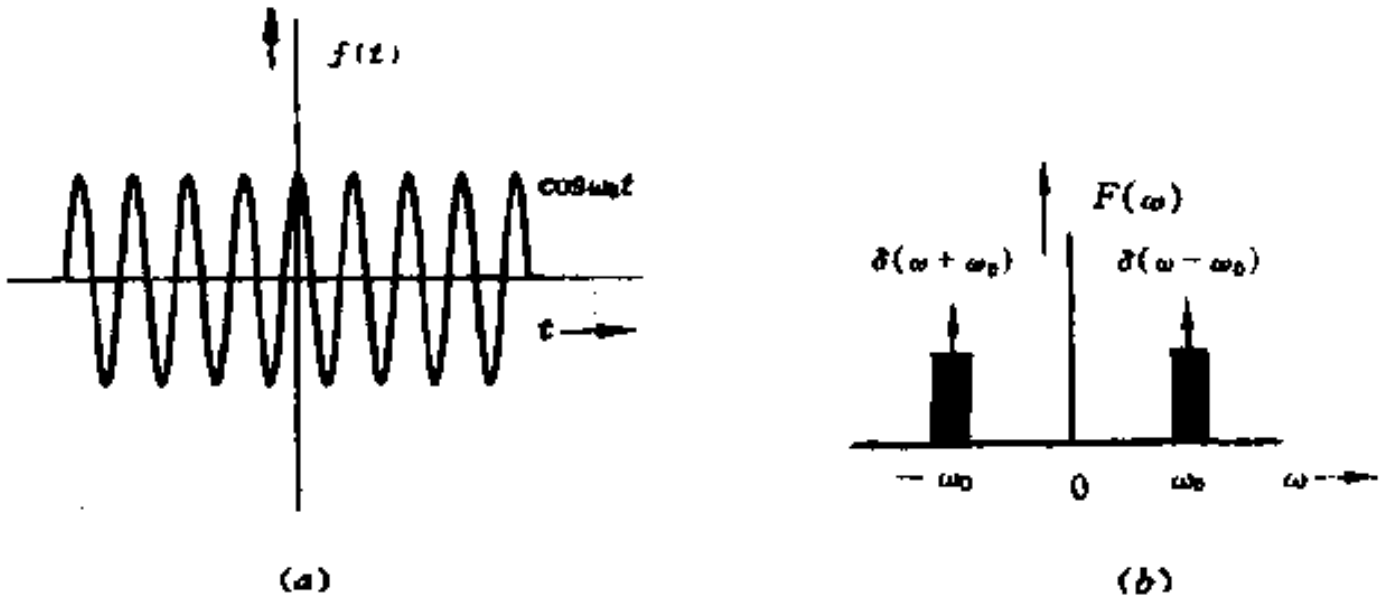


图 2.2.6　周期余弦信号(*a*)及其频谱(*b*)

4.周期性余弦信号

周期性余弦信号(图 2.2.6*a*)

$$f(t) = \cos \omega_0 t, \quad -\infty < t < +\infty$$

显然只具有单一频率(ω_0)分量,它的傅里叶变换为:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\cos \omega_0 t] &= \mathscr{F}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right] \\ &= \frac{1}{2}\{\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] + \mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}]\} \\ &= \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (2.2.21)\end{aligned}$$

推导上式时,利用了(2.2.17)式的结果,其频谱如图(2.2.6*b*)所示。

5.接通余弦信号

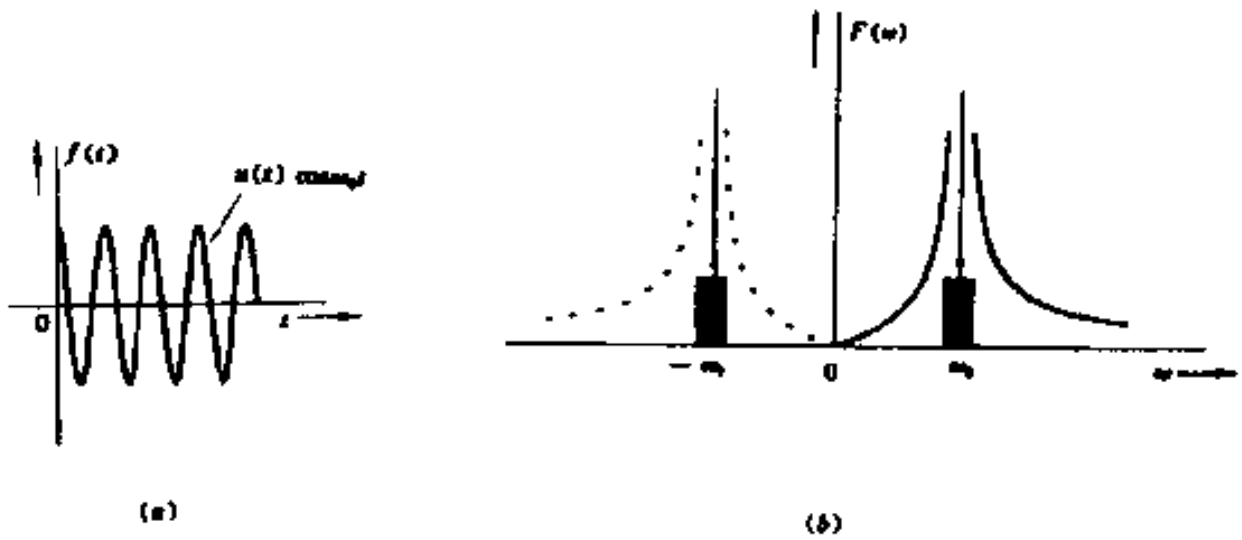
在 $t = 0$ 时刻接通交流电源,这信号可表示成被单位阶跃信号 $u(t)$ 调制的余弦信号(图 2.2.7*a*):

$$f(t) = u(t)\cos \omega_0 t$$

它的傅里叶变换利用频移性质(2.1.6)式容易求出:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)] &= \mathscr{F}[u(t)\cos \omega_0 t] \\ &= \mathscr{F}\left[u(t)\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)}\right] + \left[\pi\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{j(\omega + \omega_0)}\right]\right\} \\ &= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.2.22)\end{aligned}$$

推导上式时利用了(2.2.20)式的结果,其频谱如图 2.2.7*b* 所示。



(a)　　(b)

2.2.7　接通余弦信号(a)及其频谱(b)

2.2.4　任意周期函数的傅里叶变换

在 §1.1 我们讨论了任意周期函数可以展开为傅里叶级数。本节我们又看到最简单的周期信号 —— 余弦信号的傅里叶变换可由 δ 函数表示[见(2.2.21)式]。我们会想,任意的周期函数的傅里叶变换如何表示呢?由(1.3.6)式知道,任意周期函数可展开成下述傅里叶级数:

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\dot{D}_m e^{j\frac{2\pi m}{T}t} \tag{2.2.23}$$

由(2.2.17)式可知

$$\mathscr{F}\left[e^{j\frac{2\pi m}{T}t}\right]=2\pi\delta\left(\omega-m\frac{2\pi}{T}\right) \tag{2.2.24}$$

因此,傅里叶级数(2.2.23)的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)]&=\mathscr{F}\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\dot{D}_m e^{j\frac{2\pi m}{T}t}\right]\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\dot{D}_m\mathscr{F}\left[e^{j\frac{2\pi m}{T}t}\right]\\&=2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\dot{D}_m\delta\left(\omega-m\frac{2\pi}{T}\right)\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

可见,任意周期信号的傅里叶变换是频域中的一系列等距离

(距离为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$) 的冲激脉冲($\delta$ 函数),在每一个谐波频率上具有无限大的频谱密度,但是在每一个谐波频率上冲激脉冲的面积(或称为 δ 函数的强度) 却为有限值 $2\pi D_m$。

我们再来看时域中的周期性冲激脉冲系列:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \delta(t - mT) \tag{2.2.26}$$

它的频谱应该是频域中的傅里叶级数:

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{-jm\omega T} \tag{2.2.27}$$

利用(2.2.11) 式很容易由(2.2.26) 式得到(2.2.27) 式。注意,(2.2.25) 式和(2.2.27) 式的导出并不是严格的证明。

在这里,我们把傅里叶级数看作是傅里叶积分的一种特殊情况。在 §1.3 我们曾把非周期函数的傅里叶积分作为周期函数的傅里叶级数的特殊情况(当周期 $T\to\infty$ 时) 来处理,前后对照,我们可以进一步看到周期信号的傅里叶级数和非周期信号的傅里叶积分之间的区别和联系。

§2.3 电路应用

电信号不是孤立存在的,它总是与一定的电路相联系,从而完成信息传输等任务。我们把信号 $f_1(t)$ 输入到某电路中,就会在输出端得到信号 $g_1(t)$,把另一信号 $f_2(t)$ 输入到该电路中,就会得到输出信号 $g_2(t)$。如果我们把信号

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \tag{2.3.1}$$

输入到该电路中,得到的输出信号是

$$g(t) = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \tag{2.3.2}$$

我们就称这种电路是线性电路。(2.3.1) 和(2.3.2) 式说明,当几

个信号同时输入线性电路时，其输出信号是各输入信号单独输入时所产生的输出信号之和。本节在讨论傅里叶级数和傅里叶变换的电路应用时，仅限于讨论信号通过线性电路的情况。

2.3.1 周期信号通过线性电路

线性电路有一个重要性质，就是如果输入信号是正弦波：

$$f(t) = \sin \omega t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

则输出信号也是正弦波

$$g(t) = A\sin(\omega t + \psi) \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{2.3.3}$$

输出信号的振幅 A 和位相 ψ 可以与输入信号 $f(t)$ 的振幅和位相不同，但波形完全相似，这个性质称为线性电路的稳态响应。一般地说，振幅 A 和位相 ψ 的大小是与输入正弦波的频率有关的，即 $A = A(\omega)$ 和 $\psi = \psi(\omega)$。一个线性电路的稳态响应特性可以用以下两个函数表示：

$$\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{\text{输出信号振幅}}{\text{输入信号振幅}} \\ \psi(\omega) = \text{输出信号位相} - \text{输入信号位相} \end{cases} \tag{2.3.4}$$

我们强调，$A(\omega)$ 和 $\psi(\omega)$ 表示的是线性电路本身的特性。例如对于熟知的 RC 电路(图 2.3.1) 有

$$\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} \\ \psi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}(\omega RC) \end{cases} \tag{2.3.5}$$

如果输入信号是一个复杂的周期信号，由(1.1.3) 式它可展为傅里叶级数：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos(m\omega t - \varphi_m) \tag{2.3.6}$$

根据线性叠加原理(2.3.1) 和(2.3.2) 式，输出信号的傅里叶级数可表示为：

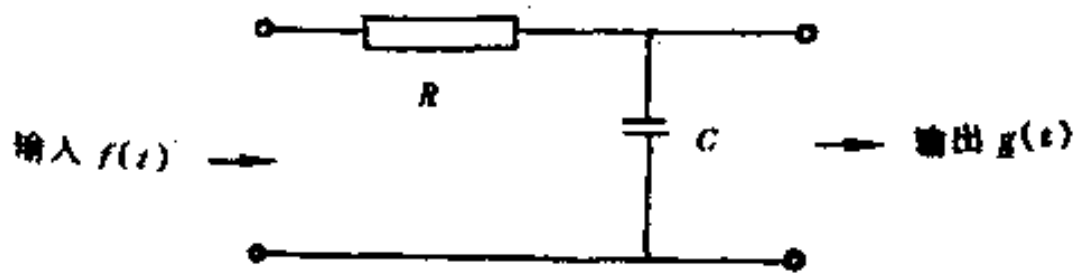


图 2.3.1　*RC* 电路

$$g(t) = A(0)\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A(m\omega) D_m \cos[m\omega t - \varphi_m + \psi(m\omega)] \tag{2.3.7}$$

当已知一个线性电路的稳态响应特性 $A(\omega)$ 和 $\psi(\omega)$ 时，根据 (2.3.7) 式原则上就可求出任意周期信号 $f(t)$ 通过该线性电路后的输出波形 $g(t)$。

2.3.2　周期性方波通过 *RC* 电路

若图 2.3.1 所示的 *RC* 电路的时间常数为 $RC = 500$ 微秒，现在求 (1.2.2) 式所示的周期性方波通过该电路后的输出信号 $g(t)$。设方波的重复频率为 159.2 赫（相应的基波角频率为 $\omega = 10^3$）。

根据 (2.3.5) 式，对于基波 ($\omega = 10^3$) 有

$$A(10^3) = \frac{1}{\sqrt{(10^3 \times 500 \times 10^{-6})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1.25}} = 0.895$$

$$\psi(10^3) = \mathrm{tg}^{-1}(10^3 \times 500 \times 10^{-6}) = -\mathrm{tg}^{-1}(0.5) = -0.464$$

对于 3 次谐波有：$A(3 \times 10^3) = 0.556$, $\psi(3 \times 10^3) = -0.983$；

对于 5 次谐波有 $A(5 \times 10^3) = 0.370$, $\psi(5 \times 10^3) = -1.190$。

对于更高次谐波亦可类似地计算出 $A(m\omega)$ 和 $\psi(m\omega)$，所

以，按照(2.3.7)式，输入信号(见(1.2.2)式表示的周期性方波)为

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\{\sin(10^3 t) + 0.333\sin(3\times 10^3 t) + 0.200\sin(5\times 10^3 t) + \cdots\}$$

通过图 2.3.1 所示的 RC 电路后的输出信号为

$$g(t) = \frac{4}{\pi}\{0.895\sin(10^3 t - 0.464) + 0.185\sin(3\times 10^3 t - 0.983) + 0.074\sin(5\times 10^3 t - 1.190) + \cdots\} \tag{2.3.8}$$

输出信号的波形如图 2.3.2 中实线所示。

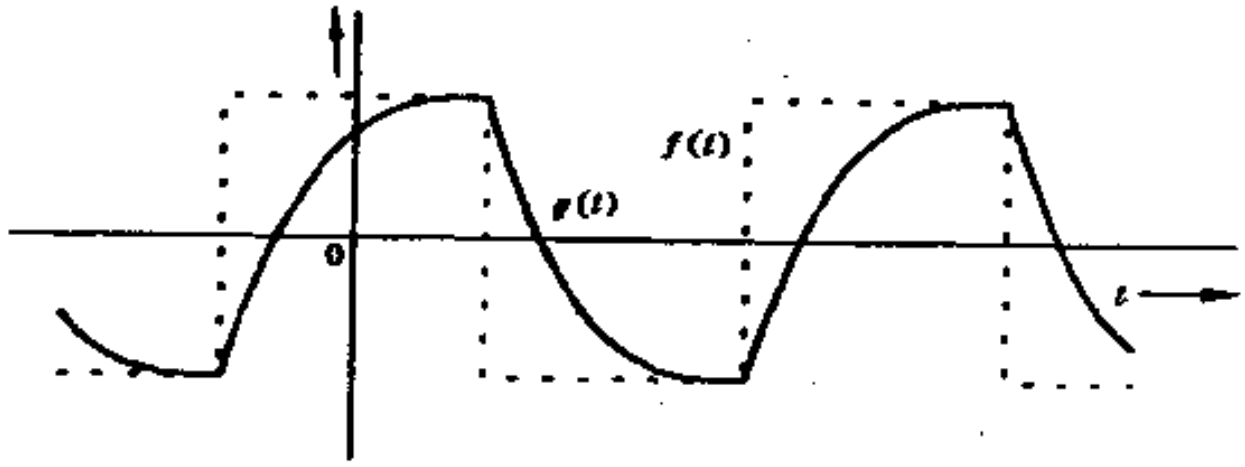


图 2.3.2　周期性方波通过 RC 电路的输出信号

2.3.3　非周期信号通过线性电路

为了讨论非周期信号通过线性电路的情况，我们首先来介绍线性电路的传输函数 $H(\omega)$。利用复数傅里叶系数可以把输入的正弦信号表示成：

$$f(t) = D\cos(\omega t - \varphi) = \dot{D}_{\omega}e^{j\omega t} + \dot{D}_{-\omega}e^{-j\omega t}$$

其中

$$\dot{D}_\omega = \frac{D}{2}e^{-j\varphi}, \dot{D}_{-\omega} = \frac{D}{2}e^{j\varphi}$$

输出信号可以利用(2.3.4)式给出的 $A(\omega)$ 和 $\psi(\omega)$ 表示为：

$$\begin{aligned} g(t) &= \dot{D}A(\omega)\cos[\omega t - \varphi + \psi(\omega)] \\ &= \dot{D}'_\omega e^{j\omega t} + \dot{D}'_{-\omega} e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

其中

$$\dot{D}'_\omega = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}\dot{D}_\omega, \quad \dot{D}'_{-\omega} = A(\omega)e^{-j\psi(\omega)}\dot{D}_{-\omega} \tag{2.3.9}$$

注意，$A(\omega)$ 和 $\psi(\omega)$ 只是对正频率($+\omega$)才有实际意义。如果我们规定

$$A(-\omega) = A(\omega), \qquad \psi(-\omega) = -\psi(\omega)$$

那么(2.3.9)式中的两个式子就可以统一地写成

$$\dot{D}'_m = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}\dot{D}_\omega$$

或者

$$\dot{D}'_\omega = H(\omega)\dot{D}_\omega \tag{2.3.10}$$

其中

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\psi(\omega)} \tag{2.3.11}$$

称为线性电路的传输函数。$H(\omega)$ 把 $A(\omega)$ 和 $\psi(\omega)$ 结合在一起，它表示了线性电路对输入信号的振幅和位相的影响。我们再次强调，$H(\omega)$ 仅取决于线性电路本身的特性，并不随输入信号的改变而改变。(2.3.10)式实际上表示输入信号的傅里叶系数与输出信号的傅里叶系数之间的关系。

如果输入信号是任意的周期信号，则它的复数傅里叶级数[参见(1.1.20)式]为

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \dot{D}_m e^{jm\omega t}$$

由上面的讨论可知，输出信号应为

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \dot{D}_m H(m\omega) e^{jm\omega t} \tag{2.3.12}$$

我们回想第3节导出傅里叶变换公式的过程，当周期信号过渡到非周期信号时，输入信号 $f(t)$ 的复数傅里叶系数 $\dot{D}_m$ 就转化为函数 $F(\omega)$；同样，输出信号的复数傅里叶系数 $\dot{D}_m$ 就转化为函数 $G(\omega)$，并有

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega) \tag{2.3.13}$$

上式是与(2.3.10)式相对应的。在输出端，与周期信号(2.3.12)式相对应的非周期信号则成为

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{2.3.14}$$

原则上讲，若已知输入信号(非周期性)的傅里叶变换 $F(\omega)$ 和线性电路的传输函数 $H(\omega)$，就可以根据(2.3.14)式求出输出信号 $g(t)$。实际的线性电路有时是很复杂的，它的传输函数 $H(\omega)$ 具有复杂的形式，利用(2.3.14)式对 ω 作积分计算十分困难。有时线性电路的传输函数 $H(\omega)$ 的解析形式无法知道，这时就不能利用(2.3.14)式的傅里叶变换方法，有时可采用下章将要讨论的拉普拉斯变换法。

2.3.4 理想的低通滤波器

理想的低通滤波器具有这样的滤波特性，当频率低于某一截止频率 ω_c 时，幅度特性为常数(取为1)；当频率高于 ω_c 时，幅度特性等于零。滤波器的位相与频率成比例。这些特性可表示为(参见图2.3.5)

$$\begin{cases} H(\omega) = A(\omega)e^{j\psi(\omega)} \\ A(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \\ \psi(\omega) = -t_0\omega \end{cases} \tag{2.3.15}$$

在(2.3.15)式中，t_0 是由理想滤波器决定的一个常数，具有时间的量纲，当图(1.4.3a)所示的单个矩形脉冲通过这样的滤波器

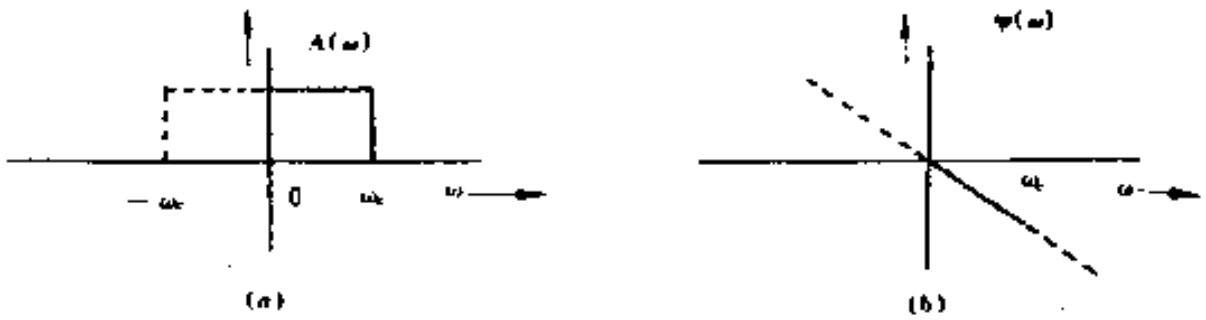


图 2.3.3　理想低通滤波器的幅度特性(a)和位相特性(b)

时,我们来确定输出信号波形。

单个矩形脉冲 $f(t)$ 的傅里叶变换由(1.4.6)式的取样函数表示:

$$F(\omega) = I\tau \frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} = I\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \tag{2.3.16}$$

由(2.3.13)式和(2.3.15)式可知,输出信号的傅里叶变换为

$$G(\omega) = \begin{cases} I\tau e^{-j\omega t_0} Sa(\frac{\omega\tau}{2}), & |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

利用(2.3.14)式求出 $G(\omega)$ 的傅里叶逆变换就可得到输出信号的时间函数:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{I\tau}{2\pi}\int_{\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} Sa(\frac{\omega\tau}{2}) d\omega$$

若从 $t = t_0$ 开始计算时间,则上式可写为:

$$g(t') = \frac{I\tau}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega t'} Sa(\frac{\omega\tau}{2}) d\omega$$

利用 $e^{j\omega t'} = \cos\omega t' - j\sin\omega t'$,并注意到 $Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 是偶函数,则上述积分的虚部为零,于是有

$$g(t') = \frac{I\tau}{\pi}\int_0^{\omega_c} \frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\omega t'}{\frac{\omega\tau}{2}}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{I}{\pi}\left[\int_0^{\omega_c} \frac{\sin\omega(t'+\frac{\tau}{2})}{\omega}\mathrm{d}\omega - \int_0^{\omega_c} \frac{\sin\omega(t'-\frac{\tau}{2})}{\omega}\mathrm{d}\omega\right]$$

$$= \frac{I}{\pi}\left[\int_0^{\omega_c(t'+\frac{\tau}{2})} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \int_0^{\omega_c(t'-\frac{\tau}{2})} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right]$$

上式最后一步我们做了代换：

$$u = \omega(t'+\frac{\tau}{2}) \text{ 和 } v = \omega(t'-\frac{\tau}{2})$$

但是形如

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

的积分不能直接积出来，必须首先将$\frac{\sin x}{x}$展为x的幂级数然后逐项积分。不过这积分是有表可查的，这一积分称为 x 的正弦积分，记为

$$\mathrm{Si}(x) \equiv \int_0^x \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \tag{2.3.17}$$

于是 $g(t')$ 可表示为

$$g(t') = \frac{I}{\pi}\left\{\mathrm{Si}[\omega_c(t'+\frac{\tau}{2})] - \mathrm{Si}[\omega_c(t'-\frac{\tau}{2})]\right\}$$

换回原来的时间起点，上式成为

$$g(t) = \frac{I}{\pi}\left\{\mathrm{Si}[\omega_c(t-t_0+\frac{\tau}{2})] - \mathrm{Si}[\omega_c(t-t_0-\frac{\tau}{2})]\right\} \tag{2.3.18}$$

利用正弦积分表，根据(2.3.18)式可以算出不同截止频率时理想低通滤波器对单个矩形脉冲的响应特性，图 2.3.4 画出了五种不同截止频率时(τ 固定)的输出脉冲波形。我们看到，理想低通滤波

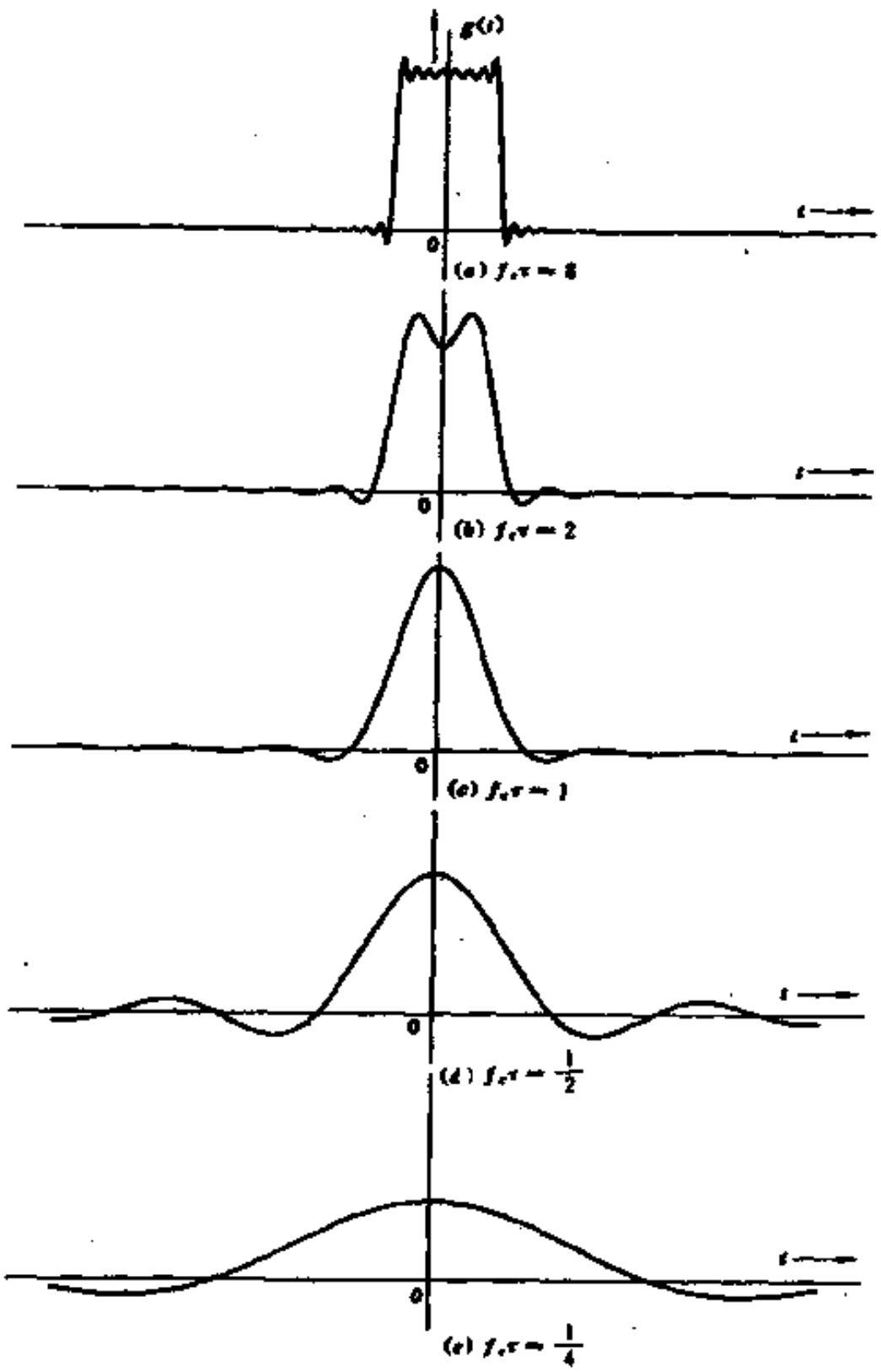


图 2.3.4　理想低通滤波器对矩形脉冲(延迟时间为 τ) 的响应
(τ 固定,改变截止频率 f_c)

器的截止频率 $f_c(f_c = \frac{\omega_c}{2\pi})$ 越高,输出波形越接近于矩形波,当

$f_c \gg \frac{1}{\tau}$($\frac{1}{\tau}$ 是矩形脉冲的占有频带)时,输出波形几乎就是矩形波。当 $f_c \ll \frac{1}{\tau}$ 时,输出波形与矩形波相差很大,波形变得平坦。在许多实际应用中(例如搜索雷达系统)并不要求接收的脉冲信号精确保持原来形状,只要能够鉴别出有脉冲来到就可以了,这时至少取 $f_c \approx \frac{1}{2\tau}$ 即可。例如对于 1 微秒的脉冲,要求接收机的带宽至少为 0.5 兆赫左右。在另外一些应用场合,例如在追踪雷达中,或者在罗兰导航系统中,要求精确地决定各个脉冲到达的时间,这就要求输出脉冲的前沿必须非常陡,这时系统的带宽至少应做得比 $\frac{1}{\tau}$ 大几倍。

2.3.5 不失真问题

任何信息的传输,不论是电话、电视、无线电通信,一个基本问题是要求不失真地传输信号,所谓信号不失真是指输出信号与输入信号相比,只是大小和出现时间不同,而没有波形上的变化(图 2.3.5)。

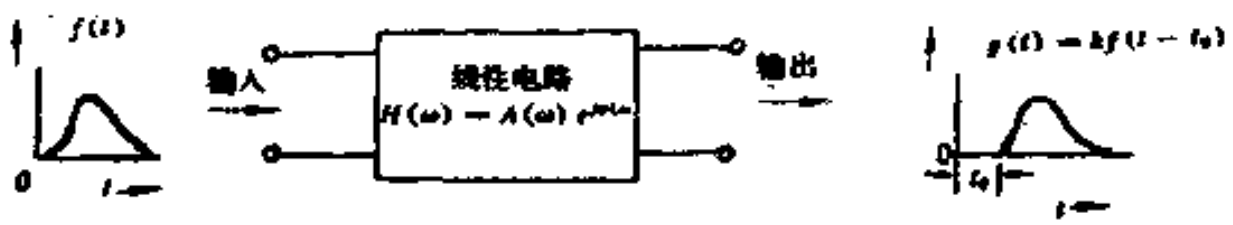


图 2.3.5 不失真传输信号

设输入信号为 $f(t)$,输出信号为 $g(t)$,信号不失真的条件就是

$$g(t) = Kf(t - t_0) \tag{2.3.19}$$

其中 K 为常数,t_0 是滞后时间。从频率响应来看,为了使信号不失真,应该对电路的传输函数 $H(\omega)$ 提出什么样的条件呢?

设 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{2.3.20}$$

设 $G(\omega)$ 是输出信号 $g(t)$ 的傅里叶变换：

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{2.3.21}$$

将(2.3.19) 式代入(2.3.21) 式得到

$$\begin{aligned} G(\omega) &= K\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\ &= K\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega(t_0+x)}\mathrm{d}x \qquad (\text{令 } x = t - t_0) \\ &= Ke^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}\mathrm{d}x \\ &= Ke^{-j\omega t_0}F(\omega) \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

上面推导最后一步利用了(2.3.20) 式。根据(2.3.13) 式和(2.3.22) 式，有：

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} \tag{2.3.23}$$

上式说明，如果要求信号通过线性电路时不产生任何失真，在信号的全部通频带内电路的频率响应必须具有恒定的幅度特性和线性的位相特性。

第三章　电子工程中的拉普拉斯变换方法(Ⅰ)

§3.1　初步讨论

3.1.1　什么是 $\mathscr{L}$ 变换

1.数学表示

设 $f(t)$ 是变量 t 的函数(一般为时间函数),如果积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \equiv F(s)$$

存在,则我们称 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换或 $\mathscr{L}$ 变换,[①] 记为

$$F(s) \equiv \mathscr{L}[f(t)] \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \qquad (3.1.1)$$

其中,s 为复变数,$F(s)$ 一般为复变函数,符号 $\mathscr{L}$ 表示对 $f(t)$ 求拉普拉斯变换,即将 $f(t)$ 乘以因子 e^{-st} 后再从零到 ∞ 对变量 t 积分。

2.某些简单函数的 $\mathscr{L}$ 变换

为了熟悉 $\mathscr{L}$ 变换中的积分,我们先举例计算一些简单函数的 $\mathscr{L}$ 变换。

例 3.1　求单位阶跃函数 $u(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。

---

① (3.1.1)式称为单边 $\mathscr{L}$ 变换(积分限为 $0\rightarrow\infty$),后面还将介绍双边 $\mathscr{L}$ 变换(积分限为 $-\infty\rightarrow+\infty$),前者用得较多。

解：$\mathscr{L}[u(t)] = \int_0^\infty 1e^{-st}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s}$

$$\therefore \mathscr{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \tag{3.1.2}$$

例 3.2　求 $f(t) = e^{at}$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。

解：$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t$

$$= \left[\frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\right]_{t=0}^\infty$$

在 $\mathrm{Re}\, s > a$ 的条件下得

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad (\mathrm{Re}\, s > a) \tag{3.1.3}$$

例 3.3　求 $f(t) = t$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。

解：$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\mathrm{d}t$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore \mathscr{L}[t] = \frac{1}{s^2} \tag{3.1.4}$$

例 3.4　求 $f(t) = t^2$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。

解：$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty t^2e^{-st}\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty \frac{2t}{s}e^{-st}\mathrm{d}t$

$$= \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

$$\therefore \mathscr{L}[t^2] = \frac{2}{s^3} \tag{3.1.5}$$

例 3.5　求 $f(t) = \sin\omega_0 t$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。

解：$\mathscr{L}[\sin\omega_0 t] = \int_o^\infty \sin\omega_0 te^{-st}\mathrm{d}t$

$$= \left[-\frac{\sin\omega_0 t}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^\infty + \frac{\omega_0}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\left[\frac{e^{-st}\sin\omega_0 t}{s}\right]_{t=0}^{\infty} - \frac{\omega_0}{s^2}\left[e^{-st}\cos\omega_0 t\right]_{t=0}^{\infty}$$
$$- \frac{\omega_0^2}{s^2}\mathscr{L}\left[\sin\omega_0 t\right]$$

将上式整理后可得

$$\left(1 + \frac{\omega_0^2}{s^2}\right)\mathscr{L}\left[\sin\omega_0 t\right]$$
$$= -\left[\frac{e^{-st}(s\sin\omega_0 t + \omega_0\cos\omega_0 t}{s^2}\right]_{t=0}^{\infty}$$
$$\therefore \mathscr{L}\left[\sin\omega_0 t\right] = \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2}\cdot\frac{\omega_0}{s^2} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \qquad (3.1.6)$$

3.1.2 线性叠加性质

1. 性质的表述

设 a、b 为常数，由(3.1.1)式有

$$\mathscr{L}\left[af(t) \pm bg(t)\right] = \int_0^{\infty}\left[af(t) \pm bg(t)\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$= a\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \pm b\int_0^{\infty} g(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$\therefore \mathscr{L}\left[af(t) \pm bg(t)\right] = a\mathscr{L}\left[f(t)\right] \pm b\mathscr{L}\left[g(t)\right] \qquad (3.1.7)$$

上式表示了 $\mathscr{L}$ 变换的线性叠加性质，这是一个简单而有用的性质。

2. 另一些函数的 $\mathscr{L}$ 变换

利用线性叠加性质(3.1.7)式，已知一些简单函数的 $\mathscr{L}$ 变换，可以求出另一些函数的 $\mathscr{L}$ 变换。下面是几个简单例子。

例 3.6 求 $f(t) = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。

解：根据(3.1.7)式，并利用(3.1.3)式的结果有

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{2}e^{at}-\frac{1}{2}e^{-at}\right]=\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{at}\right]-\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-at}\right]$$

$$=\frac{1}{2(s-a)}-\frac{1}{2(s+a)}=\frac{a}{s^2-a^2}$$

但$\frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})=\mathrm{sh}at$ 为双曲正弦函数,故有

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{sh}at\right]=\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] \tag{3.1.8}$$

例 3.7 求 $f(t)=\cos\omega_0 t$ 的 $\mathscr{L}$变换。

解:可以像例 3.5 那样用分部积分法来求。也可以利用线性叠加性质和(3.1.3) 式的结果来求:

$$\mathscr{L}\left[\cos\omega_0 t\right]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e_0^{j\omega t}\right]+\frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega_0}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega_0}=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\therefore\mathscr{L}\left[\cos\omega_0 t\right]=\frac{s}{s^2+\omega_0^2} \tag{3.1.9}$$

例 3.8 求指数衰减正弦波 $f(t)=e^{-at}\sin\omega_0 t$ 的 $\mathscr{L}$变换。

解: $f(t)=e^{-at}\sin\omega_0 t=e^{-at}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]$

$$=\frac{1}{2j}\left[e^{-(a-j\omega_0)t}-e^{-(a+j\omega_0)t}\right]$$

于是有

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{2j}\left\{\mathscr{L}\left[e^{-(a-j\omega_0)t}\right]-\mathscr{L}\left[e^{-(a-j\omega_0)t}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s+a-j\omega_0}-\frac{1}{s+a+j\omega_0}\right\}$$

$$=\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

$$\therefore\mathscr{L}\left[e^{-at}\sin\omega_0 t\right]=\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{3.1.10}$$

类似地可求出

$$\mathscr{L}\left[e^{-at}\cos\omega_0 t\right]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{3.1.11}$$

例 3.9　求 $f(t)=\sin(\omega_0 t\pm\varphi)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。

解:

$$\mathscr{L}\left[\sin(\omega_0 t+\varphi)\right]=\mathscr{L}\left[\sin\omega_0 t\cos\varphi\right]\pm\mathscr{L}\left[\cos\omega_0 t\ \sin\varphi\right]$$

$$=\frac{\omega_0\cos\varphi}{s^2+\omega_0^2}\pm\frac{s\sin\varphi}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\therefore\mathscr{L}\left[\sin(\omega_0 t\pm\varphi)\right]=\frac{\omega_0\cos\varphi\pm s\sin\varphi}{s^2+\omega_0^2} \tag{3.1.12}$$

类似地可求出

$$\mathscr{L}\left[\cos(\omega_0 t\pm\varphi)\right]=\frac{s\cos\varphi\mp\omega_0\sin\varphi}{s^2+\omega_0^2} \tag{3.1.13}$$

3. 常用函数的 $\mathscr{L}$ 变换表

现将以上各例中求出的常用函数的 $\mathscr{L}$ 变换式列成表格，如表 3.1 所示。这个表中也包含了一些其他常用函数的 $\mathscr{L}$ 变换式。较复杂函数的 $\mathscr{L}$ 变换式见附录 Ⅲ。应该指出，单边 $\mathscr{L}$ 变换(3.1.1)式要求 $f(t)$ 仅取 $t>0$ 的数值。此外，(3.1.1)式中的 $\mathscr{L}$ 积分的收敛性还要求对表 3.1 中各“变换对”加上一些限制条件，这些，我们将在后面再讨论。表 3.1 中的时间函数 $f(t)$ 常称为“原函数”，$F(s)\equiv\mathscr{L}\left[f(t)\right]$ 常称为“像函数”，原函数与相应的像函数构成一个“变换对”。

3.1.3　微分和积分的 $\mathscr{L}$ 变换

我们已经初步了解什么是 $\mathscr{L}$ 变换，在介绍 $\mathscr{L}$ 变换在信息传输中的应用以前，必须先弄清微分和积分的 $\mathscr{L}$ 变换问题，因为在研究电路中的电感和电容对信号的作用时，就要遇到微分和积分以及对它们作 $\mathscr{L}$ 变换的问题。

表 3.1　常用函数的 $\mathscr{L}$ 变换表

变换对	原函数 $f(t), t>0$	像函数 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$
1	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$Au(t)$	$\frac{A}{s}$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	$e^{j\omega_0 t}$	$\frac{1}{s-j\omega_0}$
6	$e^{-j\omega_0 t}$	$\frac{1}{s+j\omega_0}$
7	$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
8	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\mathrm{ch}at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
10	$\mathrm{sh}at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
11	$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
12	$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
13	$\sin(\omega_0 t \pm \varphi)$	$\frac{\omega_0\cos\varphi \pm s\sin\varphi}{s^2+\omega_0^2}$
14	$\cos(\omega_0 t \pm \varphi)$	$\frac{s\cos\varphi \mp \omega_0\sin\varphi}{s^2+\omega_0^2}$

续表

变换对	原函数 $f(t)$, $t>0$	像函数 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$
15	te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
16	$t\sin\omega_0 t$	$\dfrac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
17	$t\cos\omega_0 t$	$\dfrac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
18	t	$\dfrac{1}{s^2}$
19	t^n, $n\geqslant 0$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
20	$\delta(t)$	1

1. 微分的 $\mathscr{L}$ 变换

如果已知 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换是 $F(s)$，那么，$f'(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)]$ 的 $\mathscr{L}$ 变换是什么呢？我们从(3.1.1)式所规定的 $\mathscr{L}$ 变换出发来讨论这个问题。对(3.1.1)式中的积分作分部积分得到①

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{s}f(t)e^{-st}\right]_{t=0}^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s}f(0)+\frac{1}{s}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t$$

将 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 和 $\mathscr{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\int_0^\infty\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t$ 代入上式，整理后可得

① 在公式 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 中令 $u=f(t)$ 和 $\mathrm{d}v=e^{-st}\mathrm{d}t$ 即可。此外，我们假定推导中出现的积分都是收敛的，$f(t)$ 在 $t=0$ 点是连续的，$f(0)$ 表示 $f(t)$ 在 $t=0$ 点的函数值，$f(t)$ 在 $t=0$ 点不连续的情况以后将讨论。最后，还要求 $f(t)$ 保证 $\lim\limits_{t\to\infty}[f(t)e^{-st}]=0$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f(0) \tag{3.1.14a}$$

若初始值 $f(0) = 0$，则上式成为

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) \tag{3.1.14b}$$

(3.1.14) 式表示了 $\mathscr{L}$ 变换的微分性质，它告诉我们，$f(t)$ 的像函数与 $f(t)$ 导数的像函数之间是简单的代数关系。

对于 $f(t)$ 的高阶导数的 $\mathscr{L}$ 变换也可类似地求出，例如，对于二阶导数有(利用(3.1.14a) 式)：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f''(t)] &= s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0)\\ &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0)\\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

对于任意的 n 阶导数则有[①]

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) -\\ s^{n-3}f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

例 3.10 若 $f(t) = e^{-at}$，求 $f'(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。

解：由表 3.1 中第 4 个变换对可知

$$F(s) = \mathscr{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

由(3.1.14a) 式有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-at})\right] = sF(s) - f(0) = \frac{s}{s+a} - 1$$

例 3.11 试利用微分性质由 $\sin\omega_0 t$ 的像函数求 $\cos\omega_0 t$ 的像函数。

解：余弦函数可表示为正弦函数的导数：

---

① 像推导(3.1.14) 式时一样，(3.1.15) 和(3.1.16) 式亦要求 $f(t)$ 保证下式成立：

$$\lim_{t\to\infty}[f^{(k)}(t)e^{-st}] = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\omega_0 t$$

由表 3.1 第 8 个变换对可知

$F(s) = \mathscr{L}[\sin\omega_0 t] = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$，注意 $f(0) = \sin 0 = 0$，利用(3.1.14a)式有

$$\mathscr{L}[\cos\omega_0 t] = \frac{1}{\omega_0}\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\omega_0 t\right]$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\left[s\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} - 0\right] = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

这与例 3.7 的结果(3.1.9)式一致。

例 3.12　仅利用二阶导数的 $\mathscr{L}$ 变换公式(3.1.15)求 $\mathscr{L}(\sin\omega_0 t)$。

解：$f(t) = \sin\omega_0 t$，　$f(0) = 0$，

$f'(t) = \omega_0\cos\omega_0 t$，　$f'(0) = \omega_0$，

$f''(t) = -\omega_0^2\sin\omega_0 t$，　$f''(0) = 0$，

由(3.1.15)式有

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathscr{L}[-\omega_0^2\sin\omega_0 t] = s^2\mathscr{L}[\sin\omega_0 t] - s\cdot 0 - \omega_0$$

或 $-\omega_0^2\mathscr{L}[\sin\omega_0 t] = s^2\mathscr{L}[\sin\omega_0 t] - \omega_0$

$$\therefore \mathscr{L}[\sin\omega_0 t] = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

这与例 3.5 中的结果(3.1.6)式一致。

2. 积分的 $\mathscr{L}$ 变换

如果已知 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换是 $F(s)$，现在来考虑 $\int f(t)\mathrm{d}t$ 的 $\mathscr{L}$ 变换是什么？为简便计，用负幂表示 $f(t)$ 的不定积分：

$$f^{-1}(t) \equiv \int f(t)\mathrm{d}t \equiv \int_0^t f(t)\mathrm{d}t + \left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]_{t=0}$$

函数 $f^{-1}(t)$ 是自变量 t 的一个新函数，对它求一次导数就得到

$f(t)$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f^{-1}(t)] = f(t)$$

对上式两端作 $\mathscr{L}$ 变换，利用微分性质(3.1.14a) 式可得

$$s\mathscr{L}[f^{-1}(t)] - f^{-1}(0) = F(s)$$

整理后得到　　$$\mathscr{L}[f^{-1}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} \qquad (3.1.17a)$$

上式中 $f^{-1}(0)$ 表示 $f(t)$ 的积分在 $t = 0$ 点的值：①

$$f^{-1}(0) = \left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]_{t=0}$$

若初始条件为零，即 $f^{-1}(0) = 0$，则有

$$\mathscr{L}[f^{-1}(t)] = \frac{F(s)}{s}$$

或　$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad (3.1.17b)$$

(3.1.17) 式表示了 $\mathscr{L}$ 变换的积分性质，它告诉我们，$f(t)$ 的像函数与 $f(t)$ 积分的像函数之间也是简单的代数关系，类似于(3.1.14) 式而有所不同。比较(3.1.14b) 和(3.1.17b) 式，我们看到，$f(t)$ 导数的像函数就是 $f(t)$ 的像函数乘以 s，而 $f(t)$ 积分的像函数则是 $f(t)$ 的像函数除以 s。

例 3.13　设 $f(t)$ 满足以下方程

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 3f(t) + 2\int f(t)\mathrm{d}t = u(t)$$

初始条件为 $f(0) = 2, f^{-1}(0) = 0$，求 $f(t)$ 的像函数 $F(s)$。

解：对上面的方程两端作 $\mathscr{L}$ 变换得

$$[sF(s) - f(0)] + 3F(s) + 2\left[\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

将初始条件代入上面的方程得

---

① 在电路问题中，$f^{-1}(0)$ 往往对应于电容器储存的初始电荷。

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

例 3.14　在图 3.1.1 的电路中，电容器上储存的初始电荷为 $q(0)$，求开关闭合后放电电流 $i(t)$ 的像函数。

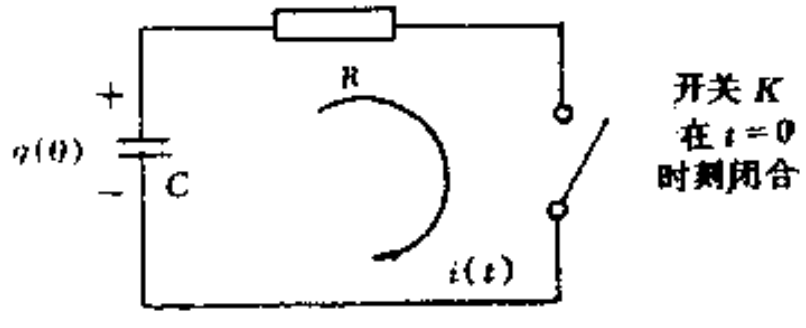


图 3.1.1　电容放电

解：我们知道，这个简单电路中的电容放电过程可用以下方程描写：

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t = \frac{q(0)}{C}$$

设 $i(t)$ 的像函数为 $I(s)$，对方程两端作 $\mathscr{L}$ 变换得（利用 (3.1.17b) 式和表 3.1 中第 2 变换对）：

$$RI(s) = \frac{I(s)}{Cs} = \frac{q(0)}{Cs}$$

因为开关 K 在 $t = 0$ 时刻闭合，故方程右端的常数项 $q(0)/C$ 可当作阶跃函数 $q(0)u(t)/C$ 来处理，从而得到如上的 $\mathscr{L}$ 变换结果。将上面的方程整理后即得放电电流的像函数：

$$I(s) = \frac{q(0)}{Cs[R + (1/Cs)]}$$

如何由这像函数求得放电电流 $i(t)$，下面即将讨论。

3.1.4　$\mathscr{L}^{-1}$ 变换

现在我们提出相反的问题，就是知道了像函数 $F(s)$，如何求出相应的原函数 $f(t)$。在例 3.14 中，要想求出放电电流随时间变化的函数关系 $i(t)$，就必须设法由像函数 $I(s)$ 找出对应的原函数

$i(t)$。这一步骤称为拉普拉斯变换的反演，或称逆 $\mathscr{L}$ 变换，并规定用符号 $\mathscr{L}^{-1}$ 表示逆 $\mathscr{L}$ 变换。求逆 $\mathscr{L}$ 变换的一般方法将在第四章讨论。这里我们仅指出，在函数形式较为简单的情况下，利用表 3.1 给出的“变换对”就行了。例如，由表 3.1 中第 4 变换对知

$$\mathscr{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

所以我们可以写出

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$$

一般地，如果 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$。当我们这样做的时候，假定了原函数与像函数是一一对应的(唯一性)。前面介绍的 $\mathscr{L}$ 变换的一些性质对于 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换也是成立的，例如，线性叠加性质(3.1.7) 式，对于 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换就成为：

$$\mathscr{L}^{-1}[aF(s) \pm bG(s)] = af(t) \pm bg(t) \qquad (3.1.18)$$

其中 $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$，$G(s) = \mathscr{L}[g(t)]$，对于微分性质(3.1.14) 式和积分性质(3.1.17) 式也可以直接写出逆 $\mathscr{L}$ 变换的公式。

最后，我们强调一下，由于 $\mathscr{L}$ 变换

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = F(s)$$

只与 t 从零到 ∞ 的 $f(t)$ 的值有关，与 $t<0$ 时 $f(t)$ 的值完全无关，所以根据 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换所求得的时间函数 $f(t)$ 亦仅取 $t \geqslant 0$ 时的值，这一点是不能忘记的。

例 3.15 试由例 3.14 中求出的像函数 $I(s)$，进一步求出放电电流 $i(t)$。

解：在例 3.14 中已经求出

$$I(s) = \frac{q(0)}{Cs[R + 1/Cs]} = \frac{q(0)}{RC} \cdot \frac{1}{s + 1/RC}$$

对上式作逆 $\mathscr{L}$ 变换得

$$\mathscr{L}^{-1}[I(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{q(0)}{RC} \cdot \frac{1}{s+1/RC}\right] = \frac{q(0)}{RC}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1/RC}\right]$$

根据表 3.1 中第 4 变换对有(令$\frac{1}{RC}=a$)

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=\frac{q(0)}{RC}e^{\frac{t}{RC}}=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

其中 $V_0=q(0)/C$ 是电容器的初始电压。上式是我们熟知的结果。

例 3.16 已知像函数 $F(s)=\frac{2s+4}{s^2+1}$,求原函数 $f(t)$。

解: $F(s)=\frac{2s+4}{s^2+1}=\frac{2s}{s^2+1}+\frac{4}{s^2+1}$

由表 3.1 中的第 7 和第 8 变换对有(令 $\omega_0=1$)

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+4\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$
$$=2\cos t+4\sin t$$

例 3.17 已知 $F(s)=\frac{1}{s(s+a)}$,求 $f(t)$。

解: $F(s)=\frac{1}{s(s+a)}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+a}=\frac{1}{s}G(s)$

其中 $G(s)=\frac{1}{s+a}$, $G(s)$的原函数 $g(t)=e^{-at}$(根据表3.1中的第4变换对),再由积分性质(3.1.17b)式可知(取逆 $\mathscr{L}$变换):

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]$$
$$=\int_0^t g(t)\mathrm{d}t=\int_0^t e^{-at}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$$
$$\therefore\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)}\right]=\frac{1}{a}(1-e^{-at}) \qquad (3.1.19)$$

例 3.18 解以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+bf(t)=e^{at},\quad t>0$$

初始条件为 $f(0)=c$

解: 对方程逐项取 $\mathscr{L}$变换得

$$[sF(s) - f(0)] + bF(s) = \frac{1}{s+a}$$

代入初始条件，整理后得：

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} + \frac{c}{s+b}$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s+b} - \frac{1}{s+a}\right) + \frac{c}{s+b}$$

对上式逐项取 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换，得原微分方程的解：

$$f(t) = \frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at}) + ce^{-bt}, \quad t > 0$$

3.1.5 小结

在这一节里，对于什么是 $\mathscr{L}$ 变换及其反演，对于 $\mathscr{L}$ 变换的三个重要性质——线性叠加性质、微分性质和积分性质，作了初步讨论，在结束本节的时候，我们指出以下几点。

1. $\mathscr{L}$ 变换是积分变换的一种

读者会问，在作 $\mathscr{L}$ 变换时，为什么非得将原函数 $f(t)$ 乘以因子 e^{-st} 再从零到 ∞ 对 t 积分？乘以其他因子不行吗？积分上、下限改为其他值不行吗？我们说是可以，$\mathscr{L}$ 变换只是积分变换的一种，确实还有其他种类的积分变换。像我们以前学过的傅里叶正弦和余弦变换，傅里叶复变换，就都属于积分变换。此外还有梅林变换：

$$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t)\mathrm{d}t$$

希尔伯特变换：

$$F(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{s-t}\mathrm{d}t$$

汉克尔变换：

$$F(s) = \int_0^\infty tJ_n(st) f(t)\mathrm{d}t$$

其中 $J_n(st)$ 为贝塞尔函数等等。对于某些变换，积分上、下限也可

以取有限值(称为有限积分变换)。每一种变换适用的场合有不同,以 $\mathscr{L}$ 变换应用最广泛,特别是在信息与信号传输领域中,所以下面仅讨论 $\mathscr{L}$ 变换。

2. $\mathscr{L}$ 变换的作用

在信号传输和电路分析中,会遇到许多线性微分方程或微分积分方程。电路越复杂,方程的数目和阶数越高,直接求解这些方程(经典法)是极其困难、甚至是不可能的。但是,在本节我们看到,$\mathscr{L}$ 变换可以把时域[①] 中的"微分"和"积分"分别转化为 s 域中的"乘法"和"除法",这从(3.1.14b)式和(3.1.17b)式可以清楚看到。这样,原来求解时域中微分方程遇到的微分和积分就被转化成 s 域中代数方程的乘与除,而后者是很容易解决的。我们是怎样绕过时域中的困难来解决问题的呢?关键在于我们事先把 $\mathscr{L}$ 变换中的可能出现的各种积分结果求出来,制成像表 3.1 那样的"变换对"表格,不论是 $\mathscr{L}$ 变换还是 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换,需要时一查表就行了,于是剩下的只是求解 s 域中代数方程的问题了。

$\mathscr{L}$ 变换的这种作用有点像算术中的取对数。当两个复杂的大数目字相乘时,例如 $M \times N$,我们可以先取对数,成为 $\lg M + \lg N$,完成加法运算后,再取反对数就得到 $M \times N$ 的结果。所以对数变换可以把数的乘除法转化为加减法。$\mathscr{L}$ 变换处理的对象不是简单的数,而是函数或微分方程,取 $\mathscr{L}$ 变换是把求解的问题由时域转移到 s 域,以简化运算,得到 s 域的运算结果以后,再取 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换,回到时域的解答。

3. 初始条件哪里去了?

以前我们学习解常微分方程时,知道要先求出方程的通解和特解,最后利用初始条件确定积分常数。可是在这一节里,利用 $\mathscr{L}$

---

① 以后我们经常把原函数 $f(t)$ 中自变量 t 的变化领域简称为 t 域或时域,把像函数 $F(s)$ 中自变量 s 变化的领域简称为 s 域或复频域。

变换求解微分方程时，没有出现由初始条件定常数的问题，这是怎么回事呢?原来，在微分和积分的 $\mathscr{L}$ 变换式中已经包括关于原函数 $f(t)$ 的初始条件，如 $f(0)$、$f'(0)$、$f^{-1}(0)$ 等。所以，时域中的微分方程变换到 s 域中的代数方程后已自动包含了全部初始条件于方程内，不必另行考虑了。这也是 $\mathscr{L}$ 变换方法的一个优点。

4. 用 $\mathscr{L}$ 变换解微分方程的一般步骤

从本节的例 3.13、例 3.14、例 3.15 和例 3.18，我们可以归纳出用 $\mathscr{L}$ 变换解微分方程的一般步骤如下：

第一步，仔细分析给定的具体电路，列出描述该电路工作过程的微分方程或微分积分方程以及初始条件；

第二步，确定待求的时间函数及其像函数；

第三步，对原方程逐项作 $\mathscr{L}$ 变换，得到 s 域中的代数方程；

第四步，求解 s 域中的代数方程，得到待求时间函数的像函数；

第五步，对求得的像函数作 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换，得到待求时间函数。

在下一节的某些应用例子中，我们可以进一步看到如何运用上述一般步骤解决具体的电路问题。由于 $\mathscr{L}$ 变换在信息与信号传输中应用得十分广泛和深入，以致许多电路问题直接在 s 域讨论，某些电路概念直接在 s 域规定，如阻抗函数 $Z(s)$，传输函数 $H(s)$，以及零极图方法、根轨迹方法、某些稳定性判据等，这些将在后面的章节中进行讨论。

5. 应该深思的一些问题

通过本节的讨论，我们对 $\mathscr{L}$ 变换方法已经有了初步认识，我们已经可以运用这种方法去解决一些简单的电路问题(见下节)。但是我们的认识是肤浅的，有待于进一步深化。读者在学完本节以后，可能产生一系列问题，例如：

1. 在(3.1.1) 式中规定的 $\mathscr{L}$ 变换中的积分是不是有不收敛的情况?要想保证 $\mathscr{L}$ 积分收敛，应该对原函数 $f(t)$ 有什么限制条件?

2.若 $t=0$ 点是 $f(t)$ 的间断点则该怎么办?如左极限 $f(0^-)$ 与右极限 $f(0^+)$ 不同或 $f(0)$ 无定义时应如何考虑作 $\mathscr{L}$ 变换?

3.如果随时间变化的信号函数 $f(t)$ 不限于 $t\geqslant 0$ 的范围应如何作 $\mathscr{L}$ 变换(t 可以从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$)?

4.如果像函数 $F(s)$ 的形式比较特殊或比较复杂,直接查 $\mathscr{L}$ 变换表找不到它的原函数则该怎么办?求 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换的普遍方法是什么?

5.$\mathscr{L}$ 变换与我们学过的傅里叶复变换有类似的积分形式,它们的关系是什么?

6.像函数 $F(s)$ 为什么是复变函数?它是不是解析函数?这些值得深思的问题,我们也将在后面章节给以适当讨论(参见 §4.1 和 §5.2)。

§3.2 简单应用

3.2.1 一阶和二阶电路的瞬态分析

1.引述

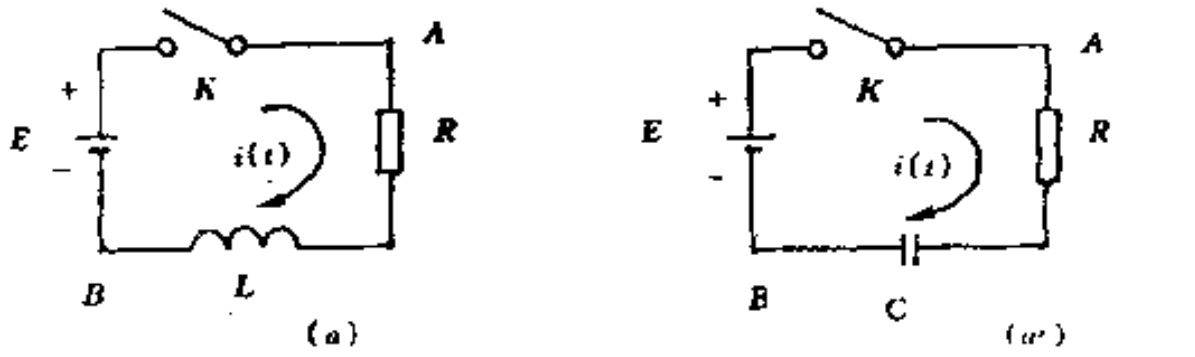
我们对直流电路和交流电路是比较熟悉的。在直流电路中,电流和电压是不随时间变化的常数。在交流电路中,电流和电压是正弦变量,但其振幅和频率不随时间而变化。我们如果用万能表去测量电流或电压的有效值,仪表读数是不随时间而变化的。我们称这种不随时间而变化的电路工作状态为稳态。严格说,只有当电路开始工作以后足够长的时间,并且电路连接方式和能量供给情况(且不谈干扰等因素)都没有变化的条件下,才能近似达到这种稳定状态。如果电路本身的条件有变化,如打开或合上开关,接入或断开某些元件、增大或减小某些元件的参数以及改变电路中某些接

线的方式，则电路的工作状态就要改变。这种变化并不是突然发生的，不管多么快总需要一段时间。因为在电路中，电感元件内的电流不能突然变化，只能连续地增大或减小；电容元件的充电和放电也需要一定时间。在达到相对稳定状态之前的一段时间内，电路中变化着的工作状态称为瞬态。严格说，瞬态过程所经历的时间是无限长的，可是实际上，只要经过若干毫秒、微秒以至毫微秒的时间，电路中的电流和电压就很接近稳态值了。分析瞬态过程是很重要的，例如，可以指导我们如何选择电路中的各种元件，使瞬态过程加快或减慢，以满足工程技术上的某种需要。

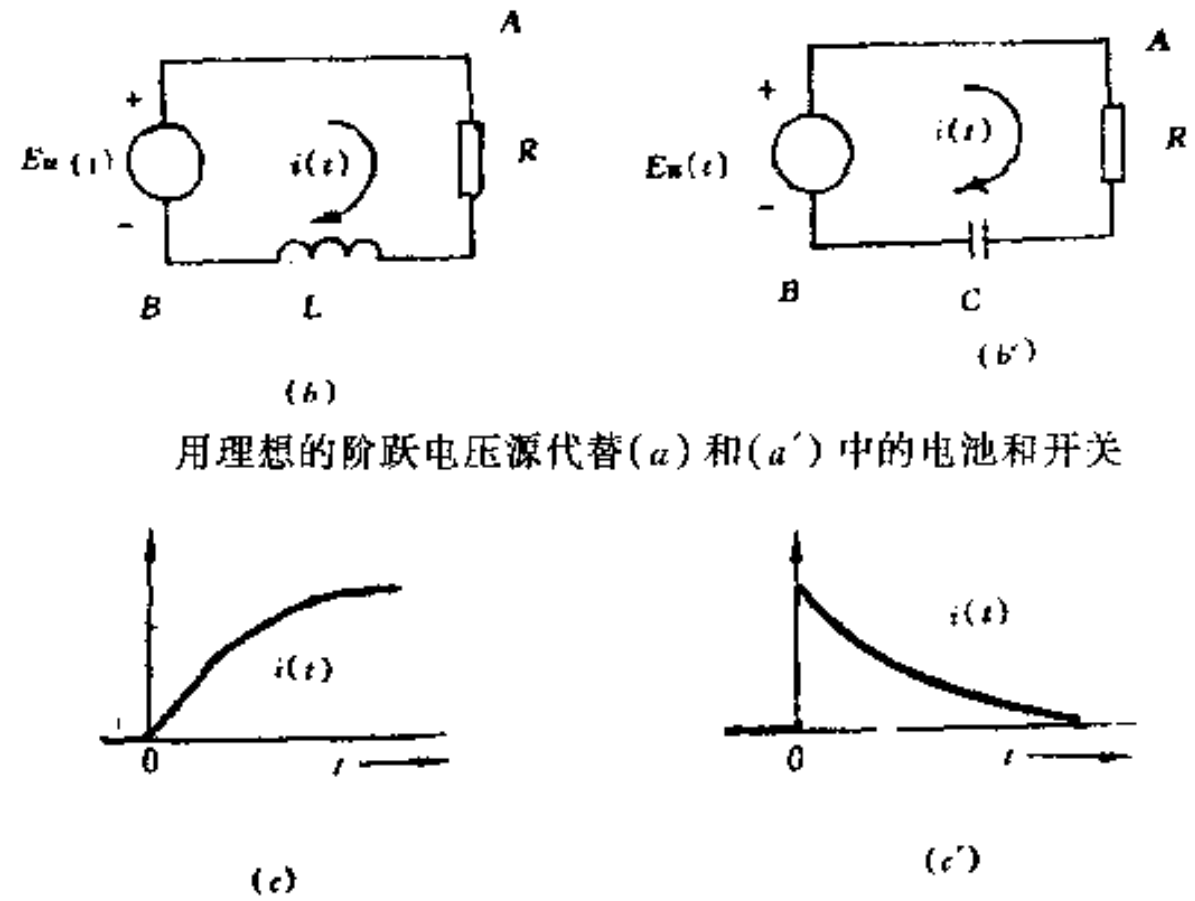
我们知道，研究电路的稳态，只要利用代数方程就行了。研究瞬态就必须借助于微分方程，因为只有微分才能不仅表明状态而且能表明状态的变化，即过程。通常按照描述电路工作的微分方程的阶数把电路分为一阶电路、二阶电路和高阶电路。一阶电路是仅含有一个电容或仅含有一个电感的电路，即 RC 电路或 RL 电路。二阶电路则同时包含电感和电容（RLC 电路）。这里将讨论一阶和二阶电路的瞬态过程，主要为了掌握如何应用 $\mathscr{L}$ 变换去解决问题。越是复杂的电路越能显示出 $\mathscr{L}$ 变换方法的优越性。由于一些复杂电路在一定条件下可以等效为一阶、二阶电路，所以掌握好一、二阶电路的分析方法是重要的。

2. 一阶电路

现在利用 $\mathscr{L}$ 变换方法来分析 RL 和 RC 电路接通直流电源时（3.2.1a 和 a'）电路中电压和电流的变化。在没有合上开关 K 时，这两个电路中的 A 点和 B 点间的电压为零。当合上开关 K 时，A 点和 B 点间的电压就由零伏突变为 E 伏（忽略导线长度）。设合上开关的时刻为 $t = 0$，于是，在电路中合上开关接通直流电源这一动作可以等效为电路中的 AB 点间加上一个阶跃函数电压 $Eu(t)$，如图 3.2.1b 和 b' 所示。



RL 电路和 *RC* 电路接通直流电源



用理想的阶跃电压源代替(*a*)和(*a′*)中的电池和开关

RL 电路中电流增长曲线　　*RC* 电路中电流衰减曲线

图 3.2.1　**一阶电路**

这里 $Eu(t)$ 表示：

$$Eu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ E, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

阶跃函数是电信号的基本类型之一，今后会经常遇到。一遇到单位阶跃信号 $u(t)$ 就应想到，那是指在 $t = 0$ 时刻突然接入 1 伏特的

直流恒压源。

对于图 3.2.1a 的 RL 电路，根据克希霍夫第二定律有

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = Eu(t)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha_1 it = \lambda_1 u(t) \tag{3.2.1}$$

其中 $\alpha_1 = R/L, \lambda_1 = E/L$。

对于图 3.2.1b 的 RC 电路类似地有

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t = Eu(t)$$

设电容两端电压为 $v(t)$，于是 $i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ 和 $v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t$，方程可化为

$$RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = Eu(t)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha_2 v(t) = \lambda_2 u(t) \tag{3.2.2}$$

其中 $\alpha_2 = 1/RC, \lambda_2 = E/RC$。比较(3.2.1)和(3.2.2)式，它们具有完全相同的形式，我们统一地用符号 $w(t)$ 来表示电源 $i(t)$ 和电压 $v(t)$，并略去 α 和 λ 的下标，于是方程(3.2.1)和(3.2.2)可以统一地写成

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha w(t) = \lambda u(t) \tag{3.2.3}$$

其中 α 和 λ 为常数。为普遍起见，我们给定初始条件为：当 $t = 0$ 时 $w(t) = w_0$。

现在我们对(3.2.3)式逐项取 $\mathscr{L}$ 变换，设 $\mathscr{L}[w(t)] = W(s)$，利用微分性质(3.1.14a)式和表 3.1 中第 2“变换对”得到

$$[sW(s) - w_0] + \alpha W(s) = \frac{\lambda}{s}$$

或

$$(s+a)W(s)=\frac{\lambda}{s}+w_0$$

所以

$$W(s)=\frac{\lambda+sw_0}{s(s+a)}=\frac{\lambda}{s(s+a)}+\frac{w_0}{s+a} \tag{3.2.4a}$$

对上式表示的像函数取 $\mathscr{L}^{-1}$变换有

$$w(t)=\lambda\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)}\right]+w_0\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right]$$

利用(3.1.19) 式的结果以及表 3.1 中第 4“变换对” 得到

$$w(t)=\frac{\lambda}{a}(1-e^{-at})w_0e^{-at} \tag{3.2.4b}$$

这就是一阶常微分方程(3.2.3) 的解答。上式第一项与电源 E 有关(λ 与 E 成正比),而与初始条件无关;上式第二项与初始条件有关,而与电源无关。对于 RL 电路,(3.2.4b) 式成为

$$\begin{aligned}i(t)&=\frac{\lambda_1}{a_1}(1-e^{-at})+i_0e^{-at}\\&=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})+i_0e^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned}$$

若初始条件为 $i_0=0$,则 $i(t)=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$,这时电流随时间变化的曲线如图 3.2.1$c$ 所示。当 $t\to\infty$ 时,$i(t)\to E/R$(常数)。$\tau=L/R$ 称为时间常数。当 $t=\tau$ 时,$i(\tau)=(1-e^{-1})E/R\approx 0.63E/R$,即接通电源后经过 $t=\tau$ 这样一段时间,电流就已增长到稳态值的63% 。实际上,经过3τ到4τ的时间后已可近似认为达到稳态值(为稳态值的 95% 以上)。

对于 RC 电路,(3.2.4b) 式成为

$$\begin{aligned}v(t)&=\frac{\lambda_2}{a_2}(1-e^{-a_2t})+v_0e^{-a_2t}\\&=E(1-e^{-\frac{1}{RC}t})+v_0e^{-\frac{1}{RC}t}\end{aligned} \tag{3.2.5a}$$

若初始条件为 $v_0=0$,则 $v(t)=E(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$,电流的表示式

为

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad (3.2.5b)$$

按上式画出的 RC 电路接通直流电压后的电流变化曲线如图 3.2.1c' 所示。当 $i\to\infty$ 时，$i(t)\to 0$(稳态值)。$\tau = RC$ 称为RC 电路的时间常数。当 $t = \tau$ 时，$i(\tau) = e^{-1}E/R = 0.37E/R$，即接通电源后经过 $t = \tau$ 这段时间，电流由最大值 E/R 减小到最大值的 37%。显然，RC 电路中的电压变化规律与 RL 电路中的电流变化规律相同，因为它们满足同一个微分方程(3.2.3)，并有同样的解析形式(3.2.4b)。

3. 二阶电路

现在来讨论图 3.2.2 所示的串联 RLC 电路接通直流电源发生的瞬态过程，图中已将直流电源和开关等效成阶跃函数输入电压 $Eu(t)$，设初始条件为零。

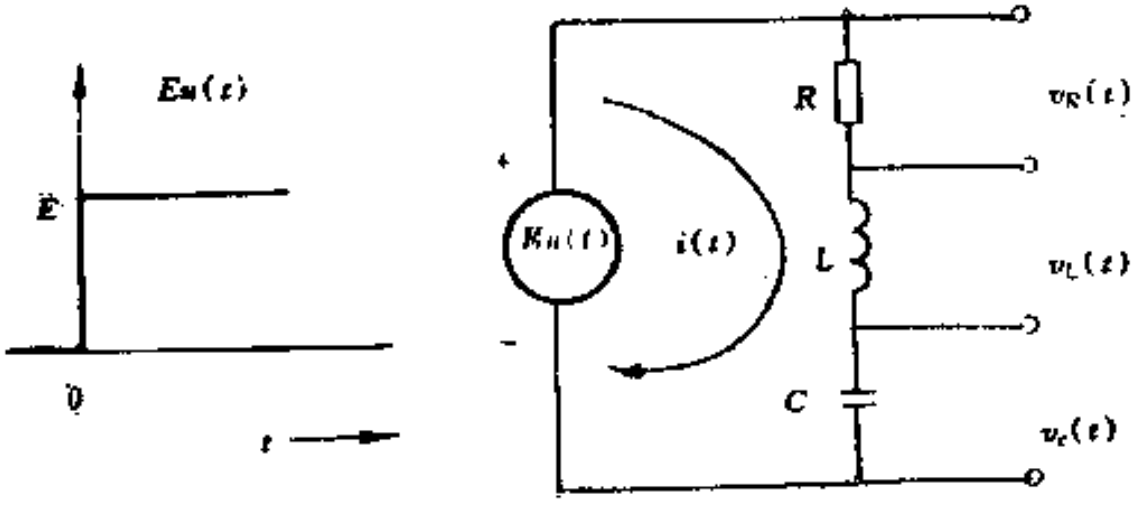


图 3.2.2　串联 RLC 电路(阶跃信号输入)

根据克希霍夫第二定律容易写出

$$v_R(t) + v_L(t) + v_c(t) = Eu(t)$$

其中 $v_R(t) = Ri(t)$，$v_L = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$，回路电流 $i(t)$ 流过电阻 R

和电感L，也流过电容C，$i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}$，把这些关系代入上述回路方程就得到电容电压$v_c(t)$满足的微分方程(略去了$v_c(t)$的下标$c$)：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+v(t)=Eu(t)$$

或写为

$$\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+bv(t)=\lambda u(t) \tag{3.2.6}$$

其中$a=R/L$，$b=1/LC$，$\lambda=E/LC$。这个方程包含二阶导数，是一个二阶微分方程，它是二阶电路具有代表性的方程。对这方程取$\mathscr{L}$变换得到(注意已设初始条件为零)：

$$s^2V(s)+asV(s)+bV(s)=\frac{\lambda}{s}$$

其中$V(s)=\mathscr{L}[v(t)]$，这是关于$V(s)$的二次代数方程，解出$V(s)$，我们有

$$(s^2+as+b)V(s)=\frac{\lambda}{s}$$

$$V(s)=\frac{\lambda}{s(s^2+as+b)} \tag{3.2.7}$$

这是原方程(3.2.6)中未知函数$v(t)$的像函数，为求出$v(t)$，需对$V(s)$做$\mathscr{L}^{-1}$变换，这就要将(3.2.7)式分母中的二次代数式分解因式，这是我们所熟悉的。按照a、b数值(从而元件数值)的不同，分为三种情况：(1)当$a^2>4b$时，二次代数式(s^2+as+b)可分解为两个不同的实数因子；(2)当$a^2<4b$时，可分解为两个共轭复数因子；(3)当$a^2=4b$时，可分解为两个相等的实数因子。现在分别讨论如下：

(1)$a^2>4b$：这时有$s^2+as+b=(s+\delta_1)(s+\delta_2)$，按照初等代数中的分项方法(亦称部分分式)可将(3.2.7)式写为

$$V(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+\delta_1} + \frac{A_2}{s+\delta_2}$$

并定出常数 A_0、A_1 和 A_2 如下：

$$A_0 = \frac{\lambda}{\delta_1\delta_2}; \quad A_1 = \frac{\lambda}{\delta_1(\delta_1-\delta_2)}; \quad A_2 = \frac{-\lambda}{\delta_2(\delta_1-\delta_2)}$$

于是有

$$V(s) = \frac{\lambda}{\delta_1\delta_2}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{\delta_1-\delta_2}\left(\frac{\delta_2}{s+\delta_1} - \frac{\delta_1}{s+\delta_2}\right)\right]$$

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)] = \frac{\lambda}{\delta_1\delta_2}\left[1 + \frac{\delta_2 e^{-\delta_1 t} - \delta_1 e^{-\delta_2 t}}{\delta_1-\delta_2}\right], \quad t \geqslant 0,$$

注意到 $\delta_1\delta_2 = b = 1/LC, \lambda = E/LC$，可将最后结果写成

$$v(t) = E\left[1 + \frac{\delta_2 e^{-\delta_1 t} - \delta_1 e^{-\delta_2 t}}{\delta_1-\delta_2}\right], t \geqslant 0 \qquad (3.2.8a)$$

若给定上式中各常数值，就可画出图 3.2.3 中曲线 A 那样的关系曲线。可见，在 $a^2 > 4b$（亦即 $R > 2\sqrt{L/C}$）的条件下，电容电压 $v(t)$ 随时间增长而不出现振荡（过阻尼情况）。

(2) $a^2 < 4b$：这时有

$$s^2 + as + b = (s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)$$
$$= (s+\alpha)^2 + \beta^2$$

于是(3.2.7)式成为

$$V(s) = \frac{\lambda}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$$
$$= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

其中待定常数容易求出为

$$A_0 = \frac{\lambda}{\alpha^2+\beta^2}; \quad A_1 = \frac{-\lambda}{\alpha^2+\beta^2}; \quad A_2 = \frac{-2\alpha\lambda}{\alpha^2+\beta^2};$$

于是像函数为

$$V(s) = \frac{\lambda}{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right]$$

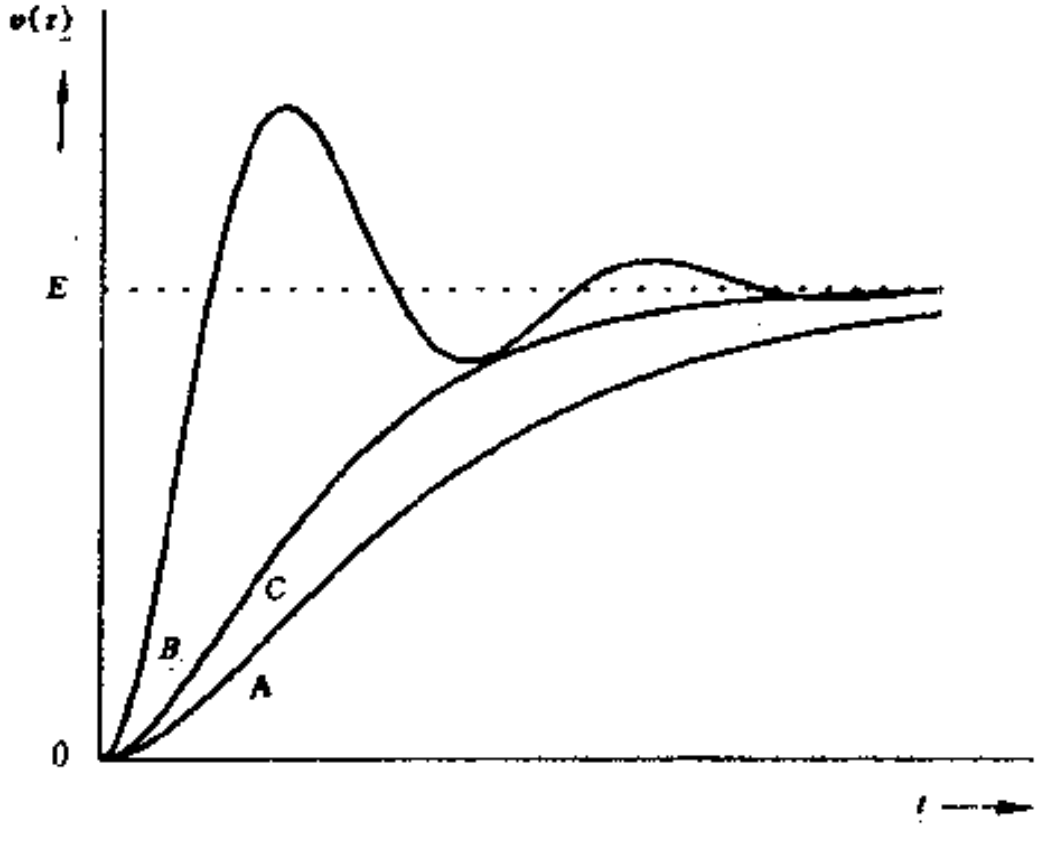


图 3.2.3　二阶电路中电容电压随时间变化曲线(A:过阻尼,B:欠阻尼,C 临界阻尼)

$$= \frac{\lambda}{\alpha^2+\beta^2}\left[\frac{1}{s} - \left\{\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\}\right]$$

利用表 3.1 中的第 1、第 12 和第 11"变换对" 可求出

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)]$$

$$= \frac{\lambda}{\alpha^2+\beta^2}\left[1 - e^{-\alpha t}\left\{\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right\}\right], \quad t \geqslant 0$$

但 $\lambda = E/LC$, $\alpha^2+\beta^2 = b = 1/LC$, 故上式可化为

$$v(t) = E\left[1 - e^{-\alpha t}\left\{\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right\}\right], t \geqslant 0 \qquad (3.2.8b)$$

上式对应的关系曲线如图 3.2.3 中曲线 B 所示。我们看到, 在 $R < 2\sqrt{L/C}$ 的条件下(欠阻尼), 电容电压 $v(t)$ 出现振荡波形。

(3) $a^2 = 4b$: 这时有 $s^2 + as + b = (s+\alpha)^2$, 于是(3.2.7) 式

成为

$$V(s) = \frac{\lambda}{s(s+\alpha)^2} = \frac{\lambda}{\alpha^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} - \frac{\alpha}{(s+\alpha)^2}\right]$$

利用表 3.1 中的第 1、第 4 和第 15“变换对”可求出

$$\begin{aligned} v(t) = \mathscr{L}^{-1}[V(s)] &= \frac{\lambda}{\alpha^2}[1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}], \quad t \geqslant 0 \\ &= E[1 - (1+\alpha t)e^{-\alpha t}], \quad t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.2.8c}$$

上式对应的关系曲线如图 3.2.3 中曲线 C 所示。这是 $R = 2\sqrt{L/C}$ 的情况。当电阻 R 大于这个值时，电路就由振荡状态转为不振荡，这种情况称为临界阻尼。

3.2.2 阻抗函数和传输函数

从上面对一阶和二阶电路的讨论可以看到，$\mathscr{L}$ 变换确实简化了瞬态过程的分析，但仍需列出微分方程，化为代数方程再求解，等等。这些步骤对复杂一些的电路仍嫌麻烦，是不是可以把分析工作进一步简化呢？下面就来讨论这方面的问题。

1. 阻抗函数

我们已经知道，对于单个电阻($v = Ri$)、单个电感($v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$)和单个电容($i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$)来说，如果它们的端电压 v 的像函数是 $V(s)$，流过元件的电流的像函数是 $I(s)$，那么就分别有(初始条件为零)：

$$V(s) = RI(s); V(s) = LsI(s); I(s) = CsV(s);$$

我们把像电压 $V(s)$ 与像电流 $I(s)$ 的比值叫做阻抗函数 $Z(s)$，于是有：

$$Z(s) = R(\text{对单个电阻});$$

$$Z(s) = Ls(\text{对单个电感});$$

$$Z(s) = \frac{1}{Cs}(\text{对单个电容}); \tag{3.2.9}$$

和

$$V(s) = Z(s)I(s) \tag{3.2.10}$$

回忆我们在学习交流电路时曾引入欧姆定律的复数形式：

$$\dot{V} = \dot{Z}\dot{I} \tag{3.2.11}$$

$$\dot{Z}_R = R; \dot{Z}_L = j\omega L; \dot{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} \tag{3.2.12}$$

(3.2.12) 和(3.2.9) 式的差别仅在于将 $j\omega$ 换为 s，3.2.10 式称为欧姆定律的运算形式，$Z(s)$ 称为运算阻抗或阻抗函数。由于 $\mathscr{L}$ 变换的线性叠加性质，对于像电压和像电流，克希霍夫定律也适用。

例如，前面讨论一阶电路时所用的 RL 电路(图 3.2.1a 或b)，AB 两点间的阻抗(函数) 为 $Z(s) = R + Ls$，输入信号的像函数为 $V(s) = E/s$(阶跃电压 $Eu(t)$ 的 $\mathscr{L}$变换式)，于是电流的像函数为

$$I(s) = \frac{1}{Z(s)}V(s) = \frac{1}{R + Ls} \cdot \frac{E}{s}$$

若令 $\alpha = R/L$ 和 $\lambda = E/L$，则上式成为

$$I(s) = \frac{\lambda}{s(s + \alpha)}$$

这正是(3.2.4a) 式在初始条件为零($\omega_0 = 0$) 时的情况。然而步骤却简便多了，免去了列微分方程、做 $\mathscr{L}$变换以及再求解代数方程等手续。如果对上述 RL 电路输入其他信号，例如正弦信号 $v(t) = E\cos(\omega_0 t + \varphi)$，那么只要按照表 3.1 第 14“变换对” 查出正弦信号 $v(t)$ 的像函数 $V(s)$，就可立即得到回路电流的像函数 $I(s)$：

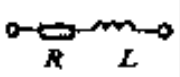
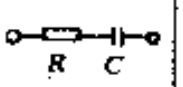
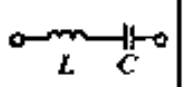
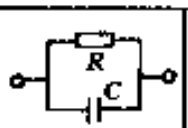
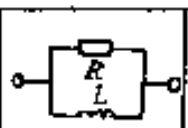
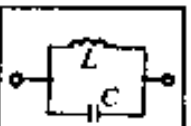
$$I(s) = \frac{1}{R + Ls}V(s) = \frac{E(s\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi)}{(R + Ls)(s^2 + \omega_0^2)}$$

再做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换即可得回路中的电流 $i(t)$。

不论是简单的还是复杂的二端网络，都可以首先找出它的阻

抗函数 $Z(s)$，然后由电压 $V(s)$ 求电流 $I(s)$，或由 I 求 V。确定一个二端网络的阻抗函数的方法是根据(3.2.9) 式并利用阻抗的串联、并联公式。表 3.2 中给出由两个元件构成的二端网络的阻抗函数 $Z(s)$。

表 3.2　双元件二端网络的阻抗函数

二端网络（双元件）						
阻抗函数 $Z(s)$	$R+Ls$	$\frac{RCs+1}{Cs}$	$\frac{LCs^2+1}{Cs}$	$\frac{R}{RCs+1}$	$\frac{RLs}{Ls+R}$	$\frac{Ls}{LCs^2+1}$

2. **传输函数**

在 §3.2.1 分析一阶电路时，我们讨论了图 3.2.1a' 或 b' 的 RC 电路。所讨论的问题是在电路中 AB 点间输入电压 $Eu(t)$，求电容两端的输出电压 $v_c(t)$。我们把一个网络的输出量(电压或电流) 的像函数与输入量(电压或电流) 的像函数之比叫做这个网络的传输函数(或叫网络函数，参照 §2.3.3)，引入传输函数 $H(s)$ 也可使这类问题的分析简化。在图 3.2.1a' 或 b' 电路中，A 点和 B 点间的总压降 $v_{AB}(t)$ 的像函数是 $V_{AB}(s)=\left(R+\frac{1}{sC}\right)I(c)$。它等于输入阶跃电压的像函数 E/s，而电容端电压的像函数是 $V_c(s)=\frac{1}{sC}I(s)$，于是这个 RC 电路的传输函数是

$$H(s)=\frac{V_c(s)}{V_{AB}(s)}=\frac{\frac{1}{sC}I(s)}{\left(R+\frac{1}{sC}\right)I(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$

由定义输出量 $V_0(s)$ 等于传输函数 $H(s)$ 与输入量 $V_i(s)$ 的乘积 [试对照(2.3.13) 式]

$$V_0(s)=H(s)V_i(s) \tag{3.2.13}$$

对于上述 RC 电路就是

$$V_0(s) = \frac{1}{RCs + 1} \cdot \frac{E}{s}$$

若令 $\alpha = 1/RC, \lambda = E/RC$, 则上式成为

$$V_c(s) = \frac{\lambda}{s(s + \alpha)}$$

这也正是(3.2.4a)式在初始条件为零($\omega_0 = 0$)时的情况。这种方法也避免了列微分方程, 再转化为代数方程, 再解代数方程的手续。在分析复杂的四端网络时广泛采用这种方法。又如前面分析二阶电路时讨论的串联 RLC 电路, 所讨论的问题是已知输入信号 $Eu(t)$, 求输出的电容电压 $v_c(t)$。我们可以根据分压公式先求出这个四端网络的传输函数:

$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{Cs}}{R + Ls + \dfrac{1}{Cs}}$$

输出的电容电压像函数 $V(s)$ 就是 $H(s)$ 与输入信号 $Eu(t)$ 的像函数 E/s 的乘积:

$$V(s) = \frac{\dfrac{1}{Cs}}{R + Ls + \dfrac{1}{Cs}} \cdot \frac{E}{s} = \frac{\lambda}{s(s^2 + as + b)}$$

其中 $a = R/L, b = 1/LC, \lambda = E/LC$, 上式就是(3.2.7)式。

任意集中参数线性网络的传输函数的形式为两个多项式之比

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad (3.2.14)$$

这是因为, 若输入信号为 $x(t)$, 输出信号为 $y(t)$, 则电路微分方程的一般形式是

$$b_n = \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + b_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + b_0 y(t)$$

$$= a_m \frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} + a_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + a_0 x(t)$$

对上方程取 $\mathscr{L}$ 变换，令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$，设初始条件为零，得

$$b_n s^n Y(s) + \cdots + b_0 Y(s) = a_m s^m X(s) + \cdots + a_0 X(s)$$

或

$$Y(s) = \left[\frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0}\right] X(s)$$

上式中方括号内的量即(3.2.14)式的传输函数。表 3.3 给出了双元件构成的四端网络的传输函数形式。

表 3.3　双元件四端网络的传输函数

四端网络（双元件）	R C	R L	L R	C R	L C	C L
传输函数 $H(s)$	$\frac{1}{RCs+1}$	$\frac{Ls}{Ls+R}$	$\frac{R}{Ls+R}$	$\frac{RCs}{RCs+1}$	$\frac{1}{LCs^2+1}$	$\frac{LCs^2}{LCs^2+1}$

3. *RC* 电路分析

作为数值例题，我们来考虑正弦输入下 *RC* 电路的瞬态分析。在图 3.2.4 的电路中，自 $t = 0$ 时刻输入电压 $v_i(t) = 10\cos 4t$，现求输出电压 $v_0(t)$。电路中，$R = 2$ 欧姆，$C = 0.5$ 法拉。

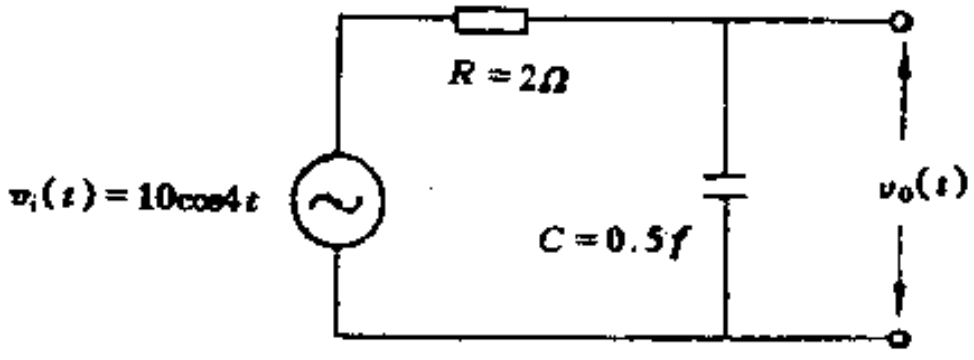


图 3.2.4　*RC* 电路(正弦输入)

这个电路的传输函数是(见表 3.3)：

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{s + 1}$$

对输入电压取 $\mathscr{L}$ 变换有(见表 3.1):

$$V_i(s) = \mathscr{L}[10\cos 4t] = \frac{10s}{s^2 + 16}$$

根据(3.2.13)式,输出电压像函数是:

$$V_0(s) = H(s)V_i(s) = \frac{10s}{(s^2 + 16)(s + 1)}$$

将上式化为部分分式(以便利用表 3.1),有:

$$V_0(s) = \frac{As + B}{s^2 + 16} + \frac{C}{s + 1} \tag{3.2.15}$$

其中待定常数 A、B、C 可确定如下

$$C = (s + 1)V_0(s)\Big|_{s=-1} = \frac{10s}{s^2 + 16}\Big|_{s=-1} = -\frac{10}{17}$$

将此 C 值代入(3.2.15)式整理后得

$$10s = (As + B)(s + 1) - \frac{10}{17}(s^2 + 16)$$

$$= As^2 + Bs + As + B - \frac{10}{17}s^2 - \frac{160}{17}$$

由 s 的同次幂系数应相等而得

$$A - \frac{10}{17} = 0, \quad A = \frac{10}{17}$$

$$\frac{10}{17} + B = 10, \quad B = \frac{160}{17}$$

所以

$$V_0(s) = \frac{\frac{10}{17}s + \frac{160}{17}}{s^2 + 16} - \frac{\frac{10}{17}}{s + 1}$$

输出电压则为:

$$v_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{10}{17}}{s + 1} + \frac{\frac{10}{17}s}{s^2 + 16} + \frac{\frac{160}{17}}{s^2 + 16}\right]$$

$$= \underbrace{-\frac{10}{17}e^{-t}}_{\text{瞬态部分}} + \underbrace{\frac{10}{17}\cos 4t + \frac{40}{17}\sin 4t}_{\text{稳态部分}}, \quad t > 0$$

3.2.3 微分电路和积分电路

首先看表 3.3 中的第 2 和第 4 个电路，令 $\tau = L/R$ 表示第 2 个电路的时间常数，$\tau = RC$ 表示第 4 个电路的时间常数，那么这两个电路具有相同形式的传输函数：

$$H(s) = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \tag{3.2.16}$$

若输入电压为 $v_i(t)$，输出电压为 $v_0(t)$，并且 $\mathscr{L}[v_i(t)] = V_i(s)$，$\mathscr{L}[v_0(t)] = V_0(s)$，则根据(3.2.13) 式有

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \frac{s\tau}{1 + s\tau} V_i(s) \\ &= [s\tau - (s\tau)^2 + (s\tau)^3 - \cdots] V_i(s) \end{aligned}$$

以上是将 $H(s)$ 按 $s\tau$ 的升幂展开的结果。利用(3.1.15) 和 (3.1.16) 式的微分性质(初始条件为零)，对上式做 $\mathscr{L}$ 变换得

$$v_0(t) = \tau \frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} - \tau^2 \frac{\mathrm{d}^2 v_i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \tau^3 \frac{\mathrm{d}^3 v_i(t)}{\mathrm{d}t^3} - \cdots$$

若时间常数 τ 足够小，则上式右端第二项以后各项可以忽略(一级近似)，于是有

$$v_0(t) \approx \tau \frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.2.17}$$

可见，在一级近似下，输出电压 $v_0(t)$ 正比于输入电压 $v_i(t)$ 的导数，所以，这两个电路在时间常数 τ 足够小的条件下，可以近似当作微分电路。

我们再看表 3.3 中的第 1 和第 3 个电路，这两个电路也具有同样形式的传输函数：

$$H(s) = \frac{1}{1 + s\tau} \quad \begin{cases} \text{对第 1 个电路：} \tau = RC \\ \text{对第 3 个电路：} \tau = L/R \end{cases}$$

如果时间常数 τ 足够大，使得 $1/s\tau$ 足够小，我们可将 $H(s)$ 展为 $1/s\tau$ 的幂级数，并取一级近似：

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s\tau} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{s\tau}} \\ &= \frac{1}{s\tau}\left[1 - \frac{1}{s\tau} + \frac{1}{(s\tau)^2} - \cdots\right] \\ &= \frac{1}{s\tau} - \frac{1}{(s\tau)^2} + \frac{1}{(s\tau)^3} - \cdots \\ &\approx \frac{1}{s\tau} \end{aligned}$$

于是输出与输入的关系为：

$$V_0(t) \approx \frac{1}{s\tau} V_i(s)$$

$$v_0(t) \approx \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\tau} V_i(s)\right] = \frac{1}{\tau}\int_0^t v_i(t)\mathrm{d}t \qquad (3.2.18)$$

可见，在时间常数 τ 足够大的条件下，这两个电路的输出电压 $v_0(t)$ 与输入电压 $v_i(t)$ 的积分成正比，所以这两个电路可近似地当作积分电路，在 §4.4 还将进一步讨论微分电路和积分电路。

由于一些实际原因，上述四种简单电路并未都得到应用。在需要精度高和适应性强的场合下，要使用多元件电路或有源电路。

3.2.4 运算放大器的简单分析

运算放大器就是一个具有高放大倍数并带有深度负反馈的直流放大器。图 3.2.5 是运算放大器的基本电路。它不但可完成多种数学运算，而且可以做成有源校正电路、无感滤波器、各种交直流放大器、正弦振荡器、非正弦振荡器、恒压源、恒流源等，已获得广泛应用。这里重点是利用 $\mathscr{L}$ 变换方法说明它的简单原理，仅作粗略的近似分析。

图 3.2.5 中阻抗 Z_1 和 Z_2 可以是电阻、电容或它们的组合。首

先考虑图中不存在直流放大器的情况。这时，由克希霍夫定律，在节点 A 处可写出：$\mathscr{L}[i_1(t)] = \mathscr{L}[i_2(t)]$

或

$$\frac{\mathscr{L}[v_2(t)] - \mathscr{L}[v_i(t)]}{Z_1(s)} = \frac{\mathscr{L}[v_0(t)] - \mathscr{L}[v_2(t)]}{Z_2(s)}$$

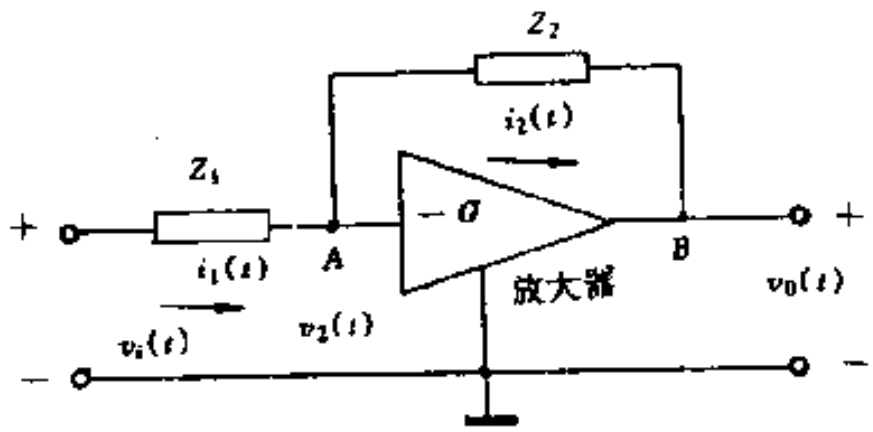


图 3.2.5　运算放大器

其中 $v_2(t)$ 是节点 A 处的电压，在电路中接入放大器后，近似有（略去漏电流）：

$$\mathscr{L}[v_2(t)] = -\frac{\mathscr{L}[v_0(t)]}{G(s)}$$

代入上方程，将各量写为 s 域中的像函数，于是有

$$\frac{-\dfrac{V_0(s)}{G(s)} - V_i(s)}{Z_1(s)} = \frac{V_0(s) + \dfrac{V_0(s)}{G(s)}}{Z_2(s)}$$

整理后得

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{Z_1(s)\left[\dfrac{1}{Z_2(s)} + \dfrac{1}{G(s)Z_2(s)} + \dfrac{1}{G(s)Z_1(s)}\right]}$$

$$= \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \cdot \frac{\dfrac{G(s)Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}}{1 + \dfrac{G(s)Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}}$$

令 $\beta(s) = Z_1(s)/[Z_1(s) + Z_2(s)]$，于是运算放大器的传输函数为

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \cdot \frac{G(s)\beta(s)}{1 + G(s)\beta(s)}$$

若图 3.2.5 中的直流放大器增益足够高，使得 $|G(s)\beta(s)| \gg 1$，则上式简化为

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \tag{3.2.19}$$

可见在满足上述条件时，输出电压与输入电压之比仅决定于反馈阻抗 $Z_2(s)$ 与输入端阻抗 $Z_1(s)$ 之比，而与高增益直流反相放大器无关。因此，改变 $Z_1(s)$ 和 $Z_2(s)$ 的形式就可对输入电压信号进行各种数学运算。例如选取

$$Z_2(s) = \frac{1}{sC}, Z_1(s) = R, \text{则 } H(s) = -\frac{1}{sCR}$$

于是

$$V_0(s) = -\frac{1}{sCR}V_i(s)$$

$$v_0(t) = \mathscr{L}^{-1}[V_0(s)] = -\frac{1}{CR}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{V_i(s)}{s}\right]$$

$$= -\frac{1}{CR}\int v_i(t)\mathrm{d}t$$

可见这时运算放大器对输入信号 $v_i(t)$ 具有积分运算作用，若使比例常数 $1/CR$ 大于 1，则还具有放大作用。

§3.3 $\mathscr{L}$ 变换的其他常用性质

除了在 §3.1 介绍的线性叠加性质、微分性质和积分性质外，$\mathscr{L}$ 变换还有不少其他重要性质。本节重点介绍几个常用性质。

3.3.1 时移性质

所谓"时移",就是把表示时间函数 $f(t)$ 的曲线沿时间轴(例如向正方向)平移时间 T,成为一个新函数 $f(t-T)$,这个新函数的波形与原来 $f(t)$ 的波形完全一样。例如,图 3.3.1 表示单位阶跃函数 $u(t)$ 沿时间轴右移 T 以后得到的函数 $u(t-T)$。图3.3.2 表示起点为 $t=0$ 的时间函数 $f(t)$ 右移 T 后得到的新函数。注意,时移后的新函数 $f(t-T)$ 当 $t<T$ 时为零。为明确表示这一点,往往利用单位阶跃函数将 $f(t)$ 等价地写为 $f(t)u(t)$,而将时移后的新函数写为 $f(t-T)u(t-T)$。

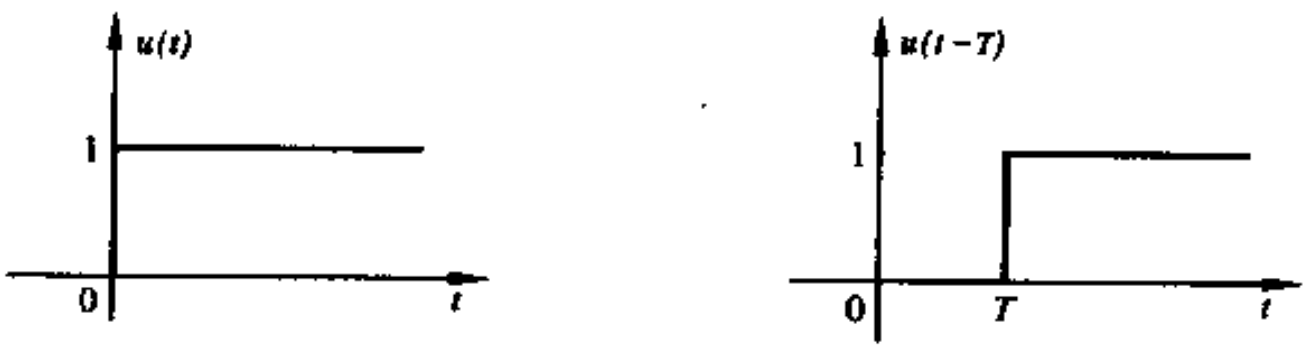


图 3.3.1 单位阶跃函数的时移

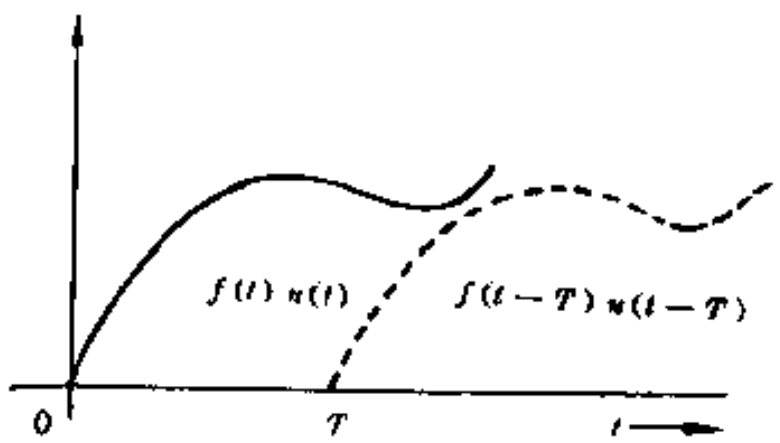


图 3.3.2 任意函数 $f(t)$ 的时移

现在假定 $f(t)$ 不是一条给定的曲线,而是以实验数据的表格给出。由这些数据也可以画出曲线,但曲线的位置就与计时的准确性有关。比如说,甲、乙二人独立地记录同一实验现象,每人都按照自己的手表测量函数 $f(t)$,而实际上甲的表

是标准时间，乙的表比标准时间快 T(秒)。这样，甲记录数据的起始时刻若为 $t = 0$(秒)，则乙记录的起始时刻应为 $t = T$(秒)。我们以变量 t 表示甲表的正确时间，以变量 τ 表示乙表记录的时间，于是有

$$\tau = t - T \qquad (T \text{ 为正常数})$$

亦即 $\tau = 0$ 的时刻相当于 $t = T$ 的时刻。对上式求导数有

$$d\tau = dt$$

这表示每个表都以同样速率转动，但 τ 表与 t 表保持着 T(秒)的偏差。图 3.3.2 中的虚线表示 的就是 $f(\tau)u(\tau)$。

现在我们对时间函数做 $\mathscr{L}$ 变换。乙将按照他的时间 τ 写出：

$$F(s) = \int_0^\infty f(\tau)u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

然而，我们知道乙表带有 T(秒) 的偏差，应将上式改为

$$F(s) = \int_T^\infty f(t - T)u(t - T)e^{-s(t-T)}dt$$

上式中积分下限由零改为 T 是因为当 $\tau = 0$ 时 $t = T$；可是在 $t = 0$ 到 $t = T$ 这段时间里函数 $f(t - T)u(t - T)$ 的值根本就是零，故积分下限仍可改为零：

$$F(s) = \int_0^\infty f(t - T)u(t - T)e^{sT}e^{-st}dt$$

将上式中与时间无关的因子 e^{sT} 提至积分号外：

$$e^{-sT}F(s) = \int_0^\infty f(t - T)u(t - T)e^{-st}dt$$

上式右端正是 $f(t - T)u(t - T)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换式，故得

$$\mathscr{L}[f(t - T)u(t - T)] = e^{-sT}F(s) \qquad (3.3.1)$$

这个关系式称为 $\mathscr{L}$ 变换的时移性质。它表明，若时间函数 $f(t)$ 平移 T，则相应的像函数 $F(s)$ 应乘以指数因子 e^{-sT}。例如，

若 $\mathscr{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$，则 $\mathscr{L}[u(t - T)] = e^{-sT}\frac{1}{s}$

在分析光电信号的传播和分析脉冲电路等问题时常用到时移

性质。

例 3.19　求图 3.3.3 所示的单个矩形脉冲的像函数。

解：这个矩形脉冲可视为图 3.3.1 中的两个阶跃函数之差，于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}[u(t)-u(t-T)] \\ &= \mathscr{L}[u(t)] - \\ &\quad \mathscr{L}[u(t-T)] \\ &= \frac{1}{s} - e^{-sT}\cdot\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s}(1-e^{-sT})\end{aligned}$$

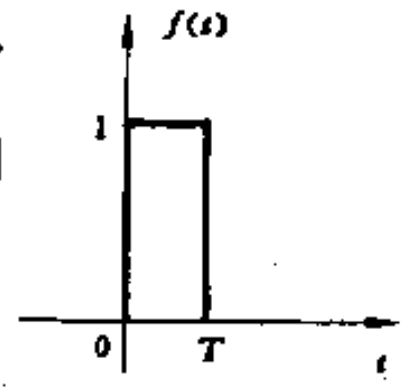
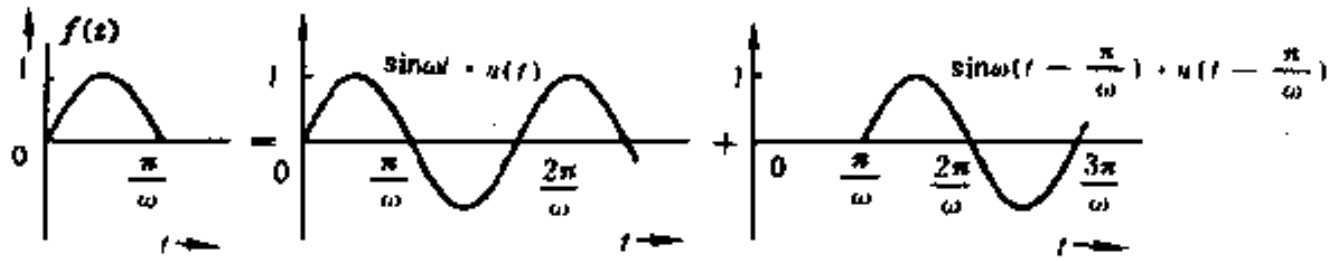


图 3.3.3　单个矩形脉冲

例 3.20　图 3.3.4*a* 所示波形是正弦波 $\sin\omega t$ 的第一个半波，求该波形的像函数。



(*a*)　(*b*)　(*c*)

图 3.3.4　正弦波 $\sin\omega t$ 的第一个半波

解：这个波形可视为图 3.3.4 中(*b*)和(*c*)两个正弦波的合成，(*c*)的波形较(*b*)的波形右移半周期。据图 3.3.4 可写出：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}\left[\sin\omega t\cdot u(t)+\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right] \\ &= \mathscr{L}[\sin\omega t]+\mathscr{L}\left[\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\cdot u\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right] \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{\pi}{\omega}s} \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}s})\end{aligned}$$

例 3.21　求图 3.3.5 所示的锯齿波的像函数。

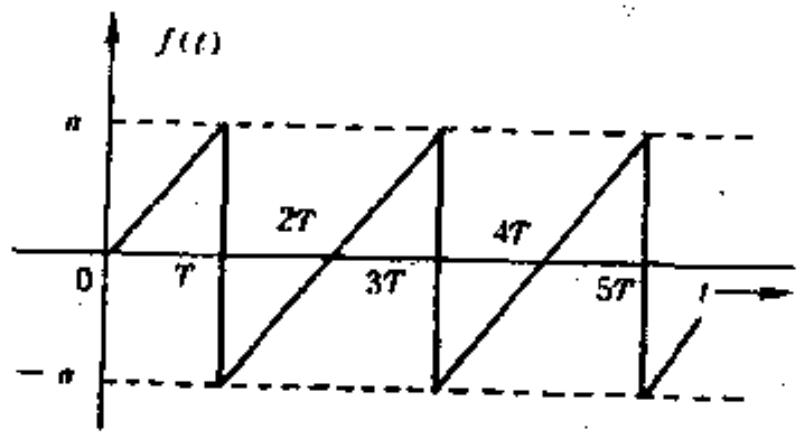


图 3.3.5　锯齿波

解：

$$f(t)=\frac{a}{T}t\cdot u(t)-2a\cdot u(t-T)-2a\cdot u(t-3T)$$
$$-2a\cdot u(t-5T)-\cdots$$

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{a}{T}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{2a}{s}e^{-Ts}-\frac{2a}{s}e^{-3Ts}-\frac{2a}{s}e^{-5Ts}-\cdots$$
$$=\frac{a}{T}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{2a}{s}(e^{-Ts}+e^{-3Ts}+e^{-5Ts}+\cdots)$$

上式右端第二项括号内为一无限等比级数，其首项为 $A_0=e^{-Ts}$，公比为 $Q=e^{-2Ts}$，该无限等比级数之和为：

$$\frac{A_0}{1-Q}=\frac{e^{-Ts}}{1-e^{-2Ts}}$$

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则这锯齿波的像函数为

$$F(s)=\frac{a}{s}\left(\frac{1}{Ts}-\frac{2e^{-Ts}}{1-e^{-2Ts}}\right)=\frac{a}{s}\left(\frac{1}{Ts}-\frac{1}{\frac{e^{Ts}-e^{-Ts}}{2}}\right)$$
$$=\frac{a}{s}\left(\frac{1}{Ts}-\frac{1}{\mathrm{sh}\,Ts}\right)$$

例 3.22　利用时移性质求 $F(s)=\frac{s-2}{s^3}e^{-2s}+\frac{s+2}{s^3}e^{-3s}$ 的原函数。

解：因为(由表 3.1.1 第 19"变换对")

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^3}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^3}\right]=t-t^2,(t\geqslant 0)$$
$$=(t-t^2)\cdot u(t)$$

利用时移性质(3.3.1)式有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^3}e^{-2s}\right]=[(t-2)-(t-2)^2]\cdot u(t-2)$$
$$=(t-2)(3-t)\cdot u(t-2)$$

类似地有：

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^3}e^{-3s}\right]=[(t-3)+(t-3)^2]\cdot u(t-3)$$
$$=(t-3)(t-2)\cdot u(t-3)$$
$$\therefore \mathscr{L}^{-1}[F(s)]=(t-2)(3-t)[u(t-2)-u(t-3)]$$

3.3.2 衰减性质

若已知时间函数 $f(t)$ 的像函数是 $F(s)$，那么将 $f(t)$ 乘以指数衰减因子 e^{-at} 得到的函数 $e^{-at}f(t)$，其像函数必为 $F(s+a)$，这个性质很容易证明：

$$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)]=\int_0^\infty [f(t)e^{-at}]e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}\mathrm{d}t=F(s+a)$$

故，若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\mathscr{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$ (3.3.2)

例 3.23　求 $f(t)=e^{-at}\cos\omega t$ 的像函数(利用衰减性质)。

解：已知　$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

根据(3.3.2)式有

$$\mathscr{L}[e^{-at}\cos\omega t]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

这就是表 3.1 中的第 12“变换对”。

例 3.24 求 $F(s)=\dfrac{as+b}{s^2+2\delta s+\omega_0^2}$ 的原函数(利用衰减性质)。

解:将 $F(s)$ 的分母改写为:

$$s^2+2\delta s+\omega_0^2=(s+\delta)^2+\omega_0^2-\delta^2=(s+\delta)^2+\omega^2$$

其中 $\omega^2=\omega_0^2-\delta^2$ 为常数,于是 $F(s)$ 可表示成

$$F(s)=a\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}+\frac{b-a\delta}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$$

这样做的目的是为了凑成表 3.1 中第 7、第 8"变换对"形式:

$$\frac{s}{s^2+\omega^2}=\mathscr{L}[\cos\omega t];\quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\mathscr{L}[\sin\omega t],$$

再根据(3.3.2)式即可写出 $F(s)$ 的原函数:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(t)=(a\cos\omega t)e^{-\delta t}+\left(\frac{b-a\delta}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-\delta t},\quad t\geqslant 0$$

我们看到,衰减性质与刚刚讨论过的时移性质很类似,时域中的平移对应于 s 域中乘以指数函数;而 s 域中的平移对应于时域中乘以指数函数(注意平移符号刚好相反)。

3.3.3 相似性质

若时间函数 $f(t)$ 收缩(或放大)若干倍,则 $f(t)$ 的像函数 $F(s)$ 相应放大(或收缩)同样倍数,$F(s)$ 的形状并不改变。其数学表示为

$$\text{若 } \mathscr{L}[f(t)]=F(s),\text{则 } \mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as),\quad a>0 \tag{3.3.3}$$

这也很容易证明,因为

$$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-\frac{sat}{a}}\frac{\mathrm{d}at}{a}$$

$$= a\int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-as\left(\frac{t}{a}\right)}\mathrm{d}\left(\frac{t}{a}\right)$$

做代换：$t/a = \tau$ 和 $as = y$，于是得：

$$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-y\tau}\mathrm{d}\tau = aF(y) = aF(as)$$

这就证明了相似性质(3.3.3)式。在使用这个性质时，只要已知 $f(t)$ 的像函数 $F(s)$，那么当将 t 改为 t/a 时，则相应的像函数 $F(s)$ 中的每个 s 要改为 as，并将整个函数 $F(as)$ 乘以 a。

例 3.25　已知 $\mathscr{L}[e^{-4t}] = \dfrac{1}{s+4}$，试求 $\mathscr{L}[e^{-2t}]$。

解：$\mathscr{L}[e^{-2t}] = \mathscr{L}[e^{-4\left(\frac{t}{2}\right)}] = \dfrac{2}{2s+4} = \dfrac{1}{s+2}$

3.3.4　初值和终值

如果我们不知道时间函数 $f(t)$ 的形式，但知道 $f(t)$ 的像函数 $F(s)$ 的形式，这时，不必做 $\mathscr{L}$ 变换，就可以直接由 $F(s)$ 求出 $f(t)$ 在 $t=0$ 的值(初值)和当 $t\to\infty$ 时 $f(t)$ 的值(终值)，这就是所谓初值性质和终值性质。

为证明这两个性质，我们来考虑微分性质(3.1.14a)：

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t = sF(s) - f(0) \tag{3.3.4}$$

由于 s 不是时间的函数，故可在积分前使上式两端的 s 趋于零，注意到因子 e^{-st} 将趋于 1，于是

$$\text{左端：}\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{t\to\infty}[f(t) - f(0)] = \lim_{t\to\infty}f(t) - f(0)$$

$$\text{右端：}\lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] = \lim_{s\to 0}[sF(s)] - f(0)$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}f(t) = \lim_{s\to 0}[sF(s)] \tag{3.3.5}$$

这就是终值性质的数学表示，显然，只有在 $t\to\infty$ 时 $f(t)$ 的极限

存在的条件下，才能使用这个性质，例如 $f(t)=\sin\omega t$ 当 $t\to\infty$ 时就没有确定的终值。

现在再考虑(3.3.4)式两端在 $s\to\infty$ 时的情况，即

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0)] \tag{3.3.6}$$

上式左端可写为

$$\lim_{s\to\infty}\left[\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}e^{-st}\mathrm{d}\tau\right]=\lim_{t\to\infty}\left[\lim_{s\to\infty}\int_0^t \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}e^{-st}\mathrm{d}\tau\right]=0$$

上式等于零是因为被积函数中的指数因子当 $s\to\infty$ 时为零，于是(3.3.6)式成为

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)]=f(0) \tag{3.3.7a}$$

或写成：

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)] \tag{3.3.7b}$$

这就是初值性质的数学表示。

这两个性质的用处在于，第一，由已知的像函数 $F(s)$ 不必求原函数即可计算出 $f(t)$ 的初值(起始条件)和终值(稳态值)；第二，由已知的 $f(t)$ 经 $\mathscr{L}$ 变换求出像函数 $F(s)$ 后，可利用给定的初始条件验证所求的像函数是否正确。

例 3.26　已知某时间函数 $f(t)$ 的像函数为 $F(s)=\dfrac{s+2a}{(s+a)^2}$，求 $f(t)$ 的初值 $f(0)$。

解：根据初值性质(3.3.7)式有：

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)]=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+2as}{(s+a)^2}=1$$

实际上，可以求出对应于 $F(s)$ 的原函数为

$$f(t)=(1+at)e^{-at}\ .$$

当 $t\to 0$ 时，$f(t)\to 1$。

例 3.27　已知 $F(s)=a\dfrac{1-2e^{-sT}}{s(s+a)}$ 的原函数为

$$f(t) = [1 - e^{-at}]u(t) - 2[1 - e^{-a(t-T)}]u(t - T), \quad a > 0,$$

试利用终值性质检验其正确性。

解：$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 1 - 2 = -1$；

另一方面看：

$$\lim_{t\to\infty}[sF(s)] = \lim_{s\to 0}\left[a\,\frac{1 - 2e^{-sT}}{s + a}\right] = a\,\frac{1-2}{a} = -1$$

根据终值性质可知原结果是正确的。

例 3.28　在图 3.3.6 电路中，若输入电压 $v_i(t)$ 为阶跃函数 $Eu(t)$，利用终值性质求输出电压 $v_0(t)$ 的稳态值。

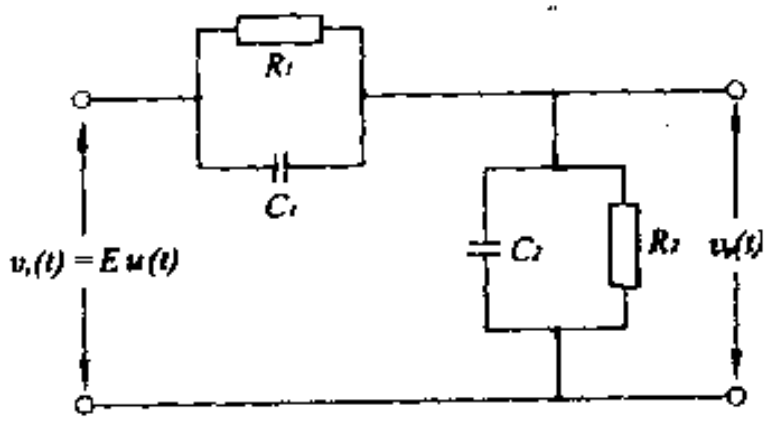


图 3.3.6

解：该四端网络的传输函数为

$$H(s) = \frac{R_2(R_1C_1s + 1)}{(R_1R_2C_1 + R_1R_2C_3)s + (R_1 + R_2)}$$

输出电压的像函数为

$$V_0(s) = H(s)V_i(s) = H(s)\,\frac{E}{s}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} v_0(t) = \lim_{s\to 0}[sV_0(s)] = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E$$

这是意料中的结果。因稳态时，零频率容抗为无限大，归结为直流分压。

3.3.5 卷积性质

1.一类电路问题

若已知电路的传输函数 $H(s)$ 以及输入信号的像函数 $V_i(s)$，那么由(3.2.13)式可知，输出信号的像函数是

$$V_0(s) = H(s)V_i(s)$$

为求输出信号的时间函数 $v_0(t)$，就要对上式做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换，即

$$v_0(t) = \mathscr{L}^{-1}[V_0(s)] = \mathscr{L}^{-1}[H(s)V_i(s)]$$

因此问题归结为求两个 s 域函数乘积的 $\mathscr{L}$ 变换问题。下面将讨论的卷积性质就是解决这一类问题的。

2.卷积性质的证明

我们来一般地讨论函数 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 乘积的 $\mathscr{L}$ 变换：$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]$。卷积性质告诉我们：

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (3.3.8)$$

其中 $f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]$，$f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]$。(3.3.8)式右端的积分称为卷积积分，其中积分变量为 τ。在积分过程中 t 视为常数，“卷积”的意义将在下面讨论。为证明(3.3.8)式，我们首先注意：因为当 $t<0$ 时，$f_1(t) = f_2(t) = 0$，因而当 $\tau > t$ 时(亦即 $t-\tau<0$ 时)有 $f_2(t-\tau) = 0$，故可将 $f_2(t-\tau)$ 明确地记为 $f_2(t-\tau)u(t-\tau)$，于是(3.3.8)式右端的积分可写为

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty f_1(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

上式右端从 t 到 ∞ 的一段积分实际上是等于零的(因为 $\tau > t$ 时，$f_2(t-\tau) = 0$)，现在对上式做 $\mathscr{L}$ 变换，将像函数记为 $F(s)$，我们有：

$$F(s) = \mathscr{L}\left[\int_0^\infty f_1(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-st} f_2(t-\tau) u(t-\tau) dt$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau [e^{-s\tau} F_2(s)] \quad [\text{利用时移性质 (3.3.1) 式}]$$

$$= \left[\int_0^\infty f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau\right] \cdot F_2(s) = F_1(s) F_2(s)$$

所以

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s) \tag{3.3.9}$$

对上式做 $\mathscr{L}^{-1}$变换就得(3.3.8)式,因而证明了卷积性质。(3.3.9)式是卷积性质的另一形式。卷积积分常简记为 $f_1(t) * f_2(t)$,因此,(3.3.8)式可写为

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s) F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) \tag{3.3.10}$$

(3.3.8)式告诉我们,两个像函数乘积的 $\mathscr{L}$ 变换等于两个原函数的卷积;反过来,(3.3.9)式告诉我们,两个原函数卷积的$\mathscr{L}$变换等于两个像函数的乘积。

$\mathscr{L}$变换的卷积性质给电路分析带来许多方便(见后),同时,在数学上它可以帮助我们由一些较复杂的像函数求出原函数。下面举几个例子。

例 3.29　求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s-a)}\right]$。

解: 设 $F_1(s) = \dfrac{1}{s^2}$, $F_2(s) = \dfrac{1}{s-a}$, 于是有 $f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right] = t$; $f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$, 根据卷积性质(3.3.10)式和(3.3.8)式有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-a)}\right] = t * e^{at}$$

$$= \int_0^t (t-\tau)e^{a\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t te^{a\tau}\mathrm{d}\tau - \int_0^t \tau e^{a\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{t}{a}[e^{a\tau}]_0^t - \left[\frac{e^{a\tau}}{a^2}(a\tau-1)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$$

例3.30 求 $F_1(s) = \frac{1}{s}$ 与 $F_2(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ 乘积的原函数。

解: $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s(s^2+\omega^2)}\right] = f_1(t) * f_2(t) = u(t) * \sin\omega t$

$$= \int_0^t u(t-\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$$

但 $u(t-\tau) = \begin{cases} 1, t-\tau > 0 \\ 0, t-\tau < 0 \end{cases}$，故上式成为

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \int_0^t \sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t)$$

例3.31 求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$。

解: $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \cos\omega t * \cos\omega t$

$$= \int_0^t \cos\omega(t-\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$$

利用三角公式：$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

得 $\frac{1}{2}\int_0^t [\cos\omega t + \cos(\omega t - 2\omega\tau)]\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\omega}(\omega t\cos\omega t + \sin\omega t)$

上面最后一步推导，注意对变量 τ 积分时，$\cos\omega t$ 视为常数。

3. 卷积积分的解释

为进一步理解(3.3.8)式中卷积积分 $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 的含义，我们用图解法加以说明。设 $f_1(t)$ 是幅度为1的矩形脉冲函数，$f_2(t)$ 是初始值为1的指数衰减函数，如图3.3.7所示。

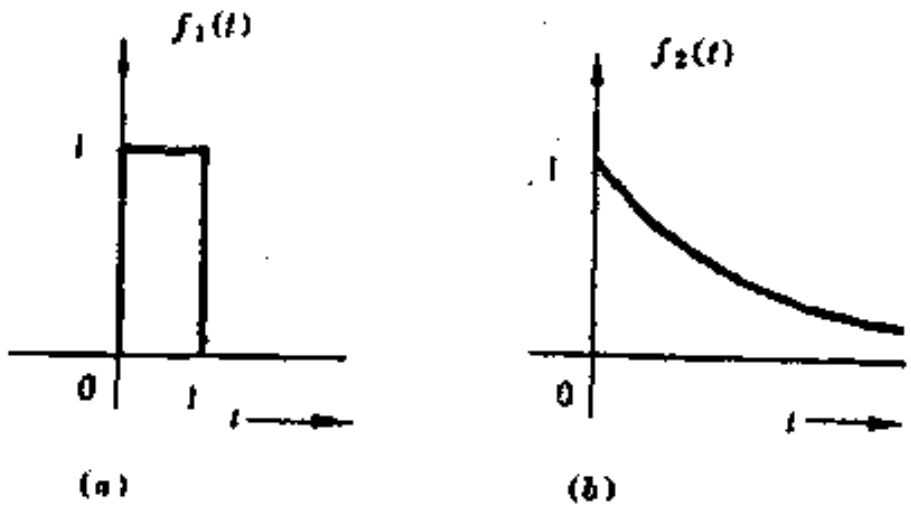


图 3.3.7　矩形脉冲(a)和指数衰减函数(b)

将自变量换为 τ，那么 $f_2(\tau - t)$ 就表示 $f_2(\tau)$ 沿 τ 轴平移一段时间 t，如图(3.3.8a)所示；以 $\tau = t$ 处的垂直线为对称轴，将 $f(\tau - t)$ 曲线反转(将纸折叠)就得到 $f_2(t - \tau)$，如图(3.3.8b)所示；若令 $t = 0$，则 $f_2(t - \tau)$ 成为 $f_2(-\tau)$，$f_2(-\tau)$ 的曲线画在图 3.3.8c 上，该图上同时画出了 $f_1(\tau)$ 的矩形脉冲曲线。现在我们固定 $f_1(\tau)$ 曲线不动，而将 $f_2(t - \tau)$ 曲线逐渐右移(令 $t = 0$、1/2、1、2、3)，横扫过 $f_1(\tau)$ 的曲线[见图 3.3.8 中(c)，(d)，(e)，(f)，(g) 各图形]，各图中阴影的面积表示将两曲线相乘再求积分，即代表了不同时刻 t 的卷积积分值。图 3.3.8h 表示了卷积积分作为 t 的函数而得到的曲线。从以上画图过程可知，卷积积分经历了三个步骤，即保持 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 中一个曲线不动，将另一曲线进行折叠和平移，然后做两曲线的乘积，最后求积分。这些正反映卷积分这一名称的含义。

3.3.6　卷积性质的应用

我们通过几个例子来说明如何在电路分析中应用卷积性质。

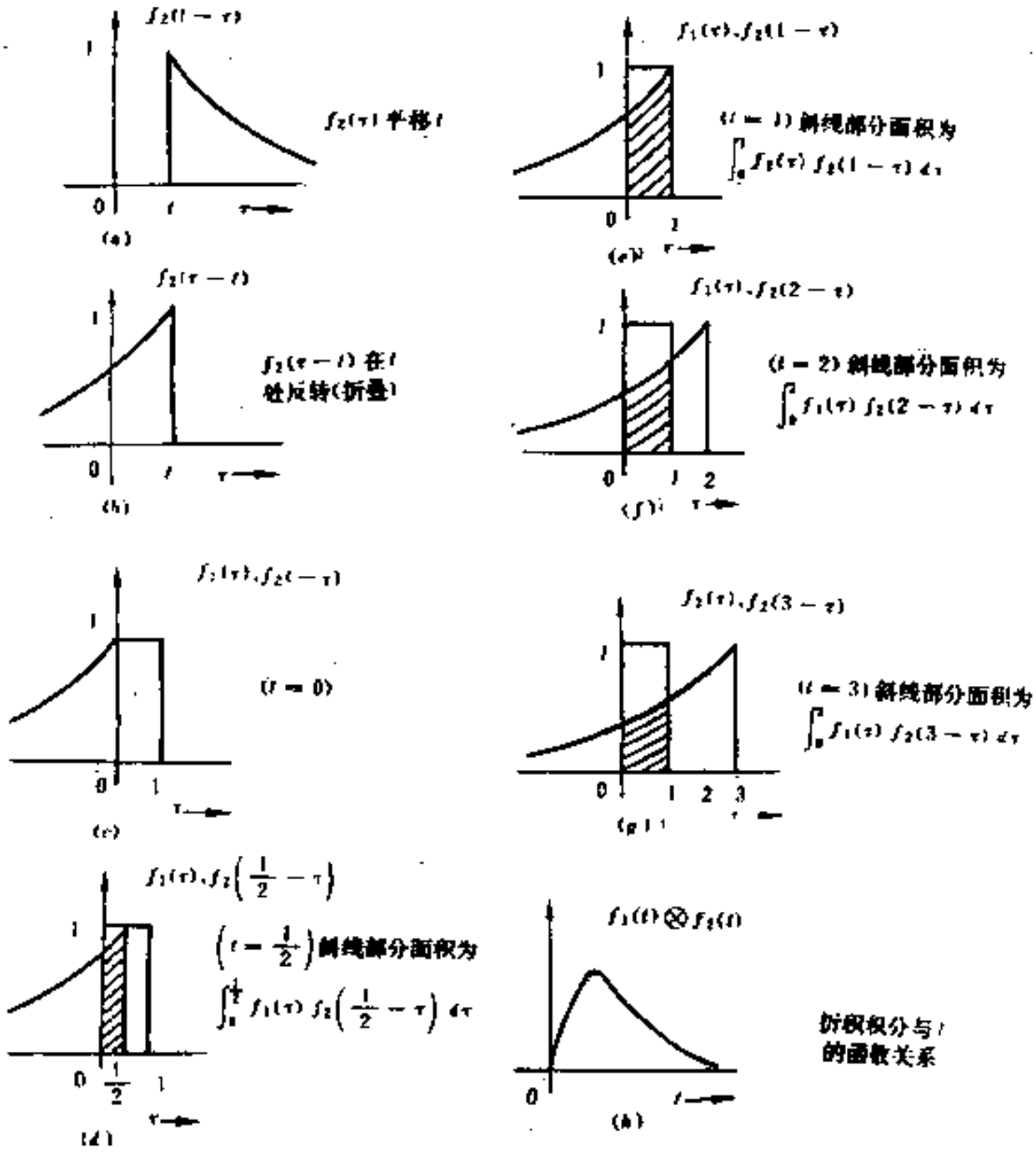


图 3.3.8　卷积积分的图解说明(阴影的面积表示不同时刻 t 的卷积积分值)

1. 衰减信号通过 *RL* 电路

在 *RL* 电路中加上衰减电压源 $v_i(t) = Ee^{-\lambda t}u(t)$，如图3.3.9所示，现求电流 $i(t)$。

由表 3.2.1，这电路的阻抗函数是 $Z(s) = R + Ls$，导纳函数则为 $Y(s) = 1/(R + Ls)$，设外加电压像函数为 $V_i(s)$，则回路电流像函数为：

$$I(s) = V_i(s)Y(s)$$

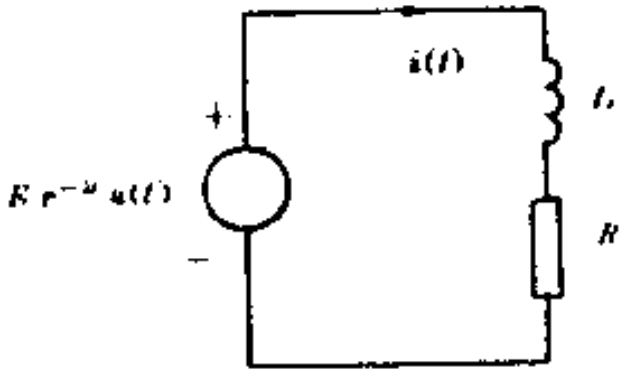


图 3.3.9 *RL* 电路

实际的回路电流是

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}[V_i(s)Y(s)]$$

已知：$\mathscr{L}^{-1}[V_i(s)] = v_i(t)$

$$= Ee^{-\lambda t}u(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{Ls + R}\right]$$

$$= \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{1}{L}e^{-\alpha t} \quad (令\frac{R}{L} = \alpha)$$

根据卷积性质(3.3.8)式有

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}[V_i(s)Y(s)]$$

$$= \int_0^t (Ee^{-\lambda t})\left(\frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{L}\right)d\tau$$

$$= \frac{E}{L}e^{-\alpha t}\int_0^t e^{(\alpha-\lambda)\tau}d\tau$$

$$= \frac{E}{L(\alpha - \lambda)}e^{-\alpha t}[e^{(\alpha-\lambda)t} - 1]$$

$$= \frac{E}{L(\alpha - \lambda)}(e^{-\lambda t} - e^{-\alpha t})$$

这个结果当然也可以用前面介绍过的几种方法求出。

2. 单个脉冲通过 *RLC* 电路

在图 3.3.10 的电路中，输入单个脉冲电压，脉冲波形为半个正弦波，设电路元件参数使电路为过阻尼(不振荡)状态，现求以下两种情况时的输出电压：① 脉冲作用期间，② 脉冲结束以后。

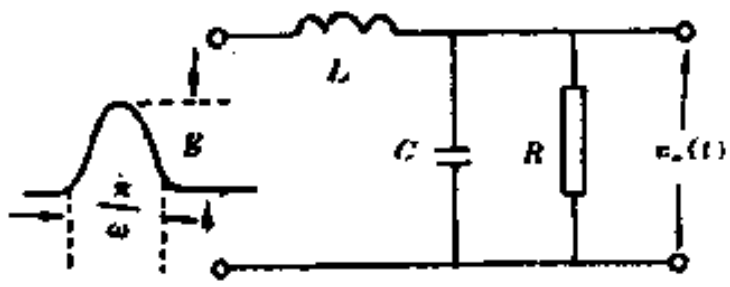


图 3.3.10

给定的输入脉冲波形在例 3.20 中已讨论过。该电路的传输函数是：

$$H(s) = \frac{(Cs + 1/R)^{-1}}{[(Cs + 1/R)^{-1} + Ls]^{-1}} = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}$$

由于电路是过阻尼的，故上式可写为(参考 §3.2.1 关于二阶电路的讨论)：

$$H(s) = \frac{\alpha\beta}{(s + \alpha)(s + \beta)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{s + \beta} - \frac{1}{s + \alpha}\right)$$

其中 $\alpha + \beta = 1/RC$，$\alpha\beta = 1/LC$，对上式做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换得[①]

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)] = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})$$

以下分两种情况讨论：

① 在单个脉冲作用期间，我们可将输入电压写为(以 τ 为自变量)：

$$v_i(\tau) = E\sin\omega\tau \quad \left(0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\pi}{\omega}\right)$$

① $h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)]$ 称为电路的冲激响应，在 §4.1.3 将讨论。

根据卷积性质(3.3.8)式有：

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \mathscr{L}^{-1}[v_i(s)H(s)] \\ &= \int_0^t v_i(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\alpha\beta E}{\alpha-\beta}\int_0^t \sin\omega\tau\left[e^{-\beta(t-\tau)} - e^{-\alpha(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\alpha\beta E}{\alpha-\beta}\left[e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta\tau}\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau - e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right] \end{aligned}$$

注意到$\int_0^t e^{\beta\tau}\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$是$\int_0^t e^{(\beta+j\omega)\tau}\mathrm{d}\tau$的虚部，容易算出：

$$\int_0^t e^{\beta\tau}\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{\beta e^{\beta t}\sin\omega t + \omega(1 - e^{\beta t}\cos\omega t)}{\beta^2+\omega^2}$$

于是最后得到：

$$v_0(t) = \frac{\alpha\beta E}{\alpha-\beta}\left[\frac{\beta\sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\beta t}}{\beta^2+\omega^2} - \frac{\alpha\sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}\right] \tag{3.3.11}$$

这就是从 $t = 0$ 到 $t = \frac{\pi}{\omega}$ 这段时间输出电压随时间的变化关系。

② 在脉冲停止以后：卷积积分的积分区间 $0\to t$ 应分为两部分，即 $0\to\frac{\pi}{\omega}$ 和 $\frac{\pi}{\omega}\to t$，在 $\frac{\pi}{\omega}\to t$ 这段时间输入电压 $v_i(\tau)=0$，仅在 $0\to\frac{\pi}{\omega}$ 这段时间 $v_i(\tau)$ 才对积分有贡献。所以，只要将上述计算中的积分上限由 t 改为 $\frac{\pi}{\omega}$，并注意：

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{\beta\tau}\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{\omega(1+e^{\beta\frac{\pi}{\omega}})}{\beta^2+\omega^2}$$

即可得到

$$v_0(t) = \frac{\alpha\beta E}{\alpha-\beta}\left[\frac{\omega(1+e^{\beta\frac{\pi}{\omega}})e^{-\beta t}}{\beta^2+\omega^2} - \frac{\omega(1+e^{\alpha\frac{\pi}{\omega}})e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}\right] \tag{3.3.12}$$

这就是在 $t \geqslant \frac{\pi}{\omega}$ 时输出电压随时间的变化关系。容易验证：当 $t = \frac{\pi}{\omega}$ 时，(3.3.11) 式和(3.3.12) 式给出同一结果。

3.电容器充电的数值计算

通过 50k 欧姆电阻对 20 微法的电容器充电，充电电压 $v_i(t)$ 的测量结果如下表给出的近似数值：

t(秒)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$v_i(t)$(伏)	0	60	115	145	75	100	135	170	200	195	130

现求 $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 秒时电容两端的电压 $v_0(t)$。

这个 RC 电路的电压传输函数是 $H(s) = a/(s+a)$，其中 a 是时间常数的倒数 $a = 1/RC$，但 $RC = (50 \times 10^3) \times (20 \times 10^{-6})$ 秒 $=$ 1 秒，故 $a = 1$ 秒$^{-1}$。$H(s)$ 的原函数是 $h(t) = e^{-at} = e^{-t}$。电容两端的输出电压 $v_0(t)$ 即由以下卷积积分给出：

$$v_0(t) = \int_0^t v_i(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t v_i(\tau) e^{\tau} d\tau \tag{3.3.13}$$

对于选定的不同的 τ 值，相应的被积函数的数值算出如下表：

τ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$v_i(\tau)e^{\tau}$	0	66	140	196	112	165	246	342	445	480	353

为计算(3.3.13) 式的积分，我们利用抛物线公式[①]。从 $\tau = 0$ 至 $\tau = 0.2$ 的积分近似值是：

---

① 最简单的抛物线公式是：$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$，其中，$x_0 = a$，$x_1$ 可取 $\frac{a+b}{2}$，$x_2 = b$。

$$\int_0^{0.2} v_i(\tau)e^{\tau}d\tau \approx \frac{0.2}{6}[v_i(0)e^0 + 4v_i(0.1)e^{0.1} + v_i(0.2)e^{0.2}]$$

$$= \frac{1}{30}[0 + 4 \times 66 + 140] \approx 13.5$$

类似地有

$$\int_0^{0.4} v_i(\tau)e^{\tau}d\tau \approx 13.5 + \frac{0.2}{6}[v_i(0.2)e^{0.2} + 4v_i(0.3)e^{0.3} + v_i(0.4)e^{0.4}]$$

$$= 13.5 + \frac{1}{30}[140 + 4 \times 196 + 112] \approx 48.0$$

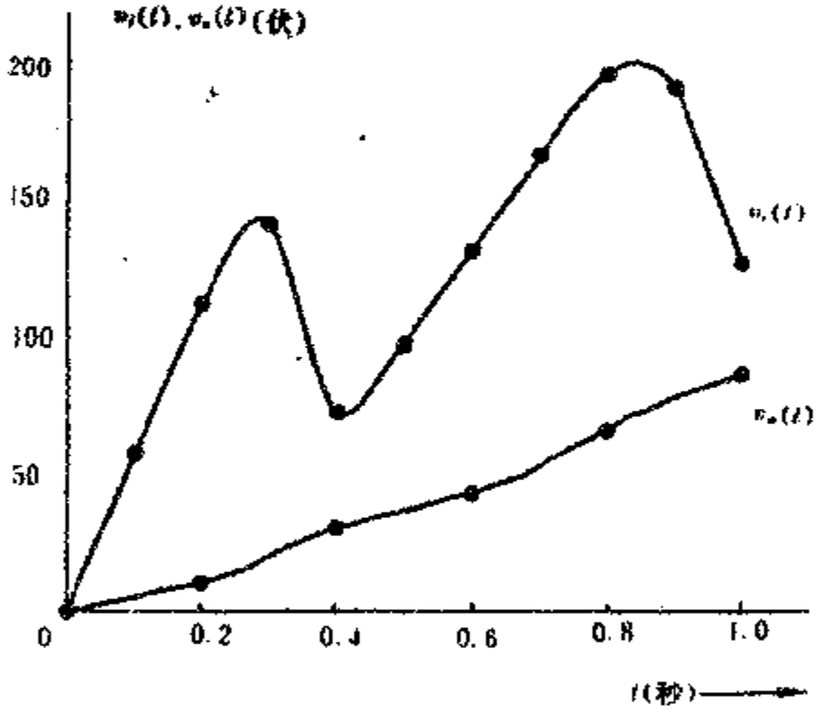


图 3.3.11 *RC* 电路的输入电压和输出电压近似曲线

对于 $t = 0.6, 0.8, 1.0$ 亦同样计算。将每个积分近似值乘以 e^{-t} 就得到不同时刻 t 的电容两端输出电压的数值。计算的详细结果见下表：

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\int_0^t v_i(\tau)e^{\tau}d\tau$(近似值)	0	13.5	48.0	81.9	150.6	241.2
$v_0(t)$(近似值)	0	11	32	45	68	89

由 $v_0(t)$ 的近似结果画出的曲线以及输入电压 $v_i(t)$ 的近似曲线一并在图 3.3.11 中给出。实际上,这类计算是由计算机完成的,这里只是给出一个粗略示意。

这一节讨论了 $\mathscr{L}$ 变换的一些常用性质,其中有些性质和我们已学过的傅里叶变换的性质相似,可以在比较中理解和记忆。$\mathscr{L}$ 变换还有不少其他性质,需要时读者可参阅有关书籍。表 3.4 包括了 $\mathscr{L}$ 变换的主要性质。

表 3.4 $\mathscr{L}$ 变换的主要性质

序号	名　　称	原函数 $f(t), t>0$	像函数 $F(s)$
1	线性叠加	$af_1(t) \pm bf_2(t)$	$aF_1(s) \pm bF_2(s)$
2	时域微分(一阶)	$\dfrac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
3	时域微分(二阶)	$\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
4	时域微分(n 阶)	$\dfrac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f_{(0)}^{(n-1)}$
5	时域积分	$\int f(t)dt$	$\dfrac{F(s)}{s} + \dfrac{f^{(-1)}(0)}{s}$
6	时域积分 $(f^{(-1)}(0) = 0)$	$\int_0^t f(t)dt$	$\dfrac{F(s)}{s}$
7	时移(延迟)	$f(t-T)u(t-T)$	$e^{-sT}F(s)$

续表

序号	名　　称	原函数 $f(t), t>0$	像函数 $F(s)$
8	复频移(衰减)	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
9	相似(伸缩)	$f(\frac{t}{a})$	$aF(as)$
10	初值	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty}[sF(s)]$
11	终值	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0}[sF(s)]$
12	时域卷积积分	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
13	s 域卷积积分	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F_1(s)F_2(s-y)\mathrm{d}y$
14	s 域微分(一阶)	$tf(t)$	$-\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$
15	s 域微分(n 阶)	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$
16	s 域积分	$t^{-1}f(t)$	$\int_0^\infty F(s)\mathrm{d}s$
17	对参变量的偏导数	$\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}$	$\frac{\partial F(s,a)}{\partial a}$
18	对参变量的积分	$\int_{a1}^{a2} f(t,a)\mathrm{d}a$	$\int_{a2}^{a1} F(s,a)\mathrm{d}a$
19	实部对应	$\mathrm{Re}[f(t)]$	$\mathrm{Re}[F(s)]$
20	虚部对应	$\mathrm{Im}[f(t)]$	$\mathrm{Im}[F(s)]$

第四章　电子工程中的拉普拉斯变换方法(Ⅱ)

§4.1　进一步讨论

本章某些内容将用到复变函数理论(参见第五章和第六章)的一些知识,以便深入讨论有关 $\mathscr{L}$ 变换和 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换的几个问题。

4.1.1　$\mathscr{L}$ 变换作为傅里叶变换的推广

从前两章的讨论知道,$\mathscr{L}$ 变换是一个有效的数学工具,它可以把微分方程转化为代数方程。回顾(3.1.1)式所规定的 $\mathscr{L}$ 变换,它是将时间函数 $f(t)$ 乘以因子 e^{-st} 后再从零到 ∞ 对变量 t 积分。再回顾一下我们所学过的傅里叶变换,由第二章(2.1.1)式的规定可知,它是把时间函数 $f(t)$ 乘以因子 $e^{-j\omega t}$ 后再从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对变量 t 积分。可见,这两种变换方法很相似。这使我们想到,它们之间是否有什么内在联系呢?现在我们就来揭示这一点,从而更深刻地认识它们和更有效地使用它们。

第二章(2.1.1)式和(2.1.2)式所规定的"傅里叶变换对"是[①]

$$F(j\omega) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (4.1.1)$$

---

① 由于在这些公式中 ω 总是与符号 j 一起出现,所以本章将 $F(\omega)$ 一律写为 $F(j\omega)$。

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (4.1.2)$$

对于实际存在的信号，总是有它的起始时刻，我们把这时刻作为 $t = 0$，于是当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$（这类仅占时间轴的正半部分的信号称为单边信号）。在这种情况下，“傅里叶变换对”(4.1.1) 和 (4.1.2) 式成为：

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \qquad (4.1.3)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (4.1.4)$$

在 §2.2.2 曾指出，当 $f(t)$ 满足绝对可积条件

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t = \text{有限值} \qquad (4.1.5)$$

时(4.1.1) 式以及(4.1.3) 式的积分才收敛。由于实际信号在时间上有始有终，在能量上有一定限制，故(4.1.5) 式的积分为有限值，满足绝对可积条件。

但是，到现在为止，我们不论在讨论数学问题还是电路问题时，已经使用了许多在时间上为无限的信号函数，即无始无终或有始无终的信号，比如直流电压信号，我们并未规定它的作用时间多长，严格说，应把它理解成从 $t = -\infty$ 到 $t = +\infty$ 的全部时间内恒定不变的电压。又如，一提起正弦周期信号，也不是指有限的几个周期，而是从 $t = -\infty$ 到 $t = +\infty$ 的全部时间内按正弦规律重复的信号。把在时间上为有限的实际信号理想化成在时间上为无限的信号，简化了分析工作。例如，理想化正弦信号的像函数(3.1.6) 式就比有限个周期的正弦信号的像函数(如例 3.20) 简单得多。

对于在时间上为无限的信号，(4.1.5) 式中的积分不收敛①，因而不能应用傅里叶变换。但是我们注意到，对于这类在时间上为

① 例如，对于单位阶跃信号：$f(t) = u(t)$，$\int_0^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} 1\mathrm{d}t \neq$ 有限值。

无限的信号函数 $f(t)$，尽管积分$\int_0^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ 不是有限值，却可以找到一个合适的正实常数 δ，使得积分$\int_0^{\infty}|f(t)|e^{-\delta t}\mathrm{d}t$ 收敛于有限值，只要 $f(t)$ 随时间 t 的增长不比指数函数$e^{-\delta t}$ 快就行。因此，我们可以对函数

$$g(t) = f(t)e^{-\delta t}$$

做傅里叶变换，由(4.1.3)式有

$$\mathscr{L}[g(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\delta+j\omega)t}\mathrm{d}t \qquad (4.1.6)$$

上式对变量 t 积分后，将得到$(\delta + j\omega)$ 的函数：

$$\mathscr{L}[g(t)] = F(\delta + j\omega) \qquad (4.1.7)$$

上式的逆变换是

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\delta + j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

或

$$f(t)e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\delta + j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\delta + j\omega)e^{(\delta+j\omega)t}\mathrm{d}\omega \qquad (4.1.8)$$

在以上各式中，ω 总是以$(\delta + j\omega)$ 形式出现，若将复数 $\delta + j\omega$ 用一个单独字母来表示，则所有的变换式都具有简单明了的形式，为此，我们令

$$s = \delta + j\omega \qquad (4.1.9)$$

由于 ω 为频率，故 s 一般称为广义频率或复频率。上式中 δ 为常数，故有 $\mathrm{d}s = j\mathrm{d}\omega$ 或 $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}s/j$。在(4.1.8)式中，当将积分变量由 ω 改为s时，积分上、下限由 $\omega = -\infty$ 到 $\omega = +\infty$ 变为 $s = \delta - j\infty$ 到 $s = \delta + j\infty$，因此，(4.1.8)式可写成

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F(s)e^{st}\,ds \tag{4.1.10}$$

另一方面，由(4.1.6)和(4.1.7)式有：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \tag{4.1.11}$$

(4.1.11)式正是我们已熟悉的 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换式，$F(s)$ 就是 $f(t)$ 的像函数，而(4.1.10)式则是由像函数 $F(s)$ 求原函数 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换的一般形式。

以上讨论告诉我们，$\mathscr{L}$ 变换可以看作是傅里叶变换的推广，而傅里叶变换是 $\mathscr{L}$ 变换(当 $\delta = 0, s = j\omega$ 时)的特殊情况。从上述推广过程可以看出，关键在于将 $f(t)$ 乘以因子 $e^{-\delta t}$，使之成为收敛函数，满足绝对可积条件。实际上，$g(t) = f(t)e^{-\delta t}$ 的傅里叶变换就相当于 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。另一方面，在求傅里叶逆变换时，积分路线是沿[s]平面的 ω 轴进行的，归结为广义积分[见(4.1.2)式]；而求 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换的(4.1.10)式中，积分路线是沿[s]平面中与 ω 轴平行且相距为 δ 的直线进行的(见图 4.1.1)，这可以利用复变函数理论中的闭路积分(参见 §6.1.4)和留数定理(参见 §6.2.3)来解决，比前者计算广义积分要容易得多。

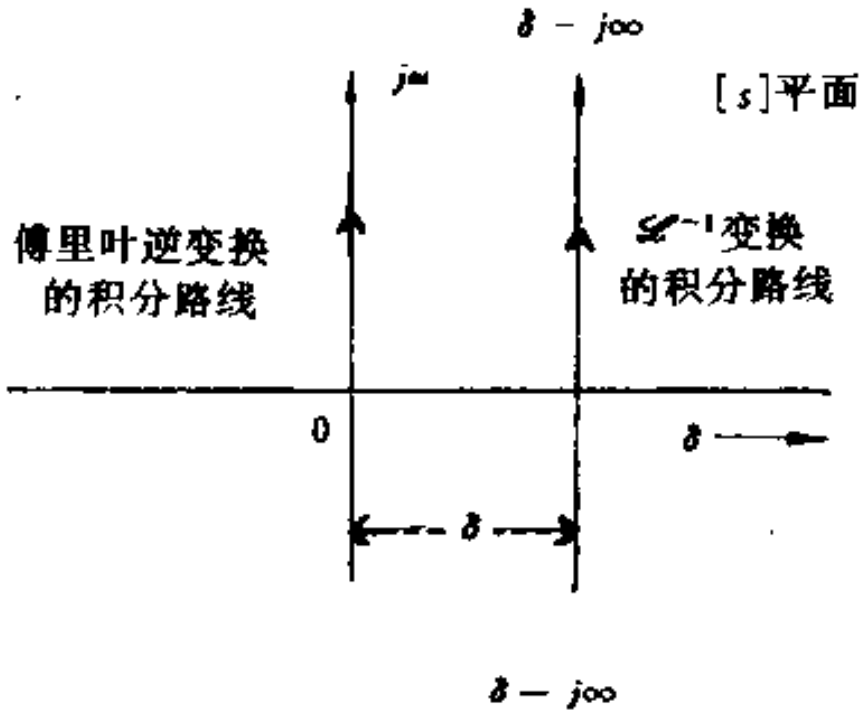


图 4.1.1　逆变换的积分路线

我们再从物理意义上对这两种变换加以比较。在上章中我们曾详细讨论过，傅里叶变换把信号函数 $f(t)$ 变换为频谱函

数 $F(j\omega)$，或把 $F(j\omega)$ 变回 $f(t)$；$\mathscr{L}$变换则是把信号函数 $f(t)$ 变换成复变函数 $F(s)$，或把 $F(s)$ 变回 $f(t)$。$F(s)$ 的物理意义不如 $F(j\omega)$ 那样明确，但在一定条件下令 $s = j\omega(\delta = 0)$ 则 $F(s)$ 就归结为频谱函数 $F(j\omega)$。傅里叶变换建立了时域和频域的联系，而 $\mathscr{L}$ 变换则建立了时域和复频域(s) 域之间的联系。从傅里叶变换推广到 $\mathscr{L}$变换，从频率 ω 推广到复频率 s，ω 只能描述振荡的重复频率，复频率 $s = \delta + j\omega$ 除了能表示重复频率外，还能表示振荡幅度的增长速率或衰减速率。

4.1.2 $\mathscr{L}$积分的收敛问题

我们已经看到，$\mathscr{L}$变换对函数 $f(t)$ 的限制比傅里叶变换宽多了，有不少函数虽不能做傅里叶变换，但却可做 $\mathscr{L}$变换。但是，是否随便什么函数 $f(t)$ 都具有 $\mathscr{L}$变换呢?不是的，还要看 $f(t)$ 的性质与 δ 的大小。例如，若 $f(t) = u(t)$(单位阶跃函数) 和 $\delta < 0$(例如 $\delta = -2$，则 $f(t)e^{-\delta t} = u(t)e^{+2t}$)，则 $f(t)e^{-\delta t}$ 的傅里叶变换(即 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$变换) 就不存在。在这个例子中，若 $\delta > 0$，则 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$变换就存在，因这时指数因子 $e^{-\delta t}$ 是衰减的。

在规定 $\mathscr{L}$变换(3.1.1) 式时就曾指出，前提条件是 $\mathscr{L}$积分

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

存在，亦即这个积分结果为有限，这就要求 $f(t)e^{-\delta t}$ 满足刚刚提到过的绝对可积条件

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\delta t}\mathrm{d}t < \infty \tag{4.1.12}$$

对于一个函数 $f(t)$，如果存在有限的正实数 M 和 α，使得对于 $t > 0$ 的全部 t 值有：

$$|f(t)| < Me^{\alpha t} \tag{4.1.13}$$

则 $f(t)$ 称为**指数阶函数**。不等式(4.1.12) 对于指数阶函数总是可

以满足的。为证明这一点，我们把不等式(4.1.13)代入(4.1.12)，于是有

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\delta t}dt < \int_0^\infty Me^{\alpha t}e^{-\delta t}dt = \int_0^\infty Me^{(\alpha-\delta)t}dt$$

$$= \left[\frac{M}{\alpha-\delta}e^{(\alpha-\delta)t}\right]_{t=0}^{\infty}$$

$$= \frac{M}{\delta-\alpha}, \quad \delta > \alpha$$

可见，只要选取 $\delta > \alpha$，上述积分就是绝对收敛的。

指数阶函数也常常采用另一规定。如果存在一个正实数 α，使得

$$\lim_{t\to\infty}[e^{-\alpha t}f(t)] = 0 \tag{4.1.14}$$

则函数 $f(t)$ 是指数阶函数。意思是，函数 $f(t)$ 的发散可以借助于所乘的指数因子 $e^{-\alpha t}$ 的衰减抑制住，使之成为收敛函数。

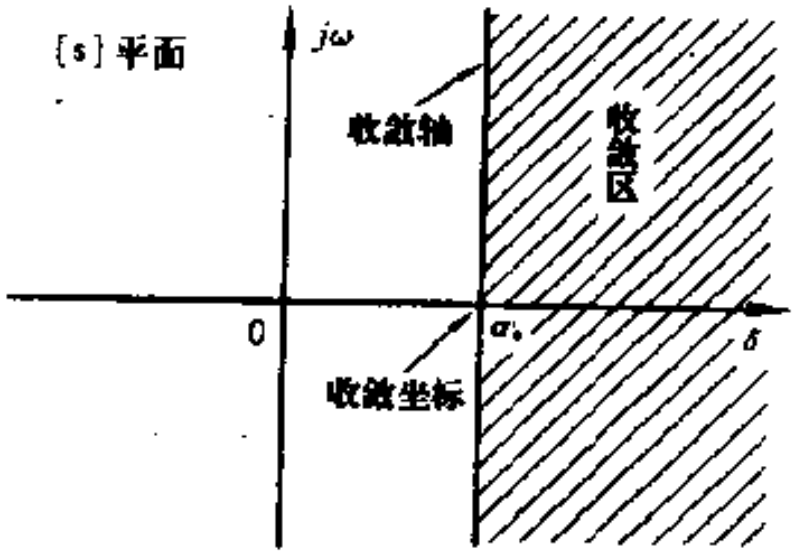


图 4.1.2 $\mathscr{L}$积分的收敛区

从上述讨论可知，如果函数 $f(t)$ 是指数阶函数，则 $\mathscr{L}$ 积分在 $\delta > \alpha$ 的范围内是收敛的[α 满足(4.1.14)式的条件]，亦即 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换存在。这样的函数 $f(t)$ 称为**可变换函数**。满足条件(4.1.14)式的 α 的最小值 α_0 称为 $f(t)$ 的**收敛坐标**，如图4.1.2所示，通过 α_0 的垂直线称为**收敛轴**，它把[s]平面分为两部分，$\delta > \alpha_0$ 的整个区域称为**收敛区**。例如：

(1) 理想的交流信号 $f(t) = \cos\omega t$，其收敛坐标为 $\alpha_0 = 0$，其收敛区为[s]平面，这是因为

$$\lim_{t\to\infty}[\cos\omega t\, e^{-\alpha t}] = 0, (\alpha > 0)$$

实际上任何周期信号的收敛坐标均在原点，也就是说，对它们稍加衰减即收敛。

(2) 单位阶跃函数的收敛坐标亦在 $\alpha_0 = 0$，因为

$$\lim_{t\to\infty}[u(t)e^{-\alpha t}] = 0, (\alpha > 0)$$

(3) 对于随时间正比增长的信号，亦有 $\alpha_0 = 0$，因为

$$\lim_{t\to\infty}[te^{-\alpha t}] = 0, (\alpha > 0)$$

实际上，对于任何与 t^n 成正比增长的信号都有 $\alpha_0 = 0$。

(4) 若函数按指数规律 $e^{\alpha t}(\alpha > 0)$ 增长，则收敛坐标 $\alpha_0 = \alpha$，因为

$$\lim_{t\to\infty}[e^{\alpha t}e^{-\alpha t}] = 0, (\alpha > 0)$$

(5) 凡是有始有终、能量有限的信号(如单个脉冲信号)，其收敛坐标在 $-\infty$，即整个[s]平面都是收敛区。这就是说，有界的非周期信号的 $\mathscr{L}$ 变换必定存在。我们注意到，一般收敛区仅限于 $\alpha > \alpha_0$ 的区域，不包括 $\alpha = \alpha_0$ 的收敛轴在内，因为当 $\alpha = \alpha_0$ 时，$f(t)e^{-\alpha t}$ 可能是发散的。例如：

$$\lim_{t\to\infty}[\cos\omega t\, e^{-\alpha t}] = 0, (\alpha > 0)$$

但

$$\lim_{t\to\infty}[\cos\omega t\, e^{-\alpha t}] = \text{不定值}, (\alpha = 0)$$

故函数 $\cos\omega t\, e^{-\alpha t}$ 的收敛区不包含[s]平面的虚轴。

有的读者会问，到底什么样的函数不能做 $\mathscr{L}$ 变换呢？可以说，凡是随时间增长比 $Me^{\alpha t}$(M 和 α 为任意正实数)还快的函数，即非指数阶函数，都不能做 $\mathscr{L}$ 变换，例如 $f(t) = e^{t^2}$ 或 $f(t) = t^t$ 这类函数都不能做 $\mathscr{L}$ 变换，不过，这类函数已经没有什么实际意义。

最后，我们注意到，在使用表 3.1 给出的常用函数的 $\mathscr{L}$ 变换表时，严格说，应该对每一个“变换对”附加上收敛区域的要求

$$\mathrm{Re}[s] = \delta > \alpha_0 \tag{4.1.15}$$

对于不同的“变换对”，收敛坐标 α_0 可能是不同的。由于电路分析中遇到的时间函数 $f(t)$ 大多是满足这个要求的，故在第三章我们没有强调这个问题。

4.1.3 δ 函数的 $\mathscr{L}$ 变换

在常用函数的 $\mathscr{L}$ 变换表(表 3.1) 中，对第 20 个“变换对” 还没有讨论，这是我们现在的任务。在 §2.2.1 已经比较详细讨论过什么是 δ 函数，它是怎样从实际电路问题中抽象出来的，以及它在信息传输中的作用。那时，我们曾把 δ 函数当作持续时间 $T\to 0$ 而脉冲幅度为 $1/T$ 的单个矩形脉冲的极限，在 $T\to 0$ 和 $1/T\to\infty$ 的过程中，矩形面积恒等于 1。

1. δ 函数作为脉冲的极限

在例 3.19 中，我们曾讨论过单个矩形脉冲的 $\mathscr{L}$ 变换，我们是把幅度为 1 的单个矩形脉冲 $f(t)$ 视为两个单位阶跃函数之差：

$$f(t) = u(t) - u(t-T)$$

对于幅度为 $1/T$ 的单个矩形脉冲则有

$$f(t) = \frac{1}{T}[u(t) - u(t-T)]$$

上式当 $T\to 0$ 时的极限就是 δ 函数：

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}[u(t) - u(t-T)] \tag{4.1.16}$$

(4.1.16) 式有时也作为 δ 函数的定义[①]。利用例 3.19 的结果有

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{T}\{u(t) - u(t-T)\}\right] = \frac{1}{sT}(1 - e^{-sT})$$

于是 δ 函数的 $\mathscr{L}$ 变换为

---

① (4.1.16) 式右端正是 $u(t)$ 的一阶导数的定义，所以 $\delta(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$。这是可以理解的，因为 $u(t)$ 在 $t = 0$ 处斜率为 ∞，而在 $t \neq 0$ 处斜率为零。

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \lim_{T\to 0}\frac{1}{sT}(1 - e^{-sT}) = 1 \qquad (4.1.17)$$

即 $\delta(t)$ 的像函数是 1，这就是表 3.1 中第 20 个“变换对”的简单证明。

2. 较严格的考虑

在 §2.2.1 中我们曾把 δ 函数定义为[(见 2.2.4) 式]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t = f(t_0) \qquad (4.1.18)$$

其中 $f(t)$ 是在 $t = t_0$ 点连续的函数。上式的意思是说，δ 函数的作用是指定函数 $f(t)$ 取 $t = t_0$ 的数值 $f(t_0)$，即在 $t = t_0$ 对信号函数 $f(t)$ 取样。

现在来求 $\delta(t - t_0)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换。根据(3.1.1) 式有

$$\mathscr{L}[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-st}\mathrm{d}t$$

由(4.1.18) 式上式的结果为

$$\mathscr{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-st_0} \qquad (4.1.19)$$

在(4.1.19) 式中令 $t_0 \to 0$，得到

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1 \qquad (4.1.20)$$

这里尚存在一个含混不清的问题，我们把(4.1.20) 式写成 $\mathscr{L}$ 积分的形式：

$$\int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t = 1$$

对于在 $t = 0$ 点不连续的函数或在 $t = 0$ 点无定义的函数(如 δ 函数)，上式左端积分下限有两种理解：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_{x}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

或者

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_{-x}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

前一种理解是 x 取正值趋于零;后一种理解是 x 取负值趋于零。前一种情况下 δ 函数的"尖峰"未被包含在积分界限之内,积分为零(当 $t \neq 0$ 时,$\delta(t) = 0$)。后一种情况下"尖峰"被包含进去,积分结果为 1。通常采用 0^+ 和 0^- 来表示这两种情况的积分下限:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x) = 0^-$$

在一般应用中都采用 δ 函数的 $\mathscr{L}$ 变换为 1,亦即规定

$$\mathscr{L}_-[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \tag{4.1.21}$$

但也有采用 0^- 为积分下限的,这时有

$$\mathscr{L}_+[\delta(t)] = \int_{0^+}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 0 \tag{4.1.22}$$

本书采用较为普遍使用的(4.1.21)式。

3. 单位冲激响应

δ 函数在信息传输中是很有用的分析工具,在 §2.2 和 §2.3 我们已介绍过一些实例,这里仅讨论一下冲激响应问题。

我们知道,如果一个窄脉冲的宽度 T 远小于电路的响应时间 T_0(即带宽的倒数),那么这个窄脉冲就可以近似看作 δ 函数,或称单位冲激函数(简称冲激函数)。现在我们如果把一个冲激函数信号输入到一个线性电路(设电路的起始状态为零),则输出信号 $h(t)$ 称为这个电路的冲激响应(单位冲激响应)。

根据(3.2.13)式,输入信号的像函数 $V_i(s)$ 与电路的传输函数 $H(s)$ 的乘积就等于输出信号的像函数 $V_o(s)$:

$$V_o(s) = H(s) V_i(s)$$

现在输入信号是 $\delta(t)$,它的像函数是 $\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$,因此输出信号的像函数是

$$V_o(s) = H(s) \cdot 1 = H(s) \tag{4.1.23}$$

上式告诉我们,输入 $\delta(t)$,则输出信号的像函数就是电路的传输函数本身。对(4.1.23)式做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换:

$$\mathscr{L}^{-1}[V_o(s)] = \mathscr{L}^{-1}[H(s)]$$

但 $\mathscr{L}^{-1}[V_o(s)] = h(t)$，即输入 $\delta(t)$ 时的输出信号(冲激响应)，故有

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)] \text{ 或 } H(s) = \mathscr{L}[h(t)] \qquad (4.1.24)$$

所以，一个线性电路的传输函数 $H(s)$ 就是该电路的冲激响应 $h(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换式，$h(t)$ 和 $H(s)$ 构成一个“变换对”。$H(s)$ 能够反映电路的全部特性，$h(t)$ 同样也能够反映电路的全部特性。各种电路的冲激响应 $h(t)$ 有两个共同的特点(对于集中参数的不随时间而变化的线性网络而言)：第一，当 $t < 0$ 时，$h(t) = 0$，就是说，在信号输入电路以前($t < 0$)不可能有输出，这反映了电路的因果制约性。前因后果，信号通过电路时，电路只能延迟信号，不能提前输出信号。第二，当 $t \to \infty$ 时，$h(t) \to 0$，这说明，输出信号的能量只能比输入信号的能量愈来愈小，不能比输入信号的能量大。这一特点反映了电路的稳定性。因此，冲激响应 $h(t)$ 的一般形式是从零值增长到最大值再逐渐下降趋于零，如图 4.1.3 所示。

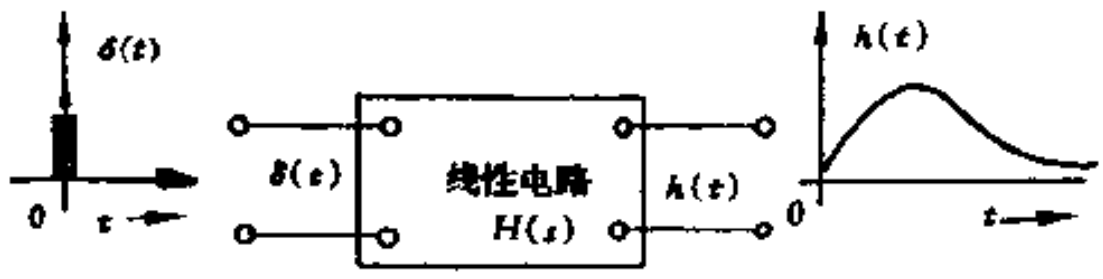


图 4.1.3　线性电路的冲激响应

我们较详细地讨论电路的冲激响应，其目的不在于研究冲激信号本身，而在于只要知道了一个电路的冲激响应，就可以求出该电路对任意输入信号的响应(即输出信号)。设 $v_i(t) = \mathscr{L}^{-1}[V_i(s)]$ 表示任意的输入信号，相应的输出信号是 $v_o(t) = \mathscr{L}^{-1}[V_o(s)]$，根据(3.2.13)式和卷积性质(3.3.8)式有

$$v_o(t) = \mathscr{L}^{-1}[v_o(s)] = \mathscr{L}^{-1}[H(s)V_i(s)]$$

$$= h(t) * v_i(t)$$

$$= \int_0^t h(\tau) v_i(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{4.1.25}$$

可见，只要知道一个电路的冲激响应 $h(t)$，就可以利用卷积积分的方法，求出该电路对任意输入信号 $v_i(t)$ 的响应 $v_o(t)$，具体计算方法已在 §3.3.6 给出。在实际问题中，常常遇到这样的情况，不易写出根据实验数据所描绘出的信号波形的数学表示式，而卷积积分可以利用图解法或数值积分法求得积分结果。所以，利用冲激响应求任意响应的方法很有实际意义(注意，在电路的起始条件是零的情况下才能这样做)。

4.1.4 0^+ 系统和 0^- 系统

1.什么是 0^+ 系统和 0^- 系统

为了使电路分析工作简化，引入了单位阶跃函数 $u(t)$ 和单位冲激函数 $\delta(t)$ 等理想化的信号函数，但它们也带来一些麻烦。一个重要的问题是，对于这些在 $t=0$ 处发生跳变的函数，如何确定它们的起始点和函数的起始值。对于在 $t=0$ 处没有跳变的函数 $f(t)$ 是好办的，因为 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，起始点就是 $t=0$，不必区分 $f(0^-)$ 和 $f(0^+)$。这时 $\mathscr{L}$ 变换式的积分下限就取为零：

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

对于在 $t=0$ 处有跳变的函数，$f(0^-)\neq f(0^+)$，或 $f(0)$ 无定义。对这类函数做 $\mathscr{L}$ 变换可以有以下两种理解：

$$F(s) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^+}^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{4.1.26a}$$

或者

$$F(s) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_{-x}^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0^-}^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{4.1.26b}$$

若 $f(t) = \delta(t)$，像前面刚讨论过的那样，则(4.1.26a) 式给出 $F(s) = 0$ 的结果，而(4.1.26b) 式给出 $F(s) = 1$ 的结果。可见对在 $t = 0$ 处发生跳变的函数，以上两种理解可能给出不同的结果。

为避免混乱，可以采取初始值为 $f(0^-)$，$\mathscr{L}$积分下限为 0^-，并在全部分析工作中始终照此办理，这样的规定称为 $\mathscr{L}$变换的 0^- 系统。也可以在全部分析工作中始终如一地采用初始值为 $f(0^+)$ 和 $\mathscr{L}$积分下限为 0^+，这样的规定称为 $\mathscr{L}$变换的 0^+ 系统。下面简单讨论一下采用 0^- 系统和 0^+ 系统对 $\mathscr{L}$变换某些性质(与初值有关的) 的影响。

2. 微分性质与系统选取有关

$\mathscr{L}$变换的时域微分性质(见表 3.4 公式 2) 是

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f(0) \tag{4.1.27}$$

这公式对于在 $t = 0$ 点不发生跳变的函数是无可非议的。对于在 $t = 0$ 点发生跳变的函数，我们举例说明如下。考虑 $f(t) = e^{-at}u(t)$(图 4.1.4)，它的 $f(0^-) = 0$，而 $f(0^+) = 1$，我们来求 $f'(t) = \mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$ 的 $\mathscr{L}$变换。首先注意到(见关于(4.1.16) 式的注释)

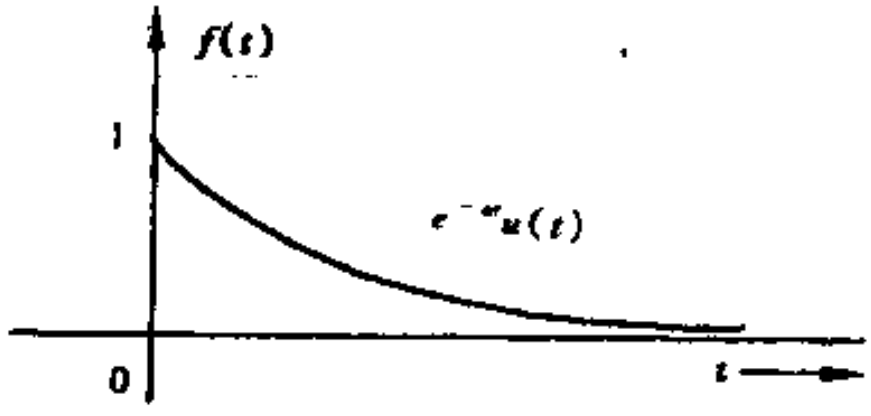


图 4.1.4　接通指数衰减函数

$$u'(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t) \tag{4.1.28}$$

我们有：

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-at}u(t)] = -ae^{-at}u(t) + e^{-at}\delta(t)$$

(1) 按 0^- 系统计算：即将 $t = 0$ 改为 $t = 0^-$，按(4.1.26b) 式的 $\mathscr{L}$

积分计算，有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_{0-}^{\infty} f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} [-ae^{-at}u(t) + e^{-at}\delta(t)]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} [e^{-(a+s)t}\delta(t) - ae^{-(a+s)t}]\mathrm{d}t$$

$$= 1 + \left[\frac{ae^{-(a+s)t}}{a+s}\right]_{0^-}^{\infty} \quad [\text{利用了(4.1.18)式，} t_0 = 0 \text{ 的情况}]$$

$$= 1 - \frac{a}{a+s} = \frac{s}{s+a}$$

再利用微分性质(4.1.27)式计算，注意 $f(0^-) = 0$，有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-) = sF(s)$$

其中

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{e^{-(a+s)t}}{-(s+a)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

$$\therefore \mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) = \frac{s}{s+a}$$

可见，在 0^- 系统中，按微分性质(4.1.27)式计算与直接由 $\mathscr{L}$ 积分计算，其结果是一致的。

(2) 按 0^+ 系统计算：将 $t = 0$ 改为 $t = 0^+$，按(4.1.26a)式的 $\mathscr{L}$ 积分计算，有：

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} [e^{-(a+s)t}\delta(t) - ae^{-(a+s)t}]\mathrm{d}t$$

$$= 0 + \left[\frac{ae^{-(a+s)t}}{s+a}\right]_{0^+}^{\infty}$$

$$= \frac{-a}{s+a}$$

以上推导中，包含 $\delta(t)$ 那项的积分为零。因为在 $t = 0^+$ 到 $t \to \infty$ 这段范围中 $\delta(t) = 0$，以下再用微分性质(4.1.27)式在 0^+ 系统中计算，注意 $f(0^+) = 1$，有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^+) = s\left(\frac{1}{s+a}\right) - 1 = \frac{-a}{s+a}$$

可见，在 0^+ 系统内，按微分性质(4.1.27)式计算的结果与直接由 $\mathscr{L}$ 积分计算的结果也是一致的。

由这个例子的详细讨论，我们可以得出以下两点认识。第一，不论在哪个系统中，微分性质(4.1.27)式都与按 $\mathscr{L}$ 积分定义的计算结果一致，微分性质(4.1.27)式在同一系统中是靠得住的；第二，微分性质(4.1.27)式在 0^- 系统和 0^+ 系统中可能给出不同的结果，这是由于出现冲激函数 $\delta(t)$ 而引起的。

3. 初值性质不受系统选择的影响

初值性质(3.3.7)式对于在 $t = 0$ 处没有跳变的函数是毫无问题的，对于在 $t = 0$ 处发生跳变的函数，我们应慎重考虑，像讨论(3.3.7)式一样，我们仍由微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t = sF(s) - f(0) \tag{4.1.29}$$

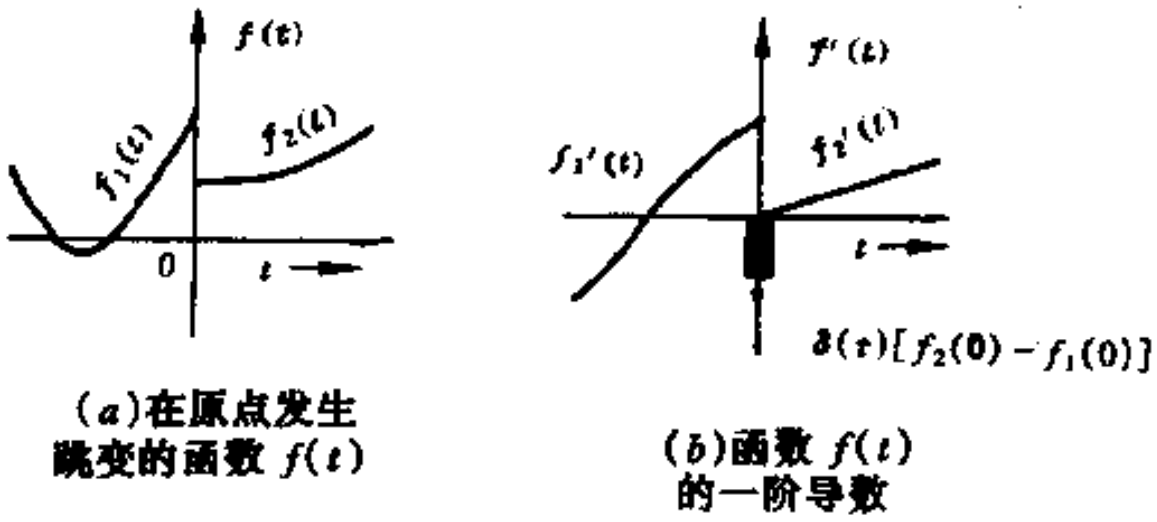
出发来讨论。对于任意的在 $t = 0$ 处发生跳变的函数，总可表示成

$$\begin{aligned} f(t) &= [1 - u(t)]f_1(t) + u(t)f_2(t) \\ &= \begin{cases} f_1(t), & t < 0 \\ f_2(t), & t > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

其中 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分别是无跳变的连续函数(见图 4.1.5a)。对上式求导数得(见图 4.1.5b)

$$f'(t) = [1 - u(t)]f_1'(t) - \delta(t)f_1(t) + u(t)f_2'(t) + \delta(t)f_2(t)$$

$$= [1 - u(t)]f_1'(t) + \delta(t)[f_2(t) - f_1(t)] + u(t)f_2'(t)$$



(a)在原点发生跳变的函数 $f(t)$

(b)函数 $f(t)$ 的一阶导数

图 4.1.5　不连续函数

(1)0^- **系统**:这时(4.1.29) 式中的积分为(注意:当 $t > 0$ 时,$[1 - u(t)]f_1'(t) = 0$):

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \{[f_2(t) - f_1(t)]\delta(t) + f_2'(t)\} e^{-st} dt$$

$$= f_2(0) - f_1(0) + \int_{0^-}^{\infty} f_2'(t)e^{-st} dt$$

其中

$$f_2(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f_2(t) = f(0^+);$$

$$f_1(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} f_1(t) = f(0^-)$$

在 0^- 系统中(4.1.29) 式右端成为 $sF(s) - f(0^-)$,于是(4.1.29) 式可重写为

$$f(0^+) - f(0^-) + \int_{0^-}^{\infty} f_2'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-)$$

或

$$f(0^+) + \int_{0^-}^{\infty} f_2'(t)e^{-st} dt = sF(s)$$

对上式两端取 $s\to\infty$ 时的极限，注意 $f_2(t)$ 是无跳变的连续函数，因而 $f_2'(t)$ 是有限的，当 $s\to\infty$ 时上式中的积分为零，故有初值性质：

$$f(0^-)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)]$$

(2)0^+ 系统：这时(4.1.29)式成为

$$\int_{0^+}^{\infty}f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t=sF(s)-f(0^+)$$

由于当 $t>0$ 时 $f(t)=f_2(t)$ 是无跳变的连续函数，所以当 $t>0$ 时 $f'(t)=f_2'(t)$ 是有限的，对上式两端取 $s\to\infty$ 时的极限，左端的积分为零，故有初值制质：

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)]$$

可见不论在 0^- 系统还是在 0^+ 系统，初值性质都是一样，即初值总是取 $f(t)$ 在 $t=0^+$ 时的数值，初值性质不受系统选择的影响。

4.0^- 和 0^+ 系统中的微分方程

我们以串联 RLC 电路为例来讨论。如果外加电压是单位冲激信号 $\delta(t)$，则相应的微分方程是(参阅图 3.2.2)：

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t=\delta(t)\qquad(4.1.31)$$

在 0^- 系统中对上式两端做 $\mathscr{L}$ 变换得

$$RI(s)+LsI(s)-Li(0^-)+\frac{I(s)}{Cs}+\frac{v(0^-)}{s}=1\qquad(4.1.32)$$

其中 $v(0^-)=\frac{1}{C}\left[\int i(t)\mathrm{d}t\right]_{t=0^-}$ 表示电容器的初始电压(开关合上以前)，$i(0^-)$ 表示电感中的初始电流(开关合上以前)。

若在 0^+ 系统中对(4.1.31)两端做 $\mathscr{L}$ 变换得

$$RI(s)+LsI(s)-Li(0^+)+\frac{I(s)}{Cs}+\frac{v(0^+)}{s}=0\qquad(4.1.33)$$

其中 $i(0^+)$ 和 $v(0^+)$ 是开关合上以后的初始电流和初始电压，方程右端为零是由于在 0^+ 系统中 $\mathscr{L}_+[\delta(t)]=0$[见(4.1.22)式]。可见，在 0^- 系统和 0^+ 系统中电路的方程是不同的。这是由于有冲激信号存在的缘故。在有冲激信号的理想情况下，电容电压 $v_c(t)$ 或电感电流 $i_L(t)$ 在 $t=0$ 时刻可以发生突然变化，所以 $v_c(0^-)\neq v_c(0^+)$，$i_L(0^-)\neq i_L(0^+)$。在不存在冲激的情况下，$v_c(0^-)=v_c(0^+)$，$i_L(0^-)=i_L(0^+)$，这时方程(4.1.32)和(4.1.33)就是一样的。

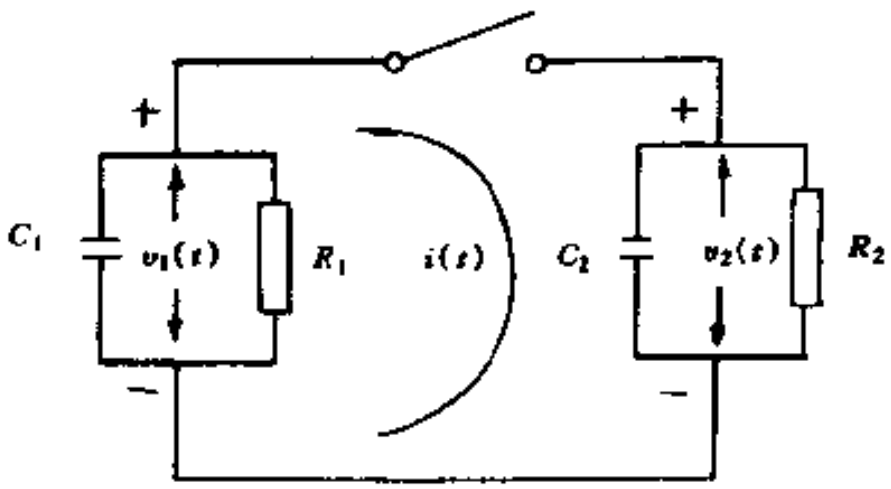


图 4.1.6　电容充放电

我们不妨把开关合上以前的初值 $f(0^-)$ 称为前初值，把开关合上以后的初值 $f(0^+)$ 称为后初值。在电路问题中，前初值常常是已知的，后初值是未知的。若采用 0^- 系统，则电路方程式的初始值是已知的前初值，不必再费一番功夫去求后初值。若用 0^+ 系统就势必还要由前初值去推求后初值，这是比较麻烦的。所以采用 0^- 系统有一定优越性。

5. 两个电容器充放电分析

在 $t=0$ 时刻把一个已充电(电压为 v_0)的电容器与一个未充电的电容器连接起来。现确定放电电流随时间的变化规律。图 4.1.6 中的电阻表示电容器的损耗。

在开关合上以前，电容器的初始电压是：

$$v_1(0^-)=v_0;\quad v_2(0^-)=0 \tag{4.1.34}$$

电流的表示式为

$$i(t) = C_2 \frac{\mathrm{d}v_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_2(t)}{R_2} = -\left[C_1 \frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_1(t)}{R_1}\right]$$

对上式各项做 $\mathscr{L}$ 变换得：

$$I(s) = sC_2 V_2(s) - C_2 v_2(0^-) + \frac{V_2(s)}{R_2}$$

$$= -\left[sC_1 V_1(s) - C_1 v_1(0^-) + \frac{V_1(s)}{R_1}\right]$$

将前初值代入上式得

$$I(s) = sC_2 V_2(s) + \frac{V_2(s)}{R_2}$$

$$= -\left[sC_1 V_1(s) - C_1 v_0 + \frac{V_1(s)}{R_1}\right]$$

当开关合上以后($t > 0$)，显然 $v_1(t) = v_2(t)$，于是 $V_1(s) = V_2(s) = V(s)$，上式成为

$$\left[s(C_1 + C_2) + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]V(s) = C_1 v_0$$

令

$$C_1 + C_2 = C; \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}; \quad \frac{1}{RC} = a$$

得电压像函数为

$$V(s) = \frac{C_1 v_0}{C} \cdot \frac{1}{s + a} \tag{4.1.35}$$

于是合上开关后电压随时间的变化为(对上式做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换)：

$$v(t) = \frac{C_1 v_0}{C} e^{-at}, \quad t > 0$$

由上式可知，合上开关后电容电压的初始值是

$$v(0^+) = v_1(0^+) = v_2(0^+) = \frac{C_1 v_0}{C} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_0$$

这与开关合上以前电容电压的初始值(4.1.34) 式是不同的。在

$t = 0$ 时刻存在着电压跳变。为计算电流 $i(t)$，我们将(4.1.35)式除以电容 C_2 的阻抗函数，得 $i(t)$ 的像函数：

$$I(s) = \left(sC_2 + \frac{1}{R_2}\right)V(s) = \frac{C_1C_2v_0}{C} \cdot \frac{s + \dfrac{1}{R_2C_2}}{s + a}$$
$$= \frac{C_1C_2}{C}v_0 + \frac{C_1C_2}{C}v_0\left(\frac{1}{R_2C_2} - a\right)\frac{1}{s + a}$$

于是有

$$i(t) = \frac{C_1C_2}{C}v_0\delta(t) + \frac{C_1C_2}{C}v_0\left(\frac{1}{R_2C_2} - a\right)e^{-at} \tag{4.1.36}$$

由(4.1.36)式看到，电流 $i(t)$ 包含冲激项和指数衰减项，这应如何理解呢?我们知道，在开关合上以前电容器 C_1 中储有一定数量的电荷 $q_0 = C_1v_0$，当开关合上以后，由于在图 4.1.6 的理想情况下电流 $i(t)$ 流经的路径上没有电感和电阻，因而电荷 q_0 的一部分$\left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2}q_0\right)$以冲激的方式一下子被投到电容器 C_2 上。在投置这一部分电荷时，可以认为没有花费时间(理想情况)，而电流不过是电荷的时间变化率，所以在一瞬间所形成的电流是无限大，这就是(4.1.36)式中冲激项的物理意义。

4.1.5 $F(s)$ 的解析性

$\mathscr{L}$变换把时域中的电路问题转移到 s 域中来讨论，把时域中的函数 $f(t)$ 转化为 s 域中的函数$F(s)$。$F(s)$ 是以 $s = \delta + j\omega$ 为变量的复变函数。现在我们要问，$F(s)$ 在它的定义域内(收敛区内)是不是解析函数呢?如果 $F(s)$ 是解析函数，那么关于解析函数的许多有用的性质就都适用于像函数 $F(s)$，所以这是一个很重要的问题。

下面我们简要证明 $F(s)$ 在它的定义域内确为解析函数。为

此，就必须证明 $F(s)$ 具有各阶导数，并是 s 的单值函数(在 $\mathrm{Re}[s] > \alpha_0$ 的区域内)。

首先，我们把 $\mathscr{L}$ 积分上限改为有限值 T：

$$F_T(s) = \int_0^T f(t)e^{st}\mathrm{d}t \tag{4.1.37}$$

最后再使 T 趋于无穷，根据导数的定义有

$$\frac{\mathrm{d}F_T(s)}{\mathrm{d}s} = \lim_{a\to 0}\frac{F_T(s+a)-F_T(s)}{(s+a)-s} \tag{4.1.38}$$

将(4.1.37)式代入上式得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F_T(s)}{\mathrm{d}s} &= \lim_{a\to 0}\int_0^T \frac{f(t)e^{-(s+a)t}-f(t)e^{-st}}{a}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{a\to 0}\int_0^T f(t)e^{-st}\left(\frac{e^{-at}-1}{a}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}\tag{4.1.39}$$

把 e^{-at} 展开为泰勒级数：

$$e^{-at} = 1 - at + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots \tag{4.1.40}$$

再将(4.1.40)式(取前二项)代入(4.1.39)式，交换积分和求极限的次序，然后取极限：

$$\frac{\mathrm{d}F_T(s)}{\mathrm{d}s} = \int_0^T (-t)f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{4.1.41}$$

这里积分和求极限的次序可以交换，是因为我们假定 $f(t)$ 使 $\mathscr{L}$ 积分具有一致收敛性。现在再对(4.1.41)式求导数，用 $tf(t)$ 代替(4.1.37)式中的 $f(t)$，重复上述步骤几次，最后可得

$$\frac{\mathrm{d}^nF_T(s)}{\mathrm{d}s^n} = \int_0^T (-t)^n f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{4.1.42}$$

由于上述积分上、下限是有界的，并假定 $f(t)$ 的值局限于这上、下限之内，这样，对所有的整数 n，(4.1.42)式的积分存在，故 $F_T(s)$ 的各阶导数存在。

现在考虑 $T\to\infty$ 时的情况。假定 $t^nf(t)$ 是指数阶函数[通常以 t^n 乘 $f(t)$ 并不改变 $f(t)$ 的收敛坐标 α_0]，则当 T 足够大时总

可使

$$|t^n f(t)| \leqslant Me^{\alpha_0 t}, \quad t \geqslant T \tag{4.1.43}$$

我们把从零到 ∞ 的积分写成两部分：

$$\int_0^T (-t)^n f(t) e^{-st} dt + \int_T^\infty (-t)^n f(t) e^{-st} dt = \frac{d^n F_T(s)}{ds^n} + \xi \tag{4.1.44}$$

其中

$$\xi = \int_T^\infty (-t)^n f(t) e^{-st} dt$$

将不等式(4.1.43) 代入上式得

$$|\xi| \leqslant \int_T^\infty Me^{-(\delta-\alpha_0)t} dt = \frac{M}{\delta - \alpha_0} e^{-(\delta-\alpha_0)T}$$

由于 $\mathrm{Re}[s] = \delta > \alpha_0$(指数阶函数的收敛坐标)，所以 $\lim_{T\to\infty} \xi = 0$，进而有

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-st} dt, \quad \mathrm{Re}[s] > \alpha_0 \tag{4.1.45}$$

因此，只要 $\mathrm{Re}[s] > \alpha_0$，$F(s)$ 的各阶导数就存在。

此外，由于 $f(t)e^{-st}$ 是 s 和 t 的单值函数，在 $\mathrm{Re}[s] > \alpha_0$ 的区域，$\mathscr{L}$ 积分一致收敛。因此，$F(s)$ 是 s 的单值函数。这样，我们就简略证明了 $F(s)$ 在它的定义域内是解析的。对于 $F(s)$ 可以应用复变函数理论中关于解析函数的各种性质，详见 §5.2、§6.1 和 §6.2。

§4.2 计算 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换的一般方法

4.2.1 部分分式展开法

1.分式函数

在前面我们已讨论过由简单的像函数 $F(s)$ 求相应的原函数 $f(t)$ 的方法。可以直接由表3.1的 $F(s)$ 查出相应的 $f(t)$；或者把 $F(s)$ 化为几个简单的 s 函数之和，而每个 s 函数可以查表。对于更复杂的 $F(s)$，上述做法是有困难的。这里将讨论的部分分式展开法，对于一切呈有理分式形式的 $F(s)$，是一个求原函数 $f(t)$ 的普遍方法，它的指导思想也是把任何复杂的像函数 $F(s)$ 化为简单的部分分式之和，而每个部分分式的原函数可以查表。

本节不准备详细介绍部分分式展开法的理论基础(参见§6.2.4)，这里仅从应用的观点进行讨论。

在分析集中参数的线性电路时，我们遇到的 s 函数几乎总是分式函数，它是两个多项式之比[参照(3.2.14)式]：

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{4.2.1}$$

如果分子多项式的最高次幂大，即 $m > n$，我们可以利用长除法把 $F(s)$ 化为一个多项式与一个分式之和，而这分式中分子的最高次幂比分母的最高次幂低。例如

$$F(s) = \frac{2s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s}{s^2 + 4s + 3}$$

$$= 2s^2 - 5s + 15 - \frac{43s + 45}{s^2 + 4s + 3}$$

因此，下面我们仅讨论 $m \leqslant n$ 的情况就够了。

在(4.2.1)式中，分母多项式 $Q(s)$ 是一个 n 阶多项式，它具有 n 个根，即 $s_1, s_2, \cdots, s_n$，故可将(4.2.1)式改写为

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_{n-1})(s - s_n)} \tag{4.2.2}$$

其中每个根 s_i 可以是实数也可以是复数。在复平面([s]平面)上由 $s = s_i$ 所确定的点是$F(s)$的极点[①]$Q(s)$的根可以有两种情况，一种是 $Q(s)$ 的全部根值互相都不同，即没有重根。一种是 $Q(s)$ 的各个根中有一些是相同的，即有重根的情况。下面分别讨论这二种情况。

2. $Q(s)$ 无重根的情况

在这种情况下，分式函数 $F(s)$ 可以展开为

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = A_0 + \frac{A_1}{s - s_1} + \cdots + \frac{A_k}{s - s_k} + \cdots + \frac{A_n}{s - s_n} \tag{4.2.3}$$

其中 A_k 可以是实数也可以是复数，视 s_k 为实数或复数而定。A_k 称为 $F(s)$ 在极点 s_k 处的留数。因为(4.2.3)式右端每一项的 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换都是已知的，所以求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ 的计算归结为求每个系数 A_k。

为确定 $A_k (k \neq 0)$，将(4.2.3)式两端乘以因子$(s - s_k)$并取 $s \to s_k$ 时的极限，于是有：

$$\lim_{s \to s_k}\left[\frac{(s - s_k)P(s)}{Q(s)}\right]$$

$$= \lim_{s \to s_k}\left[A_0(s - s_k) + \cdots + A_k + \cdots + \frac{A_k(s - s_k)}{(s - s_n)}\right]$$

---

① 若 $\lim_{s \to s_i}[F(s)] = \infty$，称 s_i 为$F(s)$的极点。若 $\lim_{s \to s_i}[F(s)] = 0$，称 s_i 为$F(s)$的零点。

因为 $s_i \neq s_j$(当 $i \neq j$),故上式右端当 $s \to s_k$ 时除 A_k 那一项以外,其余各项均趋于零,于是得:

$$A_k = \lim_{s \to s_k}\left[\frac{(s - s_k)P(s)}{Q(s)}\right]$$

$$= \left[\frac{(s - s_k)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_k}, k = 1, 2, \cdots, n \quad (4.2.4)$$

注意在求 A_k 时,不必真正去求极限,因为 $(s - s_k)$ 项可以与 $Q(s)$ 中的同一因子相消,消去以后,将 $s = s_k$ 代入即可算出系数 A_k。为确定系数 A_0,我们在(4.2.3)式两端取 $s \to \infty$ 时的极限,(4.2.3)式右端各项除常数项 A_0 外均趋于零,故得:

$$A_0 = \lim_{s \to \infty}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \begin{cases} b_n, & (m = n) \\ 0, & (m < n) \end{cases} \quad (4.2.5)$$

注意 A_0 项仅当 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 是同阶多项式($m = n$)时才不为零,这从(4.2.1)式也容易看出,计算系数 A_k 还常用下述公式:

$$A_k = \left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_k} = \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} \quad (4.2.6)$$

其中 $Q'(s)$ 是 $Q(s)$ 的一阶导数。总结起来,(4.2.3)式的 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换应该是

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = b_n\delta(t) + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(s - s_k)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_k} e^{s_k t}, t \geqslant 0 \quad (4.2.7)$$

或者

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = b_n\delta(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t}, t \geqslant 0 \quad (4.2.8)$$

在 $m < n$ 的情况下,以上二式中的冲激项不存在,仅是一系列指数项之和。稍后我们将给出利用以上公式计算的例题。一些简单的例子在 §3.2.2 可以找到。

3. $Q(s)$ 有重根的情况

若 $Q(s)$ 含有 α 次重根 $s = s_1$（s_1 称为 $F(s)$ 的 α 阶极点），而其余 $n - \alpha$ 个根是互不相同的，则 $F(s)$ 可写为：

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = A_0 + \frac{A_{1\alpha}}{(s - s_1)^{\alpha}} + \frac{A_{1(\alpha-1)}}{(s - s_1)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{11}}{(s - s_1)} + \frac{A_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_{n-\alpha}}{s - s_{n-\alpha}} \tag{4.2.9}$$

在上式中，系数 $A_0, A_2, \cdots, A_{n-\alpha}$ 仍可利用公式(4.2.4)、(4.2.5)、(4.2.6) 式定出。为确定其他系数，我们将(4.2.9) 式两端乘以 $(s - s_1)^{\alpha}$。得到

$$(s - s_1)^{\alpha} \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} = A_0(s - s_1)^{\alpha} + A_{1\alpha} + A_{1(\alpha-1)}(s - s_1) + \cdots + A_{(11)}(s - s_1)^{\alpha-1} + \frac{A_2(s - s_1)^{\alpha}}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_{n-\alpha}(s - s_1)^{\alpha}}{s - s_{n-\alpha}}$$

在上式两端取 $s \to s_1$ 时的极限就得到

$$A_{1\alpha} = \lim_{s \to s_1} \frac{(s - s_1)^{\alpha} P(s)}{Q(s)} = \left[\frac{(s - s_1)^{\alpha} P(s)}{Q(s)}\right]_{s = s_1} \tag{4.2.10}$$

为确定 $A_{1(\alpha-1)}$，将上式对 s 求导数有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s - s_1)^{\alpha} \frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \alpha A_0(s - s_1)^{\alpha-1} + A_{1(\alpha-1)} + 2A_{1(\alpha-2)}(s - s_1) + \cdots + (\alpha - 1)A_{11}(s - s_1)^{\alpha-2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{A_2(s - s_1)^{\alpha}}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_{n-\alpha}(s - s_1)^{\alpha}}{s - s_{n-\alpha}}\right]$$

对上式两端取 $s \to s_1$ 时的极限得

$$A_{1(\alpha-1)} = \lim_{s \to s_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s - s_1)^{\alpha} \frac{P(s)}{Q(s)}\right] \tag{4.2.11}$$

类似上面的求导数再取极限的过程，可以重复 $(\alpha - 1)$ 次而得到其

他系数 $A_{1(\alpha-2)}, A_{1(\alpha-3)}, \cdots, A_{11}$，其一般表示式为

$$A_{1(\alpha-k)} = \lim_{s \to s_1} \left[\frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \left\{ (s - s_1)^\alpha \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} \right], k = 1, 2, \cdots, \alpha - 1 \tag{4.2.12}$$

在求 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换时，包含重根的部分分式可以利用表 3.4 第 8 个公式的复频移性质和表 3.1 第 19 个“变换对”来求：

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A_{1i}}{(s - s_1)^i} \right] = e^{s_1 t} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A_{1i}}{s^i} \right] = \frac{A_{1i}}{(i-1)!} t^{i-1} e^{s_1 t} \tag{4.2.13}$$

例 4.1　已知 $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s - 2}{s(s+2)(s-3)}$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$。

解： $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s - 2}{s(s+2)(s-3)} = \dfrac{A_1}{s} + \dfrac{A_2}{s+2} + \dfrac{A_3}{s-3}$

由公式(4.2.4) 得

$$A_1 = \left[\frac{sP(s)}{Q(s)} \right]_{s=0} = \left[\frac{s^2 + 2s - 2}{(s+2)(s-3)} \right]_{s=0} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \left[\frac{(s+2)P(s)}{Q(s)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{s^2 + 2s - 2}{s(s-3)} \right]_{s=-2} = -\frac{1}{5}$$

$$A_3 = \left[\frac{(s-3)P(s)}{Q(s)} \right]_{s=3} = \left[\frac{s^2 + 2s - 2}{s(s+2)} \right]_{s=3} = \frac{13}{15}$$

因属于 $m < n$ 情况，A_0 项不存在，故由(4.2.7) 式得

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} e^{-2t} + \frac{13}{15} e^{3t} \right] u(t)$$

例 4.2　已知 $F(s) = \dfrac{20(s+1)(s+3)}{(s+1+j)(s+1-j)(s+2)(s+4)}$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$。

解： 因为 $P(s)$ 的幂低于 $Q(s)$ 的幂，故(4.2.5) 式中的 A_0 为零。$F(s)$ 可像(4.2.3) 式那样写成

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1+j} + \frac{A_2}{s+1-j} + \frac{A_3}{s+2} + \frac{A_4}{s+4}$$

其中各系数可由公式(4.2.4) 定出：

$$A_1 = \left[\frac{(s+1+j)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=-1-j} = \frac{20(-j)(2-j)}{(-2j)(1-j)(3-j)}$$

$$= \frac{20(2-j)}{2(2-4j)} = \frac{5(2-j)(1+2j)}{(1-2j)(1+2j)} = 4+3j$$

$$A_2 = \left[\frac{(s+1-j)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=-1+j} = \frac{20j(2+j)}{2j(1+j)(3+j)}$$

$$= 4-3j$$

$$A_3 = \left[\frac{(s+2)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=-2} = \frac{20(-1)(1)}{(-1+j)(-1-j)(2)} = 5$$

$$A_4 = \left[\frac{(s+4)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=-4} = \frac{20(-3)(-1)}{(-3+j)(-3-j)(-2)}$$

$$= -3$$

根据(4.2.7)式,可写出逆变换:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = (4+3j)e^{(-1-j)t} + (4-3j)e^{(-1+j)t} - 5e^{-2t} - 3e^{-4t}$$

$$= e^{-t}[4(e^{-jt}+e^{jt}) + 3j(e^{-jt}-e^{jt})] - 5e^{-2t} - 3e^{-4t}$$

$$= e^{-t}[8\cos t + 6\sin t] - 5e^{-2t} - 3e^{-4t},\ t \geqslant 0$$

4.关于复根的说明

从刚刚讨论的例4.2可以看到,对应于复数共轭根 $s_1 = -1-j$ 和 $s_2 = -1+j$ 的留数(系数 A_1 和 A_2)也是复数共轭的,即 $A_1 = 4+3j$, $A_2 = 4-3j$。可以证明,若多项式 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 的系数均为实数,就总有这种情况发生。因此,若 $Q(s)$ 有一对复数共轭根,就只须计算一个对应的留数,另一个留数必定是它的共轭复数。

由于复根总是成对地出现,故通常还采用下面的方法来更简便地做部分分式展开和求 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换。我们考虑下式:

$$\frac{A+jB}{s+\alpha+j\beta} + \frac{A-jB}{s+\alpha-j\beta}$$

$$= \frac{(A+jB)(s+\alpha-j\beta)+(A-jB)(s+\alpha+j\beta)}{(s+\alpha)^2-(j\beta)^2}$$

$$= \frac{2A(s+\alpha)+2B\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \tag{4.2.14}$$

根据复频移性质(表3.4第8个公式)以及表3.1中的第7、第8"变换对"有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2A(s+\alpha)+2B\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right] = e^{-\alpha t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2As+2B\beta}{s^2+\beta^2}\right]$$
$$= 2e^{-\alpha t}[A\cos\beta t + B\sin\beta t] \tag{4.2.15}$$

因此,在做部分分式展开时,若 $F(s)$ 包含共轭复根,就可以直接展为包含形如(4.2.14)式的二次项,然后按(4.2.15)式求 $\mathscr{L}^{-1}$变换。详见下面的例子。

例4.3 利用(4.2.14)式和(4.2.15)式重新计算例4.2中的 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$。

解:利用在例4.2中已求出的实数留数,$F(s)$ 可写为:

$$F(s) = \frac{20(s+1)(s+3)}{[(s+1)^2+1](s+2)(s+4)}$$
$$= \frac{B_1(s+1)+B_2}{(s+1)^2+1} + \frac{-5}{s+2} + \frac{-3}{s+4}$$

由上式可知:

$$\frac{B_1(s+1)+B_2}{(s+1)^2+1}$$
$$= \frac{20(s+1)(s+3)}{[(s+1)^2+1](s+2)(s+4)} - \left[\frac{-5}{s+2} + \frac{-3}{s+4}\right]$$
$$= \frac{20(s^2+4s+3)}{[(s+1)^2+1](s+2)(s+4)} + \frac{8s+26}{(s+2)(s+4)}$$
$$= \frac{8s^3+62s^2+148s+112}{[(s+1)^2+1](s+2)(s+4)}$$
$$= \frac{8s+14}{(s+1)^2+1} = \frac{8(s+1)+6}{(s+1)^2+1}$$

对上式做逆变换,由(4.2.15)式的结果知

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{B_1(s+1)+B_2}{(s+1)^2+1}\right]=e^{-t}[8\cos t+6\sin t],\ t\geqslant 0$$

这与例 4.2 的结果一致(附加上两个指数项)。

例 4.4 已知 $F(s)=\dfrac{8(s^2+4s+2)}{(s+1)^3(s+3)}$,求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$。

解:由(4.2.9)式有

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_{13}}{(s+1)^3}+\frac{A_{12}}{(s+1)^2}+\frac{A_{11}}{s+1}+\frac{A_2}{s+3}$$

其中各系数可由(4.2.4)和(4.2.12)式定出:

$$A_2=\left[\frac{(s-s_2)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_2}=\left[\frac{8(s^2+4s+2)}{(s+1)^3}\right]_{s=-3}=1$$

$$A_{13}=\left[\frac{(s-s_1)^3P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_1}=\left[\frac{8(s^2+4s+2)}{s+3}\right]_{s=-1}$$

$$=-4$$

$$A_{12}=\frac{1}{1!}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{(s-s_1)^3P(s)}{Q(s)}\right\}\right]_{s=s_1}$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{8(s^2+4s+2)}{(s+3)}\right\}\right]_{s=-1}$$

$$=\left[\frac{8(s^2+6s+10)}{(s+3)^2}\right]_{s=-1}=10$$

$$A_{11}=\frac{1}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left\{\frac{(s-s_1)^3P(s)}{Q(s)}\right\}\right]_{s=s_1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left\{\frac{8(s^2+4s+2)}{(s+3)}\right\}\right]_{s=-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{8(s^2+6s+10)}{(s+3)^2}\right\}\right]_{s=-1}$$

$$=\left[4\frac{(-2)}{(s+3)^3}\right]_{s=-1}=-1$$

按照(4.2.13)式,逆变换为

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{-4}{(3-1)!}t^{(3-1)}e^{-t} + \frac{10}{(2-1)!}t^{(2-1)}e^{-t} - e^{-t} + e^{-3t}$$

$$= e^{-t}(-2t^2 + 10t - 1) + e^{-3t}, \quad t \geqslant 0 \tag{4.2.16}$$

4.2.2 应用留数定理计算 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换

计算 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换的最普遍的方法是由(4.1.10) 式给出的复变函数积分进行计算，特别是在少数不能用部分分式展开法计算的情况下就必须由这个积分出发进行计算。计算积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \tag{4.2.17}$$

要用到复变函数理论的某些知识。下面我们仅对这个方法做概略的讨论，进一步讨论见 §6.1 和 §6.2。

在(4.2.17) 式中，$\mathscr{L}^{-1}$ 积分的路线是[s] 平面上平行于虚轴的从 $\delta - j\infty$ 到 $\delta + j\infty$ 的一条直线(参见图4.2.1)，在这条直线的右侧，$\mathrm{Re}[s] = \delta > \alpha_0$，($\alpha_0$ 为 $f(t)$ 的收敛坐标)，在这区域中 $F(s)$ 是解析函数。$F(s)$ 的极点在这条直线的左侧。

给定 $F(s)$ 的形式后，直接计算(4.2.17) 式中的积分是可以的，但对于复杂的函数 $F(s)$，是很困难的。不过利用复变函数理论中的留数定理却容易得很(参见 §6.2.3)。我们知道，留数定理只能应用于闭路积分。为此，我们把 4.2.17 式中的积分改写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\lim_{r\to\infty}\int_{\delta-jr}^{\delta+jr} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{4.2.18}$$

并在 $\delta - jr$ 到 $\delta + jr$ 的直线左侧补画一个半径为 R 的圆弧，使之构成封闭路线 C，如图 4.2.1 所示。沿封闭路线 C 的闭路积分可写为

$$\int_{\delta-jr}^{\delta+jr} F(s)e^{st}\mathrm{d}s + \int_{C'} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = \oint_C F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{4.2.19}$$

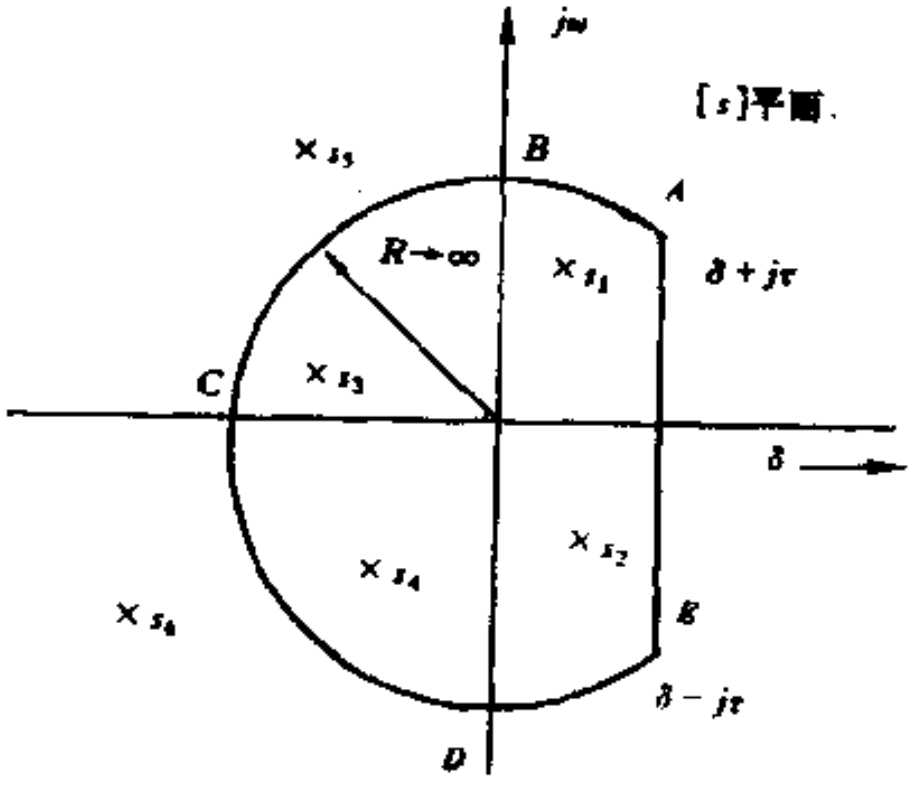


图 4.2.1　利用留数定理计算 $\mathscr{L}^{-1}$积分

其中积分路线 C' 是指图 4.2.1 中 $ABCDE$ 圆弧，积分路线 C 是指整个封闭路线。封闭路线 C 可能没有包围 $F(s)$ 的全部极点(图中示例包含了四个极点)，但是当半径 $R\to\infty$ 时(因而 $\tau\to\infty$)就可以包含 $F(s)$ 的全部极点。现在的问题是，只要能证明

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_{C'}F(s)e^{st}\mathrm{d}s = 0 \tag{4.2.20}$$

那么 $\mathscr{L}^{-1}$积分就等价于闭路积分[根据(4.2.18) 和(4.2.19)式]：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\lim_{\tau\to\infty}\oint_{C}F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{4.2.21}$$

上式中积分路线 C 是沿逆时针方向。留数定理告诉我们(参见§6.2.3)，被积函数沿闭路 C 逆时针积分的结果等于该闭曲线 C 内包含的全部极点处的留数之和的 $2\pi j$ 倍，因而(4.2.21) 式成为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\left\{2\pi j \sum_{i=1}^{\cdot} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}]_{s=s_i}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}]_{s=s_i} \tag{4.2.22}$$

其中 n 为 $F(s)$ 的极点总数，Res 是“留数”之意。

对(4.2.20)式可以做一般性的证明(利用约当辅助定理)，我们在这里仅就特殊情况做简单证明。设

$$\lim_{s\to\infty} |F(s)e^{st}| \leqslant \left|\frac{K}{s^{n+1}}\right|, n > 0 \tag{4.2.23}$$

其中 K 为常数，n 为实数，于是有

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ R\to\infty}} \int_{C'} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \leqslant \lim_{R\to\infty} \int_{C'} \left|\frac{K}{s^{n+1}}\right| \mathrm{d}s$$

在积分路线 C' 上有：$s = Re^{j\theta}$ 和 $\mathrm{d}s = jRe^{j\theta}\mathrm{d}\theta$，代入上式，注意 $|e^{j\theta}| = 1$，并注意当半径 R 非常大时圆弧 C' 对圆心的张角为 π，我们得到

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ R\to\infty}} \int_{C'} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \leqslant \lim_{R\to\infty} \frac{\pi K}{R^n} = 0$$

这样，我们在(4.2.23)式的条件下证明了(4.2.20)式。

现在讨论(4.2.22)式中留数的计算方法。若 s_i 是一阶极点，则

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st}]_{s=s_i} = \lim_{s\to s_i}[(s - s_i)F(s)e^{st}]$$

$$= [(s - s_i)F(s)e^{st}]_{s=s_i} \tag{4.2.24}$$

若 s_i 为 a 阶极点，则

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st}]_{s=s_i} = \frac{1}{(a-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{a-1}}{\mathrm{d}s^{a-1}}(s - s_i)^a F(s)e^{st}\right]_{s=s_i} \tag{4.2.25}$$

为加深对上述方法的理解，我们举几个简单例子。

例 4.5 已知像函数 $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$，求原函数

$f(t)$。

解:在 $s=a$ 和 $s=b$ 处有两个 $F(s)$ 的一阶极点,按(4.2.24)式,相应的留数分别为:

$$\operatorname{Res}[F(s)e^{st}]_{s=a}=\left[\frac{e^{st}}{s-b}\right]_{s=a}=\frac{e^{at}}{a-b};$$

$$\operatorname{Res}[F(s)e^{st}]_{s=b}=\left[\frac{e^{st}}{s-a}\right]_{s=b}=\frac{e^{bt}}{b-a}$$

由(4.2.22)式得

$$f(t)=\frac{e^{at}}{a-b}+\frac{e^{bt}}{b-a}=\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt}),\ t\geqslant 0$$

例 4.6　计算 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)(s-2)^2}\right]$。

解:$s=1$ 是一阶极点,$s=2$ 是二阶极点,由(4.2.24)和(4.2.25)式有:

$$\operatorname{Res}[F(s)e^{st}]_{s=1}=\left[\frac{e^{st}}{(s-2)^2}\right]_{s=1}=\frac{e^{t}}{(-1)^2}=e^{t}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[F(s)e^{st}]_{s=2}&=\frac{1}{(2-1)}\left[\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}s^{2-1}}(s-2)^2F(s)e^{st}\right]_{s=2}\\&=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{e^{st}}{s-1}\right)\right]_{s=2}\\&=te^{2t}+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s-1}\right)\right]_{s=2}e^{2t}\\&=te^{2t}-e^{2t}\end{aligned}$$

由(4.2.22)式知

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)^2}\right]=e^{t}+e^{2t}(t-1),\ t\geqslant 0$$

最后,我们指出,对于 $F(s)$ 有无限多个极点的情况[例如 $F(s)=\sin s$]以及 $F(s)$ 有分支点的情况[例如 $F(s)=\ln s$, $F(s)=e^{-\sqrt{s}}$]利用上述方法也可进行计算,此处不再讨论。

§4.3 双边 $\mathscr{L}$ 变换

4.3.1 什么是双边 $\mathscr{L}$ 变换

在以上各节我们仅讨论了单边时间函数，当 $t<0$ 时，它的函数值为零。对这种函数的 $\mathscr{L}$ 变换称为单边 $\mathscr{L}$ 变换。前已指出，在大多数应用场合下，我们遇到的是单边函数，因而主要应用单边 $\mathscr{L}$ 变换，简记为 $\mathscr{L}_a[f(t)]$。

如果 $f(t)$ 存在于 $-\infty<t<+\infty$，称 $f(t)$ 为双边函数，对这种函数做 $\mathscr{L}$ 变换称双边 $\mathscr{L}$ 变换，简记为 $\mathscr{L}_b[f(t)]$。这时只要将 $\mathscr{L}$ 积分的下限由 0 改为 $-\infty$ 即可。因此与(4.1.11)和(4.1.10)式相应地有

$$F(s)=\mathscr{L}_b[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{4.3.1}$$

$$f(t)=\mathscr{L}_b^{-1}[f(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}t \tag{4.3.2}$$

下面我们简单讨论几个问题。

4.3.2 收敛区域

像我们在 §4.1.2 讨论单边 $\mathscr{L}$ 变换的收敛问题一样，(4.3.1)式的双边 $\mathscr{L}$ 变换若存在，就要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)e^{-st}|\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|e^{-\delta t}\mathrm{d}t=\text{有限值}, \tag{4.3.3}$$

注意：与(4.1.12)式不同，上式中的收敛因子 $e^{-\delta t}$ 在 $t<0$ 的范围内可能使积分发散，因为当 δ 增大时，$e^{-\delta t}(t<0)$ 也增大。我们假定 $f(t)$ 满足以下条件，即，存在一个正实数 M 以及实数 a 和 β，使得

$$|f(t)| < \begin{cases} Me^{\alpha t}, & t > 0 \\ Me^{\beta t}, & t < 0 \end{cases} \tag{4.3.4}$$

然后，把(4.3.1)式中的 $\mathscr{L}_b$ 积分写为

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

利用不等式(4.3.4)，上式成为

$$F(s) < \int_{-\infty}^{0} Me^{(\beta-s)t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} Me^{(\alpha-s)t}\mathrm{d}t$$

$$= M\left\{\left[\frac{1}{\beta-s}e^{(\beta-s)t}\right]_{\infty}^{0} + \left[\frac{1}{\alpha-s}e^{(\alpha-s)t}\right]_{0}^{\infty}\right\}$$

上式中第一个积分在 $\mathrm{Re}[s] < \beta$ 的范围内收敛，而第二个积分在 $\mathrm{Re}[s] > \alpha$ 的范围内收敛，要使这两个积分同时收敛(从而 $\mathscr{L}_b$ 积分收敛)就要求

$$\alpha < \mathrm{Re}[s] < \beta \tag{4.3.5}$$

可见，$\mathscr{L}_b$ 积分的收敛区域是[s]平面上与虚轴平行的带状区域，这个带状区域的左边界 α 取决于 $f(t)$ 在 $t > 0$ 时的特性，右边界 β 取决于 $t < 0$ 时的特性。

由于 $\mathscr{L}_b$ 积分在带状区域 $\alpha < \delta < \beta$ 内收敛，所以在这带状区域里 $F(s)$ 是解析函数，$F(s)$ 的极点必然在这带状区域之外。如果 $f(t)$ 是正的单边函数，则收敛区域仅由左边界 α 确定，$F(s)$ 的全部极点在 α 轴的左侧，这就是 §4.1.2 讨论过的情况。相反，若 $f(t)$ 是负单边函数[仅当 $-\infty < t < 0$ 时 $f(t) \neq 0$]，则收敛区域仅由右边界 β 确定，$F(s)$ 的全部极点在 β 轴的右侧。如果 $f(t)$ 存在于整个 $-\infty < t < \infty$ 的范围，则收敛带左侧的极点取决于 $f(t)$ 的正时段，而收敛带右侧的极点取决于 $f(t)$ 的负时段。这个简单结论在下面讨论 $\mathscr{L}_b^{-1}$ 变换时将要用到。在图 4.3.1 中画出一些时间函数和相应的收敛区域，有助于形象地理解上述收敛问题。

总之，如果 $f(t)$ 满足(4.3.4)式的条件，就可以对 $f(t)$ 做双边 $\mathscr{L}$ 变换，这个条件也可写成：

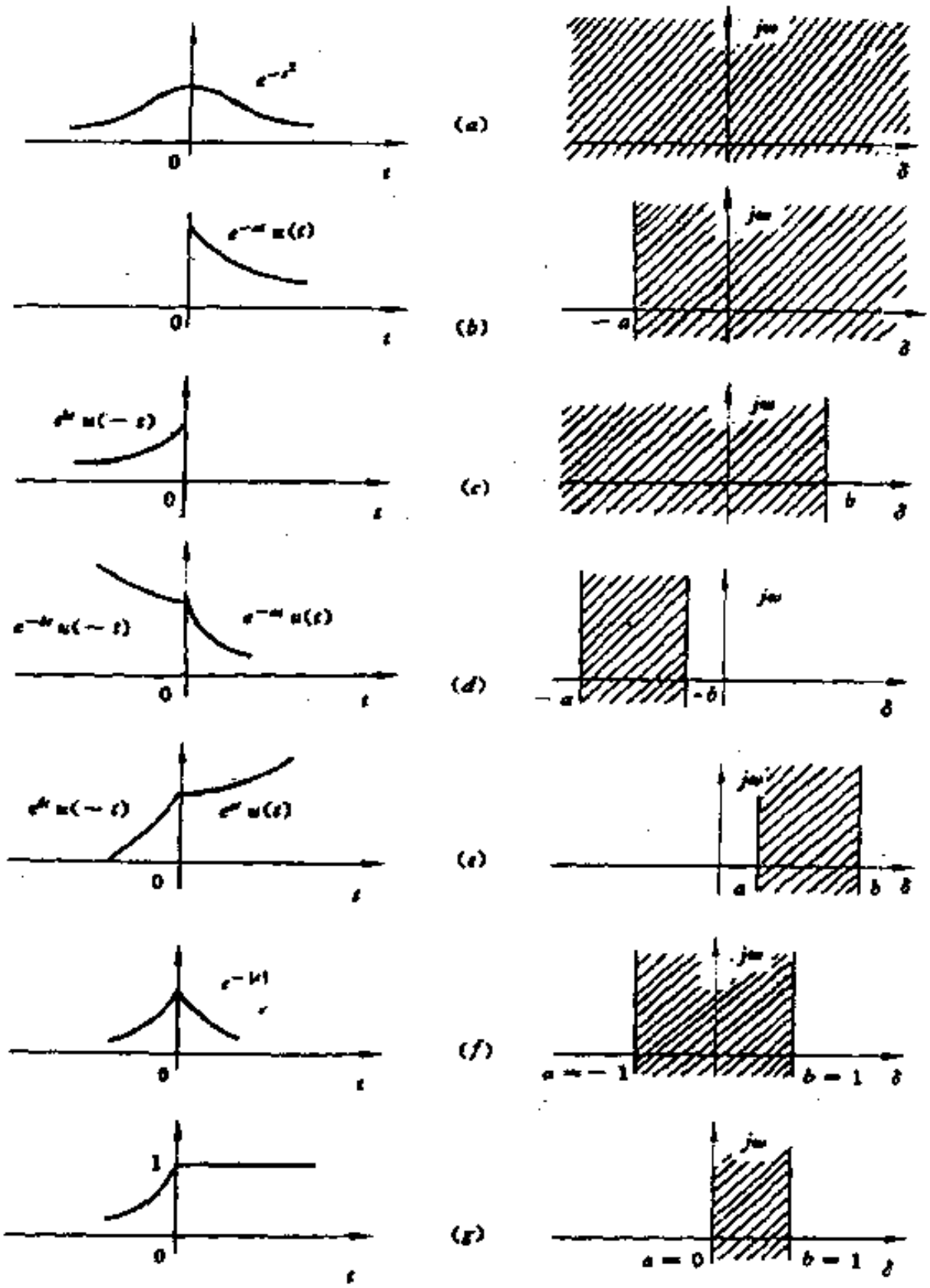


图 4.3.1　某些时间函数及其相应的收敛区域

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} e^{\beta t} f(t) = 0 \tag{4.3.6}$$

满足(4.3.4) 或(4.3.6) 式的 $f(t)$ 亦称为指数阶函数，双边指数阶函数的特点是，当 $t > 0$ 时 $f(t)$ 的增长不能比 $Me^{\alpha t}$ 快，当 $t < 0$ 时，$f(t)$ 的增长不能比 $Me^{\beta t}$ 快。

我们注意到，在(4.3.4) 或(4.3.6) 式中包含着对收敛坐标 α 和 β 的限制，即 $\alpha < \beta$。只有这样，$f(t)$ 的正时段和负时段才有共同的收敛区域(带状区域)，$\mathscr{L}_b$ 变换才存在。如果 $\alpha > \beta$，就没有共同的收敛区域，$\mathscr{L}_b$ 变换便不存在。对于 $\mathscr{L}_b$ 变换，收敛区域的问题是很重要的，这从下面的例子中便可看到。

例 4.7　求图 4.3.2*a* 中函数 $f_1(t) = e^{\alpha t}u(t)$ 的 $\mathscr{L}_b$ 变换和图 4.3.2*b* 中函数 $f_2(t) = -e^{\alpha t}u(-t)$ 的 $\mathscr{L}_b$ 变换。

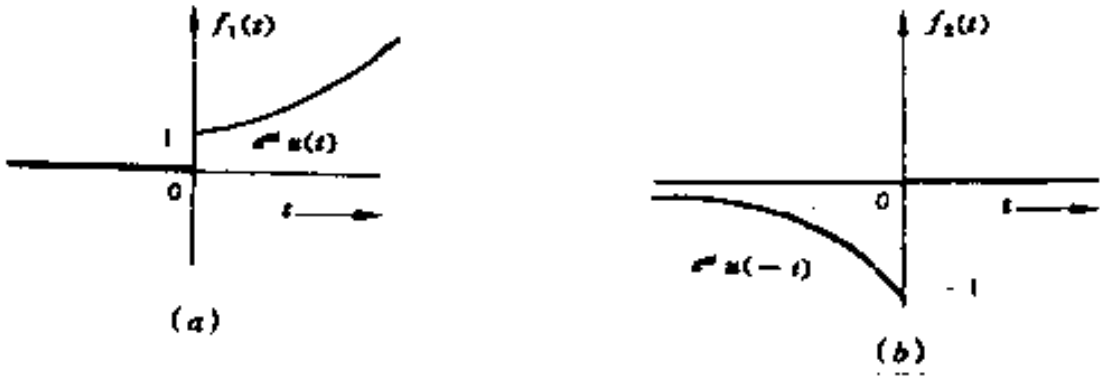


图 4.3.2

解：$$F_1(s) = \mathscr{L}_b[f_1(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t}u(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{\alpha t}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}. \quad \delta > a$$

$$F_2(s) = \mathscr{L}_b[f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [-e^{\alpha t}u(-t)]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{0} [-e^{\alpha t}e^{-st}]\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s-a}. \quad \delta < a$$

我们看到，$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的 $\mathscr{L}_b$ 变换具有相同的形式 $1/(s-a)$，然而它们的收敛区域不同。一般地，对于双边函数的 $\mathscr{L}_b$ 变换必须指明收敛区域，否则，原函数与像函数就不是一一对应的了。

例 4.8 求 $f(t)=\begin{cases}e^{+bt}, & t<0\\ e^{-at}, & t>0\end{cases}$ 的 $\mathscr{L}_b$ 变换。

解：$F(s)=\mathscr{L}_b[f(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{bt}e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-1}{s-b}+\frac{1}{s+a}$$

$$=-\frac{a+b}{(s+a)(s-b)},\ b>\mathrm{Re}[s]>-a$$

4.3.3 与单边 $\mathscr{L}$ 变换的关系

假定对于正、负 t 值 $f(t)$ 均不为零，如图 4.3.3a 所示，这时可将 $f(t)$ 分解成两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$。当 $t>0$ 时，$f_1(t)\neq 0$，当 $t<0$ 时，$f_2(t)\neq 0$，于是可将 $f(t)$ 一般地表示成：

$$f(t)=f_1(t)u(t)+f_2(t)u(-t) \tag{4.3.7}$$

对(4.3.7)式做 $\mathscr{L}_b$ 变换有

$$\mathscr{L}_b[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}f_2(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}f_1(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

上式右端第二个积分就是通常的单边 $\mathscr{L}$ 变换，在第一个积分中做代换 $t'=-t$ 后也可化为通常的单边 $\mathscr{L}$ 变换：

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}f_2(-t')e^{-st'}\mathrm{d}t'+\int_{0}^{\infty}f_1(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=F_2(-s)+F_1(s) \tag{4.3.8}$$

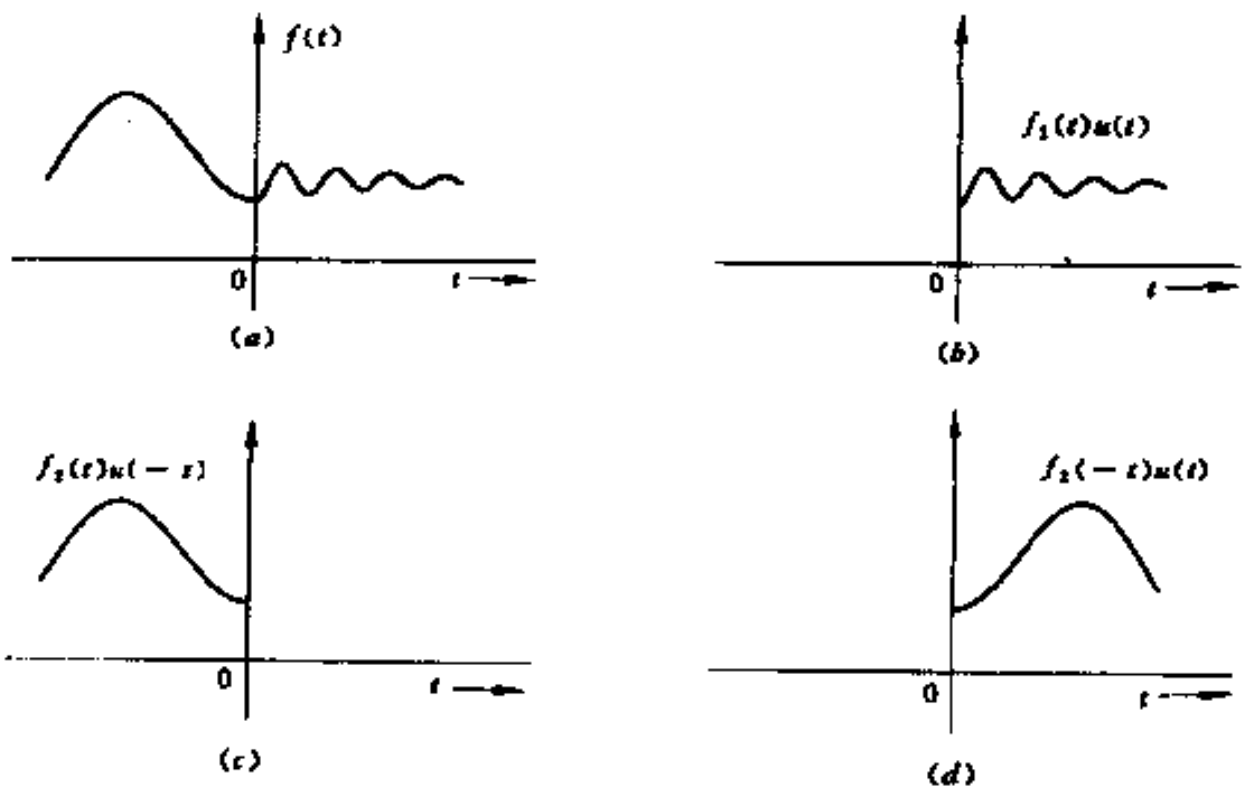


图 4.3.3　双边函数的分解

其中　$F_1(s) = \mathscr{L}[f_1(t)]$, $F_2(-s) = \mathscr{L}[f_2(-t)]$。(4.3.8) 式把双边 $\mathscr{L}$ 变换与单边 $\mathscr{L}$ 变换联系起来，当然，其中 $F(s)$ 的收敛区域是由 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 所决定的带状区域：

$$\alpha_1 < \mathrm{Re}[s] < -\alpha_2$$

函数 $f_2(-t)u(t)$ 是函数 $f_2(t)u(-t)$ 的镜像函数，它们关于纵轴成镜像对称[见图 4.3.3(c) 和(d)]。若 $f(t)$ 为偶函数，则 $f_2(-t) = f_1(t)$，并有 $F_1(s) = F_2(s)$，这时(4.3.8) 式成为

$$F(s) = F_1(-s) + F_1(s), \quad \alpha_1 < \mathrm{Re}[s] < -\alpha_1 \tag{4.3.9}$$

可见 $F(s)$ 也是 s 的偶函数。注意，上式中仅当 $\alpha_1 \leqslant 0$ 时 $F(s)$ 才存在。

前面讨论的单边 $\mathscr{L}$ 变换性质也可应用于双边 $\mathscr{L}$ 变换。然而对于 $\mathscr{L}_b$ 变换，初始条件是在 $t = -\infty$，通常总是假定 $f(-\infty) = 0$。此外，应注意把 $\mathscr{L}$ 变换的各种性质应用于 $\mathscr{L}_b$ 变换时，对收敛区域的限

制要严格得多，一般都是在[s]平面的带状区域而不是半无限平面。

注意到收敛区域问题以后，各种函数的单边 $\mathscr{L}$ 变换表 3.1 也可用于双边 $\mathscr{L}$ 变换。

4.3.4 求 $\mathscr{L}_b^{-1}$ 变换的方法

在 $f(t)$ 为双边函数的情况下，由 $F(s)$ 求 $f(t)$，必须知道 $F(s)$ 的收敛区域。前已讨论，$F(s)$ 的极点位置与 $f(t)$ 的正、负时段有关。$F(s)$ 在收敛区域右侧的极点联系着 $f(t)$ 的负时段，$F(s)$ 在收敛区域左侧的极点联系着 $f(t)$ 的正时段。由此出发，我们可以找到求 $\mathscr{L}_b^{-1}$ 变换的简单方法。现以下面的例题来说明。

例 4.9 已知 $F(s)=\dfrac{2s}{(s+1)(s+2)}$，$-2<\mathrm{Re}[s]<-1$，求 $f(t)=\mathscr{L}_b^{-1}[F(s)]$。

解：极点 $s=-1$ 在收敛区右侧，极点 $s=-2$ 在收敛区左侧。所以，极点 $s=-1$ 联系着 $t<0$ 时的 $f(t)$。极点 $s=-2$ 联系着 $t>0$ 时的 $f(t)$。将 $F(s)$ 展为部分分式：

$$F(s)=\frac{2s}{(s+1)(s+2)}=\frac{-2}{s+1}+\frac{4}{s+2},\quad -2<\mathrm{Re}[s]<-1$$

上式右端第二项对应于 $f(t)$ 的正时段：

$$\mathscr{L}_b^{-1}\left[\frac{4}{s+2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+2}\right]=4e^{-2t}u(t)$$

而第一项$[-2/(s+1)]$对应于 $f(t)$ 的负时段，根据例4.7的结果可知：

$$\mathscr{L}_b[e^{at}u(-t)]=\frac{-a}{s-a}$$

所以有：

$$\mathscr{L}_b^{-1}\left[\frac{-2}{s+1}\right]=2e^{-t}u(-t)$$

综合以上结果可知：

$$f(t)=\mathscr{L}_b^{-1}[F(s)]=2e^{-t}u(-t)+4e^{-2t}u(t)$$

用类似上面的方法，可以求出许多 $\mathscr{L}_b^{-1}$ 变换。其一般步骤是，首先将 $F(s)$ 展为部分分式，分清哪些极点在收敛区右侧，哪些极点在收敛区左侧，把对应于左侧极点的各项做逆变换就得到 $t>0$ 的时间函数，把对应于右侧极点的各项做逆变换就得到 $t<0$ 的时间函数。做变换时最常用的公式是：

$$\mathscr{L}_b\left[\frac{t^n e^{-at}u(t)}{n!}\right]=\frac{1}{(s+a)^n},\qquad \mathrm{Re}[s]>a \tag{4.3.10}$$

$$\mathscr{L}_b^{-1}\left[\frac{(-t)^n e^{-at}u(-t)}{n!}\right]=\frac{1}{(s+a)^n},\qquad \mathrm{Re}[s]<a \tag{4.3.11}$$

求 $\mathscr{L}_b^{-1}$ 变换的另一个方法是干脆把双边变换完全化为单边变换，然后直接利用单边 $\mathscr{L}$ 变换表 3.3 去计算。为说明这个方法，我们从双边正变换 $\mathscr{L}_b[f(t)]$ 谈起。为做 $\mathscr{L}_b$ 变换，应先将已知的 $f(t)$ 分为正、负时段 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，然后取负时段的镜像函数 $f_2(-t)$，并求出它的单边变换 $F_2(s)$，再把 $F_2(s)$ 中的 s 换为 $(-s)$ 得到 $F_2(-s)$。设 $F_1(s)$ 表示 $f(t)$ 正时段的单边 $\mathscr{L}$ 变换，那么 $F_2(-s)+F_1(s)=F(s)$ 就是双边函数 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}_b$ 变换，这个结果已如(4.3.8)式所示。现在来看下面的例题。

例 4.10 设 $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)+e^{\beta t}u(-t)$，如图 4.3.4 所示，求 $\mathscr{L}_b[f(t)]$。

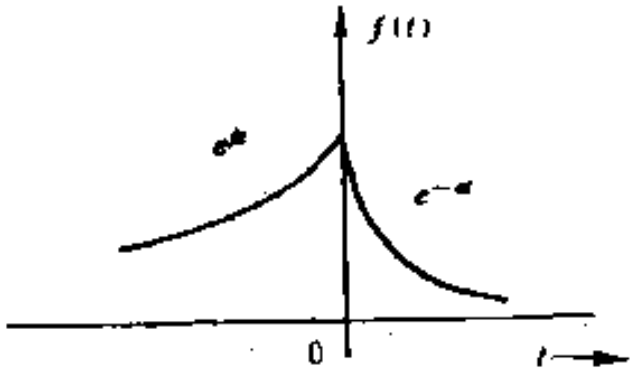


图 4.3.4

解： $f(t)$ 的正、负时段分别为

$$f_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$$

$$f_2(t)=e^{\beta t}u(-t)$$

$f_2(t)$ 关于纵轴($t=0$)的镜像函数是

$$f_2(-t)=e^{-\beta t}u(t)$$

于是有 $F_2(s)=\mathscr{L}[f_2(-t)]=\dfrac{1}{s+\beta},\quad -\beta<\mathrm{Re}[s]$

$$F_2(-s) = \frac{1}{-s+\beta}, \quad \mathrm{Re}[s] < \beta$$

正时段 $f_1(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换为

$$F_1(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \quad -\alpha < \mathrm{Re}[s]$$

于是

$$\mathscr{L}_b[f(t)] = F_2(-s) + F_1(s) = \frac{1}{-s+\beta} + \frac{1}{s+\alpha}$$

$$= -\frac{\alpha+\beta}{(s+\alpha)(s-\beta)}, \quad -\alpha < \mathrm{Re}[s] < \beta$$

本例也是对例 4.8 的进一步说明。

例 4.11 已知 $F(s) = \dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$，试对以下三种收敛区分别求 $\mathscr{L}_b^{-1}[F(s)]$。

(1) $-2 < \mathrm{Re}[s] < -1$

(2) $\mathrm{Re}[s] > -1$

(3) $\mathrm{Re}[s] < -2$

解：首先对 $F(s)$ 做部分分式展开：

$$F(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

由(4.2.4)式可定出系数 A 和 B：

$$A = \left[\frac{(s+1)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{2s+3}{s+2}\right]_{s=-1} = 1$$

$$B = \left[\frac{(s+2)P(s)}{Q(s)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{2s+3}{s+1}\right]_{s=-2} = 1$$

所以 $F(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s+2}$。

以下分三种情况讨论：

(1) 对于收敛区 $-2 < \mathrm{Re}[s] < -1$，极点 $s = -1$ 在收敛区右侧，极点 $s = -2$ 在收敛区左侧。因此，$F(s)$ 展开式第一项对应于时间函数的负时段，第二项对应于正时段，根据(4.3.8)式，知

$$F_1(s) = \frac{1}{s+2}, \quad F_2(-s) = \frac{1}{s+1}$$

因此，$f(t)$ 的正时段是

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}[F_1(s)] = e^{-2t}u(t)$$

$f(t)$ 负时段的镜像函数是 $F_2(s) = \dfrac{1}{-s+1}$ 的逆变换，于是

$$f_2(-t) = \mathscr{L}^{-1}[F_2(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{-s+1}\right] = -e^{t}u(t)$$

因而

$$f_2(t) = -e^{-t}u(-t)$$

所以

$$f(t) = -e^{t}u(-t) + e^{-2t}u(t)$$

(2) 对于收敛区 $\mathrm{Re}[s] > -1$，$F(s)$ 的两个极点都在收敛区的左侧，因而 $f(t)$ 只有正时段，是一个单边函数：

$$f(t) = (e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

(3) 对于收敛区 $\mathrm{Re}[s] < -2$，$F(s)$ 的两个极点都在收敛区的右侧，因而 $f(t)$ 只有负时段。在(4.3.8) 式中

$$F_1(s) = 0, F_2(-s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

于是

$$f_2(-t) = \mathscr{L}^{-1}[F_2(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{-s+1} + \frac{1}{-s+2}\right]$$

$$= -e^{t}u(t) - e^{2t}u(t)$$

$$f(t) = f_2(t) = (-e^{-t} - e^{-2t})u(-t)$$

从这个例题我们再次看到，“同一个” 像函数 $F(s)$ 可以对应于各种不同的时间函数，关键在于收敛区不同。从这个例题，我们可以总结出利用单边变换求双边逆变换的一般步骤：

第一步：将 $F(s)$ 展为部分分式；

第二步：找出 $F(s)$ 在收敛区右侧的极点，包含这些极点的项就是(4.3.8) 式中的 $F_2(-s)$，它们对应于 $f(t)$ 的负时段；

第三步：把 $F_2(-s)$ 中的$(-s)$ 代换为 s 就得到 $F_2(s)$，于是 $\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]$ 就是 $f(t)$ 负时段的镜像函数 $f_2(-t)$；

第四步：把 $f_2(-t)$ 中的$(-t)$ 换为 t 就得到 $f_2(t)$，把 $f_2(t)$ 加上 $f(t)$ 的正时段 $f_1(t)$，最后就得到整个时间函数 $f(t)$。

§4.4 进一步应用实例

4.4.1 无源网络

对于简单的单回路无源网络的瞬态分析，我们在 §4.2 已做了讨论。现在讨论多回路网络的瞬态分析，并带有不为零的初始条件。分析的一般步骤是：先由给定的电路图、初始条件和输入信号，根据克希霍夫定律列出相应的微分、积分方程，然后对方程逐项做 $\mathscr{L}$ 变换，使微分、积分方程转化为代数方程；解代数方程求出待求量的像函数，最后对像函数做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换，求出电流或电压随时间的变化。现举例说明。

1. 双回路网络

设有图 4.4.1 所示的电路，电容电压的初始值为 $u(0)=5$ 伏，电感电流的初始值为 $i_2(0)=4$ 安，若在 $t=0$ 时刻投入电压为 10 伏的直流电，现求两个回路中的电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$。

按克希霍夫定律对图中的两个回路可分别列出以下方程：

$$\begin{cases} \int i_1(t)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{5}[i_1(t) - i_2(t)] = e(t) \\ \dfrac{1}{5}[i_2(t) - i_1(t)] + i_2(t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

令 $I_1(s) = \mathscr{L}[i_1(t)]$，$I_2(s) = \mathscr{L}[i_2(t)]$

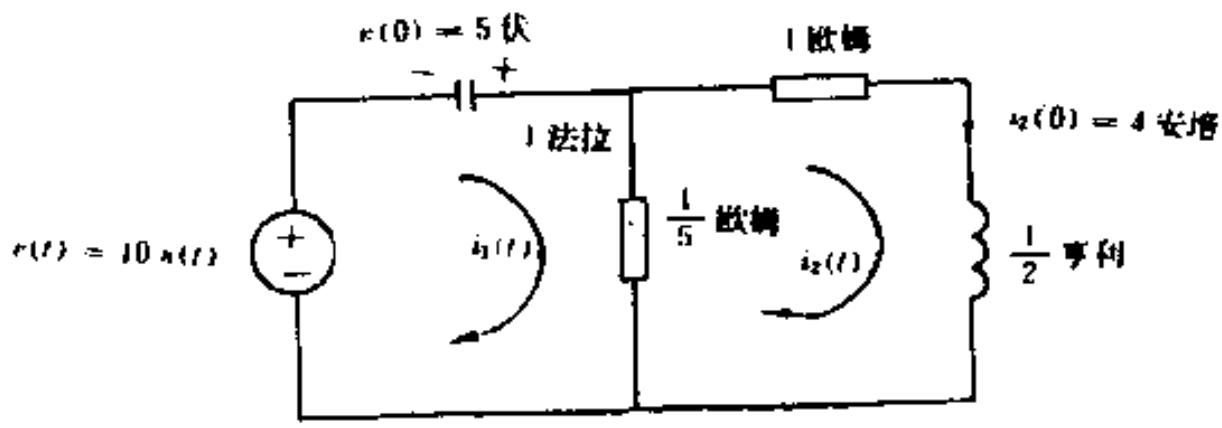


图 4.4.1　双回路网络

由表 3.4 性质 5 知

$$\mathscr{L}\left[\int i_1(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{I_1(s)}{s} + \frac{i_1^{(-1)}(0)}{s}$$

上式右端的 $i_1^{(-1)}(0)$ 是电容器的初始电荷。因电容值 $C = 1$，故 $i_1^{(-1)}(0)$ 就是初始电压值。注意到初始电压的极性与 $i_1(t)$ 的充电电压极性相反，故 $i_1^{(-1)}(0) = -5$，又由表 3.4 性质 2 知

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sI_2(s) - i_2(0) = sI_2(s) - 4$$

外加电压的像函数则为

$$E(s) = \mathscr{L}[e(t)] = \mathscr{L}[10u(t)] = \frac{10}{s}$$

至此容易写出 s 域中的代数方程

$$\begin{cases} \dfrac{I_1(s)}{s} - \dfrac{5}{s} + \dfrac{1}{5}[I_1(s) - I_2(s)] = \dfrac{10}{s} \\ -\dfrac{1}{5}I_1(s) + \dfrac{6}{5}I_2(s) + \dfrac{s}{2}I_2(s) - 2 = 0 \end{cases}$$

整理后得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5}+\frac{s}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{s} \\ 2 \end{bmatrix}$$

或
$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5}+\frac{s}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{15}{s} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\frac{s}{10}+\frac{7}{10}+\frac{6}{5s}} \begin{bmatrix} \frac{6}{5}+\frac{s}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{s}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{15}{s} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{79s+180}{s^2+7s+12} \\ \frac{2(2s+25)}{s^2+7s+12} \end{bmatrix}$$

为求 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$，对 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$ 做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换：

$$i_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{79s+180}{s^2+7s+12}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-57}{s+3}+\frac{136}{s+4}\right]$$
$$= (-57e^{-3t}+136e^{-4t})u(t)$$

$$i_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(2s+25)}{s^2+7s+12}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{38}{s+3}-\frac{34}{s+4}\right]$$
$$= (38e^{-3t}-34e^{-4t})u(t)$$

2. 桥路

在图 4.4.2 的桥路中，直流电压源 e_0 已经加上很长时间（稳态），在某时刻（设为 $t=0$）将图中开关 K 合上，现确定电源回路中的电流 $i_3(t)$ 随时间的变化。

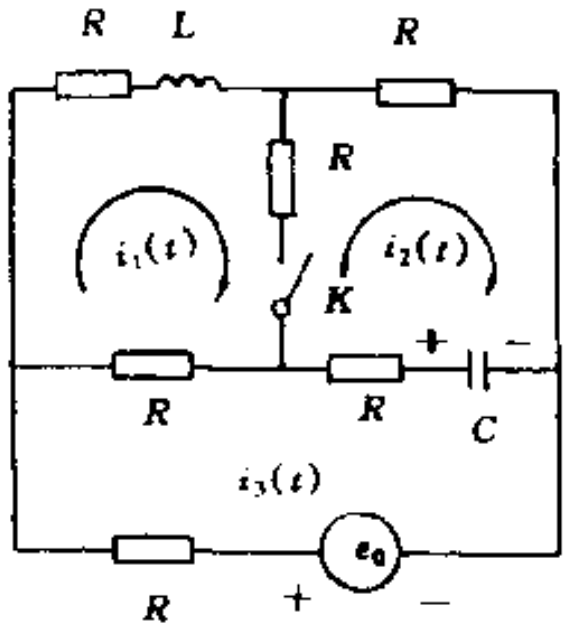


图 4.2.2　桥路

在开关 K 合上以前，电路中已存在稳态电流。流过电感 L 的电流直到 $t = 0$ 时刻以前是

$$i_L(0^-) = \frac{e_0}{3R}$$

在开关 K 合上以前电容电压是

$$u_c(0\ ) = e_0$$

根据克希霍夫定律，对图 4.4.2 中三个回路可写出以下方程：

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + 3Ri_1(t) - Ri_2(t) - Ri_3(t) = 0, (\text{对回路 1}) \\ -Ri_1(t) + 3Ri_2(t) - Ri_3(t) + \dfrac{1}{C}\int i_2(t)\mathrm{d}t - \dfrac{1}{C}\int i_3(t)\mathrm{d}t \\ \qquad = 0, (\text{对回路 2}) \\ -Ri_1(t) - Ri_2(t) + 3Ri_3(t) - \dfrac{1}{C}\int i_2(t)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{C}\int i_3(t)\mathrm{d}t \\ \qquad = e_0, (\text{对回路 3}) \end{cases}$$

注意到：

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sI_1(s) - i_1(0^-) = sI_1(s) - i_L(0\ )$$

$$= sI_1(s) - \frac{e_0}{3R}$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{C}\int [i_2(t) - i_3(t)]\mathrm{d}t\right] = \frac{I_2(s) - I_3(s)}{sC} - \frac{i_c(0^-)}{s}$$

$$= \frac{I_2(s) - I_3(s)}{sC} - \frac{e_0}{s}$$

在 s 域中方程组为

$$\begin{cases}(sL+3R)I_1(s)-RI_2(s)-RI_3(s)=\dfrac{Le_0}{3R}\\ -RI_1(s)+(3R+\dfrac{1}{sC})I_2(s)-(R+\dfrac{1}{sC})I_3(s)=\dfrac{e_0}{s}\\ -RI_1(s)-(R+\dfrac{1}{sC})I_2(s)+(3R+\dfrac{1}{sC})I_3(s)=0\end{cases}$$

令 $\alpha = R/L$ 和 $\beta = 1/CR$，可解出

$$I_3(s)=\frac{e_0}{24R}-\frac{7s^2+(12\alpha+5\beta)s+9\alpha\beta}{s(s+2\alpha)(s+0.5\beta)}$$

在 $I_3(s)$ 的三个一阶极点处的留数分别为[按(4.2.24)式]：

$$\mathrm{Res}[I_3(s)e^{st}]_{s=0}=\left[\frac{e_0}{24R}\cdot\frac{7s^2+(12\alpha+5\beta)s+9\alpha\beta}{(s+2\alpha)(s+0.5\beta)}\cdot e^{st}\right]_{s=0}$$

$$=\frac{9e_0}{24R}$$

$$\mathrm{Res}[I_3(s)e^{st}]_{s=-2\alpha}=\left[\frac{e_0}{24R}\cdot\frac{7s^2+(12\alpha+5\beta)s+9\alpha\beta}{s(s+0.5\beta)}\cdot e^{st}\right]_{s=-2\alpha}$$

$$=\frac{e_0}{24R}e^{-2\alpha t}$$

$$\mathrm{Res}[I_3(s)e^{st}]_{s=-0.5\beta}=\left[\frac{e_0}{24R}\cdot\frac{7s^2+(12\alpha+5\beta)s+9\alpha\beta}{s(s+2\alpha)}\cdot e^{st}\right]_{s=-0.5\beta}$$

$$=\frac{e_0}{8R}e^{-0.5\beta t}$$

根据(4.2.22)式，电源回路中的电流 $i_3(t)$ 为：

$$i_3(t)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Res}[I_3(s)e^{st}]_{s=s_i}$$

$$=\frac{e_0}{24R}(9+e^{-2\alpha t}-3e^{-0.5\beta t})$$

开关 K 合上后电流 $i_3(t)$ 的初值和终值可由上式算出为：

$$i_3(0^+)=\lim_{t\to 0^+}[i_3(t)]=\frac{7e_0}{24R},\quad i_3(\infty)=\lim_{t\to\infty}[i_3(t)]=\frac{3e_0}{8R}$$

利用 $I_3(s)$ 的表示式，根据初值定理和终值定理，可验证上述结果

是正确的。

4.4.2 频谱分析

对信号进行频谱分析的主要方法是傅里叶变换方法(第二章)。又由本章 §4.1.1 的讨论知,$\mathscr{L}$变换可视为傅里叶变换的推广,因而 $\mathscr{L}$变换也可用来作为频谱分析的工具。

在下面的讨论中为避免混淆,将 $f(t)$ 经傅里叶变换后得到的频谱函数记为 $F_F(j\omega)$,将 $f(t)$ 经 $\mathscr{L}$变换后得到的像函数仍记为 $F(s)$,其中 $s=\delta+j\omega$。是不是令像函数 $F(s)$ 中的 $s=j\omega$(即 $\delta=0$)就得到频谱函数 $F_F(j\omega)$ 呢?这还要仔细讨论。因为对于 $\mathscr{L}$变换:

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(s).\quad \mathrm{Re}[s]=\delta>\alpha_0 \tag{4.4.1}$$

其收敛坐标 α_0 可以大于、等于或小于零,下面分别做简单讨论。

(1)$\alpha_0>0$:在这种情况下,$\mathscr{L}$变换为

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}[s]>\alpha_0>0 \tag{4.4.2}$$

而单边函数 $f(t)$ 的傅里叶变换如果存在的话应该是

$$F_F(j\omega)=\int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{4.4.3}$$

这样,似乎在表示 $F(s)$ 的(4.4.2)式中令 $\mathrm{Re}[s]=\delta=0$ 就得到(4.4.3)式的 $F_F(j\omega)$。但是,在 $\alpha_0>0$ 的情况下,若令 $\mathrm{Re}[s]=\delta=0$ 则(4.4.2)式的积分根本不存在。所以说,若当 $\mathrm{Re}[s]=0$ 时 $f(t)$ 不存在像函数,则对 $f(t)$ 不能做傅里叶变换,因而无频谱可言。例如,若 $f(t)=e^{at}$, $a>0$,则有

$$F(s)=\frac{1}{s-a},\quad \mathrm{Re}[s]>a$$

$f(t)$ 虽在 $\mathrm{Re}[s]>a$ 的条件下具有像函数 $F(s)$,但没有相应的频谱函数 $F_F(j\omega)$,这从积分

$$\int_0^\infty e^{at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

是发散的亦可看出。

(2)$\alpha_0 < 0$:在这种情况下,显然允许取 $\mathrm{Re}[s] = 0$,因为没有破坏(4.4.1)式里 $\mathrm{Re}[s] > \alpha_0$ 的条件,收敛区域包含 $j\omega$ 轴在内,这时可以写

$$F(s)\big|_{\delta=0} = \int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

这与(4.4.3)式的傅里叶变换式是相同的。所以说,若收敛坐标 $\alpha_0 < 0$,则可以在像函数 $F(s)$ 中令 $s = j\omega$ 而得到频谱函数 $F_F(j\omega)$,即

$$F_F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega} = F(j\omega), \quad \alpha_0 < 0 \qquad (4.4.4)$$

例如,若 $f(t) = e^{-at}$, $a > 0$,则经 $\mathscr{L}$ 变换得像函数:

$$F(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}[s] > -a$$

令上式中的 $s = j\omega$ 就得到 $f(t) = e^{-at}$ 的频谱函数:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

这与(1.4.4)式的结果一致。

(3)$\alpha_0 = 0$:在这种情况下,可以一般地证明 $f(t)$ 的频谱函数 $F_F(j\omega)$ 中包含冲激项,例如,上章(4.2.3)式给出接通余弦函数的傅里叶变换为:

$$F_F(j\omega) = \mathscr{F}[u(t)\cos\omega_0 t]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

而由表 3.1 第 7"变换对"知,接通余弦函数的 $\mathscr{L}$ 变换为

$$F(s) = \mathscr{L}[u(t)\cos\omega_0 t] = \frac{s}{\omega_0^2 + s^2}, \mathrm{Re}[s] > 0$$

所以,在收敛坐标 $\alpha_0 = 0$ 的情况下,严格说,不能在像函数 $F(s)$ 中简单地把变量 s 换为 $j\omega$ 而得到频谱函数 $F_F(j\omega)$。

总结起来,我们说可以做傅里叶变换的任何函数都可以做 $\mathscr{L}$ 变换,但是可以做 $\mathscr{L}$ 变换的函数不一定都可以做傅里叶变换。只有对于

$\alpha_0 < 0$ 的 $f(t)$ 才可以令 $F(s)$ 中的 $s = j\omega$ 而得到频谱函数 $F_F(j\omega)$。但在工程应用上，往往不考虑频谱函数中的冲激项，而把 $\alpha_0 = 0$ 的情况也包括在内。以下举例说明。

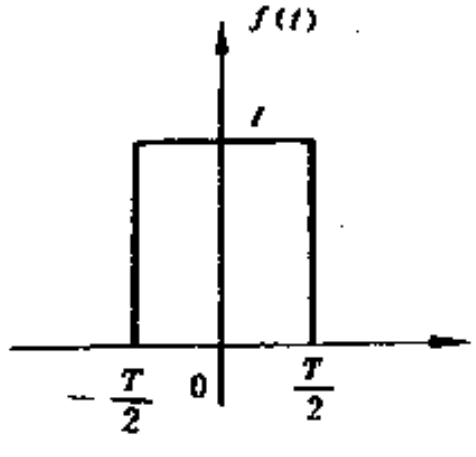


图 4.4.3　单个矩形脉冲

例 4.12　试利用 $\mathscr{L}$ 变换方法求图 4.4.3 中的单个矩形脉冲的频谱。

解：在例 3.19 中已经求出了图 3.3.3 所示单个矩形脉冲的像函数为：

$$F_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}),$$

$$\alpha_0 = -\infty$$

与图 4.4.3 相比，两个波形相差 $T/2$ 的时移，脉冲高度前者为 1 后者为 I，把前者左移 $T/2$，乘以 I 就得后者，由时移性质(3.3.1)式，图 4.4.3 脉冲的像函数为：

$$F_2(s) = \frac{I}{s}(1 - e^{-sT})e^{sT/2} = \frac{I}{s}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$$

令上式中 $s = j\omega$ 就得图 4.4.3 的矩形脉冲的频谱函数：

$$F(j\omega) = \frac{I}{j\omega}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) = \frac{I}{j\omega}[2j\sin(\omega T/2)]$$

$$= IT\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

这与 1.4.6 式结果一致。

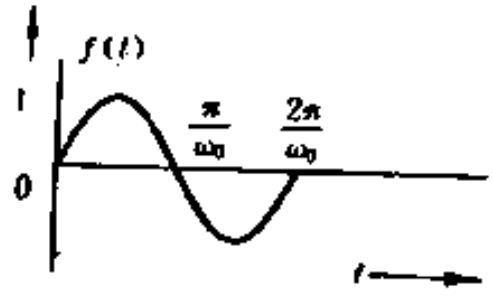


图 4.4.4　一个周期的正弦波

例 4.13　求图 4.4.4 波形的频谱，该波形是正弦波 $\sin\omega_0 t$ 的第一个周期。

解：图 4.4.4 的波形可视为图 4.4.5 中两个波形 $f_1(t)$ 和

$f_2(t)$ 的合成：

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$
$$= \sin\omega_0 t \cdot u(t) - \sin\omega_0(t - 2\pi/\omega_0) \cdot u(t - 2\pi/\omega_0)$$

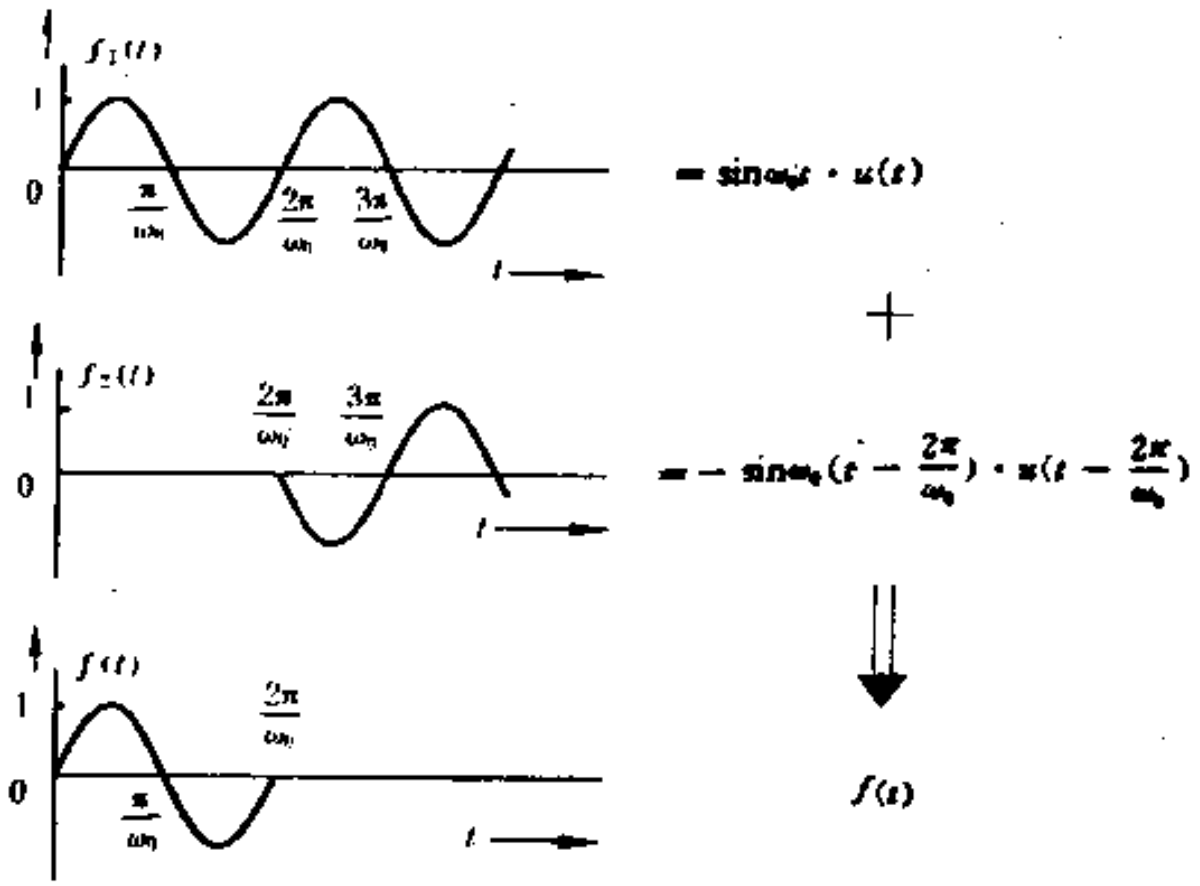


图 4.4.5　一个周期正弦波的分解

对上式做 $\mathscr{L}$ 变换得：

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$$
$$= \mathscr{L}[\sin\omega_0 t \cdot u(t) - \sin\omega_0(t - 2\pi/\omega_0) \cdot u(t - 2\pi/\omega_0)]$$
$$= \mathscr{L}[\sin\omega_0 t] - \mathscr{L}[\sin\omega_0(t - 2\pi/\omega_0) \cdot u(t - 2\pi/\omega_0)]$$
$$= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-2\pi s/\omega_0}$$
$$= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}(1 - e^{-2\pi s/\omega_0})$$

对这个有始有终的信号 $f(t)$，收敛坐标 $\alpha_0 = -\infty$，令 $s = j\omega$

即得频谱函数

$$F(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}(1 - e^{-2\pi j\omega/\omega_0})$$

由以上可以看出，利用 $\mathscr{L}$ 变换求频谱函数的方便之处在于不必去做积分，直接利用 $\mathscr{L}$ 变换表及 $\mathscr{L}$ 变换的某些性质得到像函数，再令 $s = j\omega$ 即可，这是利用 $\mathscr{L}$ 变换比傅里叶变换优越的地方。

4.4.3 波形变换

在脉冲技术中，常常需要将一种脉冲波形变换成另一种脉冲波形，例如，使一种脉冲信号通过微分电路、积分电路、限幅电路或箝位电路等就可以得到各种不同的信号。这里仅以微分电路和积分电路对矩形脉冲的变换作用来说明 $\mathscr{L}$ 变换在这方面的应用。

例 4.14 试求图 4.4.6*a* 的周期性矩形脉冲通过微分电路(图 4.4.6d) 和积分电路(图 4.4.6*e*) 后的稳态波形。

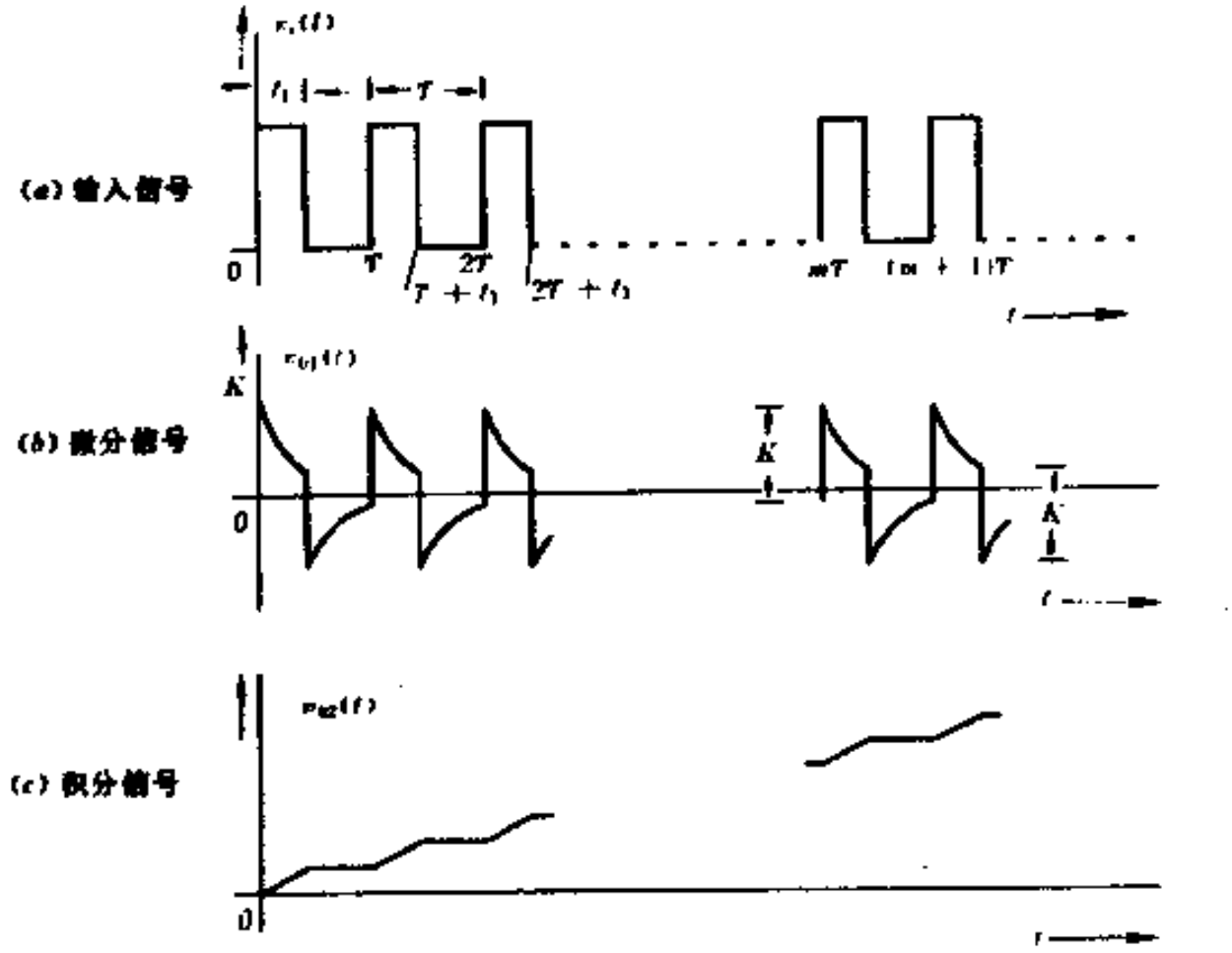
解：在图 4.4.6*a* 中，t_1 是脉冲宽度，T 是脉冲重复周期，这个波形可以利用单位阶跃函数表示成：

$$v_i(t) = K[\underbrace{u(t) - u(t - t_1)}_{\text{第一个脉冲}} + \underbrace{u(t - T) - u(t - T - t_1)}_{\text{第二个脉冲}} + \underbrace{u(t - 2T) - u(t - 2T - t_1)}_{\text{第三个脉冲}} + \cdots] \tag{4.4.5}$$

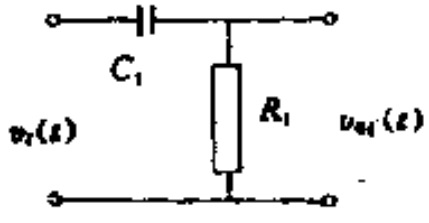
对上式逐项取 $\mathscr{L}$ 变换，利用平移性质，得到

$$V_i(s) = \mathscr{L}[v_i(t)]$$

$$= K\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-t_1 s}}{s} + \frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{e^{-(T-t_1)s}}{s} + \frac{e^{-2Ts}}{s} - \frac{e^{(-2T+t_1)s}}{s} + \cdots\right]$$



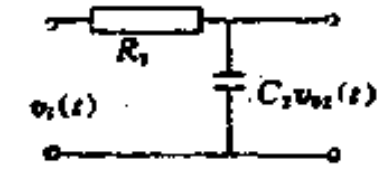
(d) 微分电路 ($T \gg \tau_1$)



$$H(s) = \frac{\mathscr{L}[v_{o1}(t)]}{\mathscr{L}[v_i(t)]} = \frac{s\tau_1}{1 + s\tau_1}$$

$$\tau_1 = R_1C_1$$

(e) 积分电路 ($\tau_2 \gg t_1$)



$$H(s) = \frac{\mathscr{L}[v_{o2}(t)]}{\mathscr{L}[v_i(t)]} = \frac{1}{1 + s\tau_2}$$

$$\tau_2 = R_2C_2$$

图 4.4.6　周期性矩形脉冲的波形变换

对于图 4.4.6d 的微分电路，输出电压的像函数按(3.2.13)式为

$$V_{01}(s) = H(s)V_i(s) = \frac{sC_1R_1}{1 + sC_1R_1}V_i(s)$$

$$= \frac{K}{s + 1/C_1R_1}[1 - e^{-t_1 s} + e^{-Ts} - e^{-(T+t_1)s} + e^{-2Ts} - e^{-(2T+t_1)s} + \cdots]$$

对上式取 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换就得到输出信号：

$$v_{01}(t) = K[e^{-\frac{t}{C_1R_1}} - e^{\frac{t-t_1}{C_1R_1}} + e^{-\frac{t-T}{C_1R_1}} - e^{-\frac{t-T-t_1}{C_1R_1}} + e^{\frac{t-2T}{C_1R_1}} - e^{-\frac{t-2T-t_1}{C_1R_1}} + \cdots]$$

$$= Ke^{\frac{t}{C_1R_1}}[(1 + e^{\frac{T}{C_1R_1}} + e^{\frac{2T}{C_1R_1}} + \cdots) - e^{-\frac{t_1}{C_1R_1}}(1 + e^{\frac{T}{C_1R_1}} + e^{\frac{2T}{C_1R_1}} + \cdots)] \tag{4.4.6}$$

若考察$(m-1)$个脉冲，那么在时间间隔

$$mT \leqslant t \leqslant mT + t_1$$

有脉冲存在，(4.4.6)式方括号内第一个级数是

$$1 + e^{T/C_1R_1} + e^{2T/C_1R_1} + \cdots + e^{mT/C_1R_1} \tag{4.4.7}$$

第二个级数是

$$1 + e^{T/C_1R_1} + e^{2T/C_1R_1} + \cdots + e^{(m-1)T/C_1R_1} \tag{4.4.8}$$

这一论断不难从图 4.4.6a 中令 $m = 2$ 看出。另外，在时间间隔

$$mT + t_1 < t < (m+1)T$$

无脉冲存在，(4.4.6)式中第一个级数不变，仍是(4.4.7)式，而第二个级数应加上下一项，于是与第一个级数相同。

(4.4.6)式是输出信号的全解，即瞬态解与稳态解之和。当 t 很大(亦即脉冲数 m 很大)时，瞬态解趋于零，就只剩下稳态解。现在来求稳态解。将(4.4.6)式中的级数写成有限项，当第$(m+1)$个脉冲存在时，我们可利用(4.4.6)和(4.4.8)式得到(令 $C_1R_1 = \tau_1$)：

$$v_{01}(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau_1}}\left[(1 + e^{\frac{T}{\tau_1}} + e^{\frac{2T}{\tau_1}} + \cdots + e^{\frac{mT}{\tau_1}}) - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}(1 + e^{\frac{t}{\tau_1}} + \cdots + e^{\frac{(m-1)T}{\tau_1}})\right]$$

$$= Ke^{-\frac{t}{\tau_1}}\left[\frac{e^{\frac{(m+1)T}{\tau_1}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau_1}} - 1} - e^{\frac{t}{\tau_1}} \cdot \frac{e^{\frac{mT}{\tau_1}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau_1}} - 1}\right]$$

$$= \frac{Ke^{-\frac{t}{\tau_1}}}{e^{\frac{T}{\tau_1}} - 1}\left[(e^{\frac{(m+1)T}{\tau_1}} - 1) - e^{\frac{t_1}{\tau_1}}(e^{\frac{mT}{\tau_1}} - 1\right] \tag{4.4.9}$$

在以上推导中利用了级数求和公式：

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \tag{4.4.10}$$

对于微分电路，$T \gg \tau_1$，又因为在稳态时 m 非常大，故有

$$e^{\frac{(m+1)T}{\tau_1}} \gg 1 \text{ 和 } e^{\frac{mT}{\tau_1}} \gg 1$$

这样，在稳态时(4.4.9) 式成为

$$v_{01} = \frac{Ke^{-\frac{t-mT}{\tau_1}}}{e^{\frac{T}{\tau_1}} - 1}(e^{\frac{T}{\tau_1}} - e^{\frac{t_1}{\tau_1}}) = Ke^{\left(-\frac{(t-mT}{\tau_1}\right)}\left[\frac{1 - e^{-\frac{T - t_1}{\tau_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}}\right] \tag{4.4.11}$$

(4.4.11) 式是当 $mT \leqslant t \leqslant mT + t_1$ 的情况。当 $mT + t_1 < t < (m + 1)T$ 时无脉冲存在，可用类似上面的步骤求出：

$$v_{01}(t) = -Ke^{-\frac{t-mT-t}{\tau_1}}\left[\frac{1 - e^{\frac{t_1}{\tau_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}}\right] \tag{4.4.12}$$

图 4.4.6*b* 中的稳态波形就是根据(4.4.11) 和(4.4.12) 式画出的。可以看到，微分电路将矩形脉冲信号变换为尖峰脉冲信号。

现在考虑矩形脉冲通过积分电路图 4.4.6*e* 的情况。输出信号的像函数是($\tau_2 = R_2C_2$)：

$$V_{02}(s) = H(s)V_i(s) = \frac{V_i(s)}{1 + s\tau_2}$$

$$= \frac{K}{s\tau_2\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}[1 - e^{-t_1 s} + e^{-Ts} - e^{-(T+t_1)s} + \cdots]$$

利用(3.1.19)式的结果以及$\mathscr{L}$变换的时移性质容易求出上式的$\mathscr{L}^{-1}$变换：

$$v_{02}(t) = \mathscr{L}^{-1}[V_{02}(s)]$$

$$= \frac{K}{\tau_2}(-\tau_2)[(e^{\frac{t}{\tau_2}} - 1) - (e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}}) + (e^{-\frac{t-T}{\tau_2}} - 1) - \cdots]$$

$$= -Ke^{-\frac{t}{\tau_2}}\left[\frac{e^{\frac{(m+1)T}{\tau_2}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau_2}} - 1} - e^{\frac{t_1}{\tau_2}}\frac{e^{\frac{mT}{\tau_2}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau_2}} - 1}\right] + K$$

像前面对微分信号的推导一样，在稳态下，m 非常大，在 $mT \gg \tau_2$ 的情况下可以得到

$$v_{02}(t) = K\left\{1 - e^{-\frac{(t-mT)}{\tau_2}}\left[\frac{1 - e^{-\frac{T-t_1}{\tau_2}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}}}\right]\right\} \quad (\text{对于第 } m + 1 \text{ 个脉冲}) \tag{4.4.13}$$

$$v_{02}(t) = Ke^{-\frac{t-mT-t_1}{\tau_2}}\left[\frac{1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_2}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}}}\right] \quad (\text{对于第 } m + 1 \text{ 个脉冲后面的空处}) \tag{4.4.14}$$

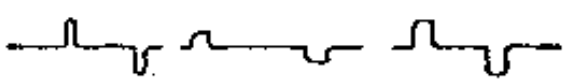
按照以上二式可绘出如图 4.4.6c 那样的波形，利用积分电路可将矩形脉冲变换为类似于锯齿波的信号。我们注意到，在(4.4.13)和(4.4.14)式中的时间常数 $\tau_2 = R_2C_2$ 一般远大于(4.4.11)和(4.4.12)式中的 $\tau_1 = R_1C_1$。

为了作比较，在图 4.4.7 中画出了几个脉冲信号通过微分电路和积分电路后的输出信号。我们看到，可以利用微分电路来确定

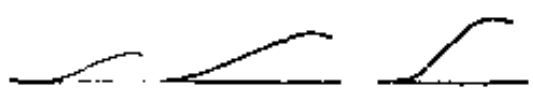
一个脉冲的前后沿位置以及上升时间的长短，而积分电路可以用来确定脉冲宽度。



(a) 输入信号{三个脉冲都是对称的，第 1 和第 3 个脉冲上升速率相同，第 1 和第 2 个脉冲高度相同。



(b) 微分电路的输出信号



(c) 积分电路的输出信号

图 4.4.7　微分电路和积分电路对脉冲信号的作用

从以上讨论可以看出，利用 $\mathscr{L}$ 变换方法分析波形变换，其步骤是先对输入信号做 $\mathscr{L}$ 变换，将得到的像函数乘以电路的传输函数得到输出信号的像函数，再做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换即得输出信号（变换后的波形）。当 $t\to\infty$ 时，得输出信号的稳态波形。

4.4.4　频率响应

在 §2.3 中我们讨论过频率响应问题。这里从 $\mathscr{L}$ 变换观点出发做进一步讨论。

1. 传输函数与频率响应的关系

如果一个线性电路的传输函数是 $H(s)$，给它输入一个正弦信号

$$v_i(t) = \sin\omega t \tag{4.4.15}$$

现在问,它的稳态输出信号的一般表示式是什么?对上式取 $\mathscr{L}$ 变换(由表 3.1):

$$V_i(s) = \mathscr{L}[v_i(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

由(3.2.14)式,传输函数 $H(s) = P(s)/Q(s)$,由(3.2.13)式知输出信号的像函数是

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = H(s)\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{P(s)}{Q(s)}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{P(s)}{Q(s)}\omega\left[\frac{1}{(s+j\omega)+(s-j\omega)}\right]$$

将上式展为部分分式:

$$V_o(s) = \frac{A}{s+j\omega} + \frac{B}{s-j\omega} + \frac{P_1(s)}{Q(s)}$$

其中 $Q(s)$ 仍是 $H(s)$ 的分母多项式,$P_1(s)$ 则与 $P(s)$ 有所不同。系数 A、B 可按公式(4.2.4)定出:

$$A = [(s+j\omega)V_0(s)]_{s=-j\omega} = \left[H(s)\omega\frac{1}{s-j\omega}\right]_{s=-j\omega}$$

$$= -\frac{H(-j\omega)}{2j}$$

$$B = [(s-j\omega)V_0(s)]_{s=j\omega} = \left[H(s)\omega\frac{1}{s+j\omega}\right]_{s=j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)}{2j}$$

所以有

$$V_o(s) = -\frac{H(-j\omega)}{2j(s+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(s-j\omega)} + \frac{P_1(s)}{Q(s)} \tag{4.4.16}$$

一个稳定的电路系统,其传输函数 $H(s)$ 的极点总是在[s]平面的左半平面。而 $H(s)$ 的极点与上式右端最后一项 $P_1(s)/Q(s)$ 的极点相同,所以 $H_1(s)/Q(s)$ 的极点也在[s]平面左半平面。我们知道,左半平面的极点对应的时间函数是指数衰减函数(例如,

$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+a}] = e^{-at}, a > 0)$，当 $t \to \infty$ 时函数值为零。所以，$P_1(s)/Q(s)$ 项对应于时域中的瞬态过程，稳态输出信号 $v_o(t)$ 仅与(4.4.16)式右端的前两项有关：

$$v_o(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{H(-j\omega)}{2j(s+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(s-j\omega)}\right]$$

$$= -\frac{H(-j\omega)e^{-j\omega t}}{2j} + \frac{H(j\omega)e^{j\omega t}}{2j} \qquad (4.4.17)$$

将 $H(j\omega)$ 写为指数形式

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(j\omega)}$$

则

$$H(-j\omega) = |H(-j\omega)|e^{j\theta(-j\omega)} = |H(j\omega)|e^{-j\theta(j\omega)}$$

代入(4.4.17)式得到稳态输出信号为

$$v_o(t) = \frac{|H(j\omega)|e^{j\theta(j\omega)}e^{j\omega t} - |H(j\omega)|e^{-j\theta(j\omega)}e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$= |H(j\omega)|\frac{e^{j[\omega t+\theta(j\omega)]} - e^{-j[\omega t+\theta(j\omega)]}}{2j}$$

$$= |H(j\omega)|\sin[\omega t + \theta(j\omega)] \qquad (4.4.18)$$

上式告诉我们，如果输入信号 $v_i(t)$ 是正弦信号 $\sin\omega t$，则电路的稳态输出信号 $v_0(t)$ 就是 $|H(j\omega)|\sin[\omega t + \theta(j\omega)]$，它仍是正弦信号，但幅度和位相有了变化，幅度由 1 变为 $|H(j\omega)|$，位相由 0 变为 $\theta(j\omega)$[以下将 $\theta(j\omega)$ 简记为 $\theta(\omega)$]，这完全是由电路本身所引起的。因此，可以用函数 $|H(j\omega)|$ 和函数 $\theta(\omega)$ 来表征一个电路的特性，它们是频率 ω 的函数，因而称为电路的正弦稳态频率特性或正弦稳态频率响应。$|H(j\omega)|$ 称为幅频特性，$\theta(\omega)$ 称为相频特性。

从以上讨论可知，将一个电路传输函数 $H(s)$ 中的 s 换为 $j\omega$，得到的 $H(j\omega)$ 就是该电路的频率响应函数。电路的传输函数和频率响应之间的这种关系，给电路分析工作带来很大方便。

2. 幅频特性与相频特性

由(3.2.14)式,传输函数的一般表示式可写为:

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}$$
$$= \frac{K(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_m)}{(s - s_1')(s - s_2')\cdots(s - s_n')}$$
$$= K\frac{\prod_{k=1}^{m}(s - s_k)}{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i')} \qquad (4.4.19)$$

其中 $K = a_m/b_m$, s_k 表示 $H(s)$ 的零点, s_i' 表示 $H(s)$ 的极点。符号 $\prod_{k=1}^{m}$ 表示 m 个因子的连乘积。(4.4.19)式可进一步表示成

$$H(s) = K'\frac{\prod_{k=1}^{m}(1 - \frac{s}{s_k})}{\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{s}{s_i})} \qquad (4.4.20)$$

其中

$$K' = K\prod_{k=1}^{m}(-s_k)/\prod_{i=1}^{n}(-s_i') \qquad (4.4.21)$$

K' 表示低频($\omega \to 0$)时传输函数的数值,因为在(4.4.20)式中令 $s = 0$ 就得到 $H(0) = K'$。

我们的目的是找出稳态频率响应函数 $H(j\omega)$ 的一般表示式,根据前面的讨论,这只要在(4.4.20)式中令 $s = j\omega$ 即可:

$$H(j\omega) = H(0)\left[\prod_{k=1}^{m}(1 - \frac{j\omega}{s_k})/\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{j\omega}{s_i})\right] \qquad (4.4.22)$$

上式的模 $|H(j\omega)|$ 和相角 $\theta(\omega)$ 就是(4.4.18)式中输出的稳态正弦信号的幅度和位相,它们都是 ω 的函数。由(4.4.22)式,幅频特性为:

$$|H(j\omega)| = \left|H(0)\right| \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{j\omega}{s_k}\right| / \prod_{i=1}^{m} \left|1 - \frac{j\omega}{s_i}\right| \tag{4.4.23}$$

上式表示输出的稳态正弦信号的幅度随频率 ω 的变化关系。由(4.4.22)式,相频特性为

$$\theta(\omega) = \angle H(j\omega) = \angle H(0) + \sum_{k=1}^{n} \angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_k}\right) - \sum_{i=1}^{m} \angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_i}\right) \tag{4.4.24}$$

上式表示输出的稳态正弦信号的位相随频率 ω 的变化关系。

给定具体电路,用 $\mathscr{L}$ 变换方法求出电路的传输函数 $H(s)$,令其中 $s = j\omega$,得到类似(4.4.23)和(4.4.24)式的关系,画出 $|H(j\omega)|$ 与 ω 的关系曲线就是该电路的幅频特性曲线,画出 $\theta(\omega)$ 与 ω 的关系曲线就是该电路的相频特性曲线。下面用一个简单例子说明。

例 4.15 确定图 4.4.8 所示电路的幅频特性和相频特性。

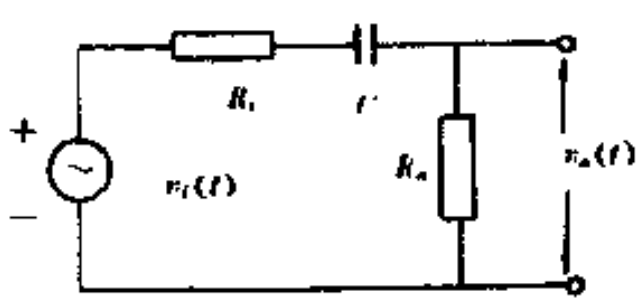


图 4.4.8

解:容易写出该电路的传输函数:

$$H(s) = \frac{\mathscr{L}[v_o(t)]}{\mathscr{L}[v_i(t)]} = \frac{R_0}{\frac{1}{sC} + R_i + R_0} = \frac{sCR_0}{1 + sC(R_i + R_0)}$$

它是该电路的电压增益的像函数。

令 $\omega_0 = \dfrac{1}{(R_i + R_0)C}$,可将上式化为

$$H(s) = \frac{R_0}{R_i + R_0} \cdot \frac{s}{s + \omega_0} = \frac{R_0}{R_i + R_0} \cdot \frac{s/\omega_0}{1 + s/\omega_0} \quad (4.4.25)$$

正弦稳态频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{R_0}{R_i + R_0} \cdot \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0} \quad (4.4.26)$$

幅频特性为

$$\begin{aligned} \left| H(j\omega) \right| &= \frac{R_0}{R_i + R_0} \cdot \frac{\left| j\omega/\omega_0 \right|}{\left| 1 + j\omega/\omega_0 \right|} \\ &= \frac{R_0}{R_i + R_0} \cdot \frac{\omega/\omega_0}{\frac{1}{\omega_0} \left| \omega_0 + j\omega \right|} \\ &= \frac{R_0}{R_i + R_0} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \\ &= \frac{R_0}{R_i + R_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0/\omega)^2}} \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

按上式给定一系列 ω 值计算出相应的 $|H(j\omega)|$ 值，即可画出图 4.4.9*a* 所示的幅频特性曲线。在高频端($\omega \to \infty$)，上式给出 $|H(j\infty)| = R_0/(R_i + R_0)$，这正是电容短路后图 4.4.8 电路的电压增益。当 $\omega = \omega_0$ 时，$|H(j\omega_0)| = |H(j\infty)|/\sqrt{2}$，为半功率点。相频特性为：

$$\theta(\omega) = \angle\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) - \angle\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right)$$

由于 $\frac{j\omega}{\omega_0}$ 为纯虚数，不论 ω 取何值总在[s]平面的虚轴正方向上，因此，$\angle\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) = 90°$，而 $\angle\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$，故

$$\theta(\omega) = 90° - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (4.4.28)$$

按上式给定一系列 ω 值计算出相应的 $\theta(\omega)$ 值，即可画出图 4.4.9*b* 所示的相频特性曲线。在高频端($\omega \to \infty$)，(4.4.28) 式给

出 $\theta(\infty) = 0$，这时电路呈纯电阻性，不带来相移。在半功率点，$\omega = \omega_0$，(4.4.28) 式给出 $\theta(\omega_0) = 45^\circ$。由于该电路引起的相移在 0° 到 $+90^\circ$ 之间，故属于位相超前电路。

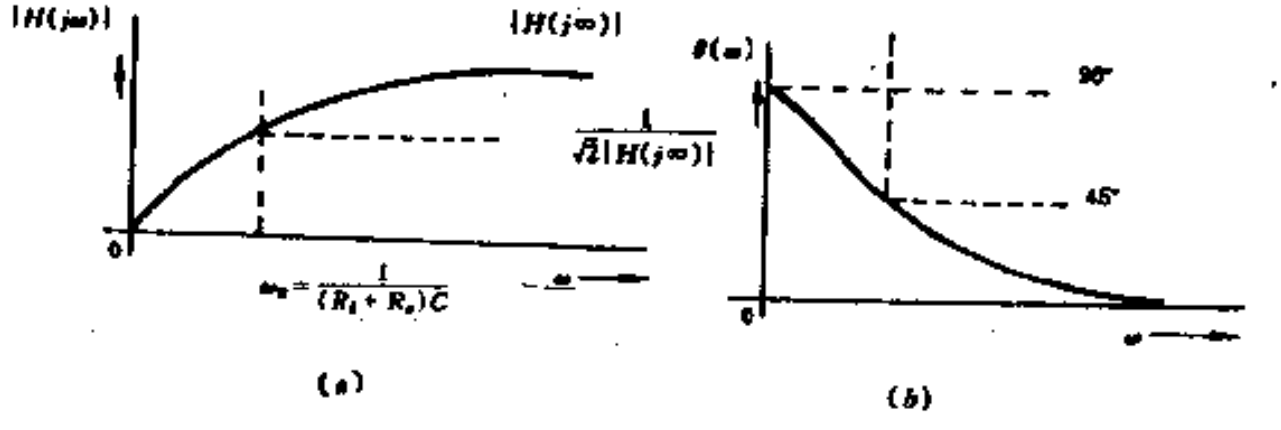


图 4.4.9　幅频和相频特性曲线

3. 对数幅频特性

像上面那样根据(4.4.23) 式逐点绘出 $|H(j\omega)|$ 与 ω 关系的幅频特性曲线是很麻烦的，因为其中包含许多因式的相乘和相除，若对 ω 值从 0 到 ∞ 逐点计算则工作量是很大的。如果电路比较复杂，因而 $H(j\omega)$ 的形式也比较复杂，计算起来就更麻烦了。在工程应用上常采用所谓对数幅频特性[相频特性仍用(4.4.24) 式]，因为对数运算可以把乘除转化为加减，并且在作某些近似后，可以根据 $H(s)$ 的零点和极点的数值，直接绘出近似的幅频特性曲线。

对数幅频特性规定为

$$A(\omega) = 20 \lg |H(j\omega)| \tag{4.4.29}$$

其中对数是以 10 为底的，$A(\omega)$ 的单位为分贝。$A(\omega)$ 与 ω 的关系曲线可以方便地画在对数坐标纸上。我们以一个典型的传输函数为例，说明由 $H(s)$ 的零极点数值直接绘制 $A(\omega) \sim \omega$ 近似曲线的一般方法。

设某电路的传输函数为：

$$H(s) = \frac{k(s + a_1)(s + a_2)}{s(s + b_1)(s^2 + b_2 s + b_3)} \tag{4.4.30}$$

其中 a_1、a_2、b_1、b_2、b_3 均为正实数，并假定上式分母中的二次项具有共轭复根，对应着 $H(s)$ 的两个共轭复极点，$H(s)$ 的另两个极点是 $s'_1 = 0$，$s'_2 = -b_1$，$H(s)$ 的两个零点是 $s_1 = -a_1$ 和 $s_2 = -a_2$。现将(4.4.30)式改写为

$$H(s) = \frac{ka_1a_2}{b_1b_3} \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{a_1}\right)\left(1 + \frac{s}{a_2}\right)}{s\left(1 + \frac{s}{b_1}\right)\left(1 + \frac{b_2}{b_3}s + \frac{s_2}{b_3}\right)}$$

令上式中 $s = j\omega$，并取绝对值，即得到幅频特性函数：

$$|H(j\omega)| = \frac{ka_1a_2}{b_1b_3} \frac{\left|1 + \frac{j\omega}{a_1}\right| \left|1 + \frac{j\omega}{a_2}\right|}{|j\omega| \left|1 + \frac{j\omega}{b_1}\right| \left|1 + j\frac{b_2\omega}{b_3} + \frac{(j\omega)^2}{b_3}\right|}$$

对数幅频特性则为[根据(4.4.2)式]：

$$A(\omega) = 20\lg\frac{ka_1a_2}{b_1b_3} + 20\lg\left|1 + \frac{j\omega}{a_1}\right| + 20\lg\left|1 + \frac{j\omega}{a_2}\right| - 20\lg|j\omega| - 20\lg\left|1 + \frac{j\omega}{b_1}\right| - 20\lg\left|1 + j\frac{\omega b_2}{b_3} + \frac{(j\omega)^2}{b_3}\right| \tag{4.4.31}$$

从上式可以看出，$A(\omega)$ 的表示式中除常数项(第一项)外，还包含三种基本类型的项：(1)$20\lg|j\omega|$，这类项(正或负)对应于[s]平面原点处的零点或极点；(2)$20\lg\left|1 + \frac{j\omega}{a}\right|$，这类项(正或负)对应于一阶零点或一阶极点($-a$)；(3)对应于共轭复极点(或零点)的项：$20\lg\left|1 + j\omega b_2/b_3 + (j\omega)^2/b_3\right|$。以下分别进行讨论。

(1) 原点处的极点(或零点)

有一个这样的极点，就在 $A(\omega)$ 的表示式中贡献一项

$$A_1(\omega) = -20\lg|j\omega| = -20\lg\omega \tag{4.4.32}$$

利用对数坐标，我们取 $u = \lg\omega$，于是有

$$A_1(\omega) = -20\lg\omega = -20u \tag{4.4.33}$$

对数幅频函数 $-20u$ 与 u 的关系曲线绘出如图 4.4.10 中实线所示，它是一条斜率为 -20 的直线。这直线与 ω 轴的交点在 $u=0$，在对数坐标纸上可以直接读出 ω 值（$u=\lg\omega$）。ω 增加 10 倍，u 增加 1 倍，而对数幅频函数 $A_1(\omega) = -20\lg\omega = -20u$ 减少 20 分贝。因此常称这直线的斜率为 -20 分贝 /10 倍频程。10 倍频程就是由 ω 增加到 10ω 的意思。若考虑 ω 增加到 2ω（称为倍频程），相应地，u 的增加量为

$$\Delta u = u_2 - u_1 = \lg 2\omega - \lg\omega = \lg\frac{2\omega}{\omega} = \lg 2 = 0.3010$$

因此，（20 分贝 /10 倍频程）的斜率也就是 $20\times 0.3010 \approx 6$ 分贝 / 倍 频程。

总之，$A_1(\omega)$（对应于原点处的极点）在对数坐标纸上是一条斜率为 -6 分贝 / 倍频程的直线。同理，与原点处的零点对应的项（$+20\lg|j\omega|$）是一条斜率为 $+6$ 分贝 / 倍频程的直线，它也通过 $\omega=1$ 点，并与前一条直线关于 ω 轴对称，如图 4.4.10 中虚线所示。

（2）一阶极点（或零点）

在（4.4.31）式中，与 $-a$ 处的一阶极点（实数极点）对应的项是 $-20\lg\left|1+\frac{j\omega}{a}\right|$，当 $\omega \ll a$ 时有：

$$A_2(\omega) = -20\lg\left|1+\frac{j\omega}{a}\right| \approx -20\lg 1 = 0$$

因此，当 $\omega \ll a$ 时，$A_2(\omega)$ 的曲线就是一段 ω 轴（图 4.4.11），当 $\omega \gg a$ 时有

$$A_2(\omega) = -20\lg\left|1+\frac{j\omega}{a}\right| \approx -20\lg\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$= -20\lg\omega + 20\lg a \tag{4.4.34a}$$

$$= -20u + 20\lg a \tag{4.4.34b}$$

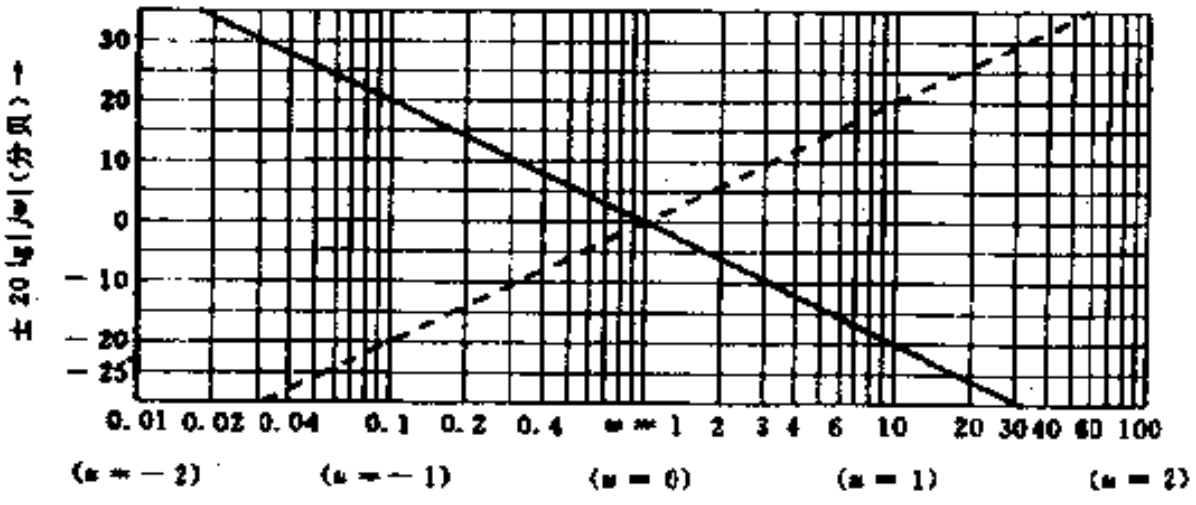


图 4.4.10　原点处的极点和零点对应的对数幅频特性曲线

这也表示一条斜率为 − 20 分贝 /10 倍频程(或 − 6 分贝 / 倍频程)的直线,由(4.4.34a)式可知,当 $\omega = a$ 时,$A_2(\omega) = 0$,所以这直线与 ω 轴(亦即 $\omega \ll a$ 时的特性曲线)的交点为 $\omega = a$.如图 4.4.11 所示。如果不做近似,则有

$$A_2(\omega)_{精确} = -20\lg\left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = -20\lg\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

$$= -10\lg\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right) \qquad (4.4.35)$$

由上式逐点绘出的精确曲线也画在图 4.4.11 中。我们看到,近似曲线(折线)与精确曲线是很接近的。仅在 $\omega = a$(截止频率)处误差最大,其误差为

$$[A_2(\omega)_{近似} - A_2(\omega)_{精确}]_{\omega=a} = 0 - \left[-10\lg\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)\right]_{\omega=a}$$

$$= 10\lg 2 = 3(分贝)$$

在曲线的其他部分,误差都小于 3 分贝。例如在比 $\omega = a$ 高(或低)一个倍频程处,误差为 1 分贝,在高(或低)二个倍频程处,误差为 0.3 分贝。由近似曲线(折线)补上这些误差值即得精确曲线。图 4.4.12 给出 $\omega = a$ 附近 ± 10 倍频程范围的误差修正曲线。

对于 $-a$ 处的一阶零点，所对应的项是 $+20\lg\left|1+\frac{j\omega}{a}\right|$，也可用类似于上面的讨论，做出近似曲线(折线)，它实际上与 $-a$ 处极点对应的曲线关于 ω 轴对称，如图 4.4.11 中虚线所示。

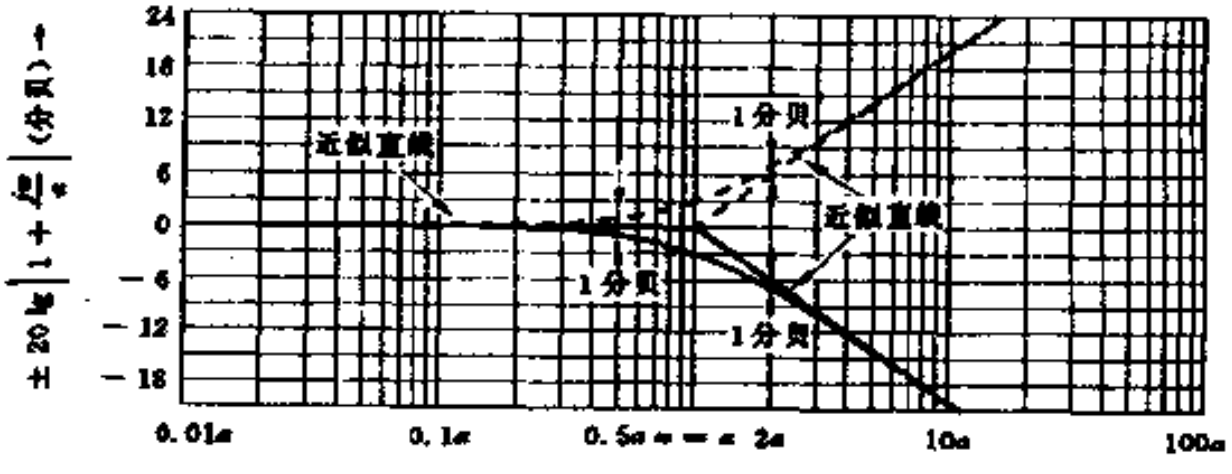


图 4.4.11　一阶极点和零点对应的对数幅频特性曲线

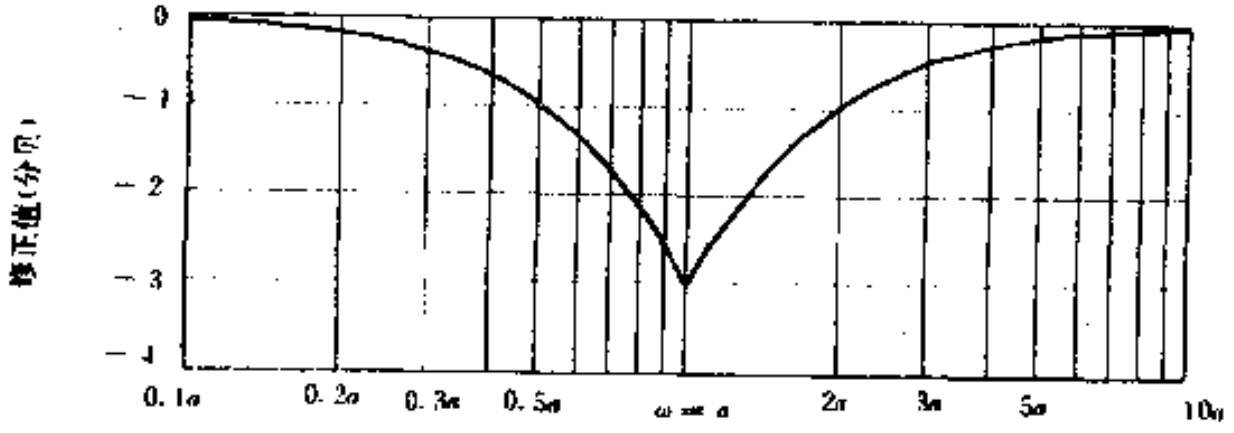


图 4.4.12　由近似曲线(图 4.11) 求精确值的修正曲线

(3) 二阶极点(或零点)

(4.4.30) 式分母中的二次项 $(s^2+b_2s+b_3)$ 习惯上常表示为 $(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)$，因此，(4.4.31) 式中相应的对数幅频函数为

$$A_3(\omega)=-20\lg\left|1+2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right| \qquad (4.4.36)$$

当 $\omega \ll \omega_n$ 时有

$$A_3(\omega) \approx -20\lg 1 = 0 \tag{4.4.37}$$

当 $\omega \gg \omega_n$ 时有

$$A_3(\omega) \approx -20\lg\left|-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right| = -40\lg\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$
$$= -40\lg\omega + 40\lg\omega_n \tag{4.4.38}$$

可见，$\omega \ll \omega_n$ 时的近似直线是 ω 轴，$\omega \gg \omega_n$ 时的近似直线是(4.4.38)式所决定的直线，其斜率为 -40 分贝 /10 倍频程(或 -12 分贝 / 倍频程)。这两条近似直线的交点在 $\omega = \omega_n$，如图 4.4.13 所示。另一方面，$A_3(\omega)$ 的精确表示式可由(4.4.36)式得到：

$$A_3(\omega) = -20\lg\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
$$= -10\lg\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\} \tag{4.4.39}$$

我们注意到，上式中包含着参数 ζ，不同的 ζ 值将对应不同的曲线。对于共轭复极点，$\zeta < 1$。在图 4.4.13 中画出了几个不同的 ζ 值所对应的精确曲线。为由近似曲线(折线)求精确曲线，可以利用图 4.4.14 所示的误差修正曲线。二阶零点的曲线与二阶极点的曲线关于 ω 轴对称(图 4.4.13 中未画出)。

例 4.16　已知某电路的传输函数为

$$H(s) = \frac{20s(s+100)}{(s+2)(s+10)}$$

试确定该电路的对数幅频特性曲线。

解：$H(s)$ 有两个一阶极点($s'_1 = -2$，$s'_2 = -10$)和两个一阶零点($s_1 = 0$，$s_2 = -100$)，首先将 $H(s)$ 改写为标准形式：

$$H(s) = \frac{20\times 100}{2\times 10}\times\frac{s\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

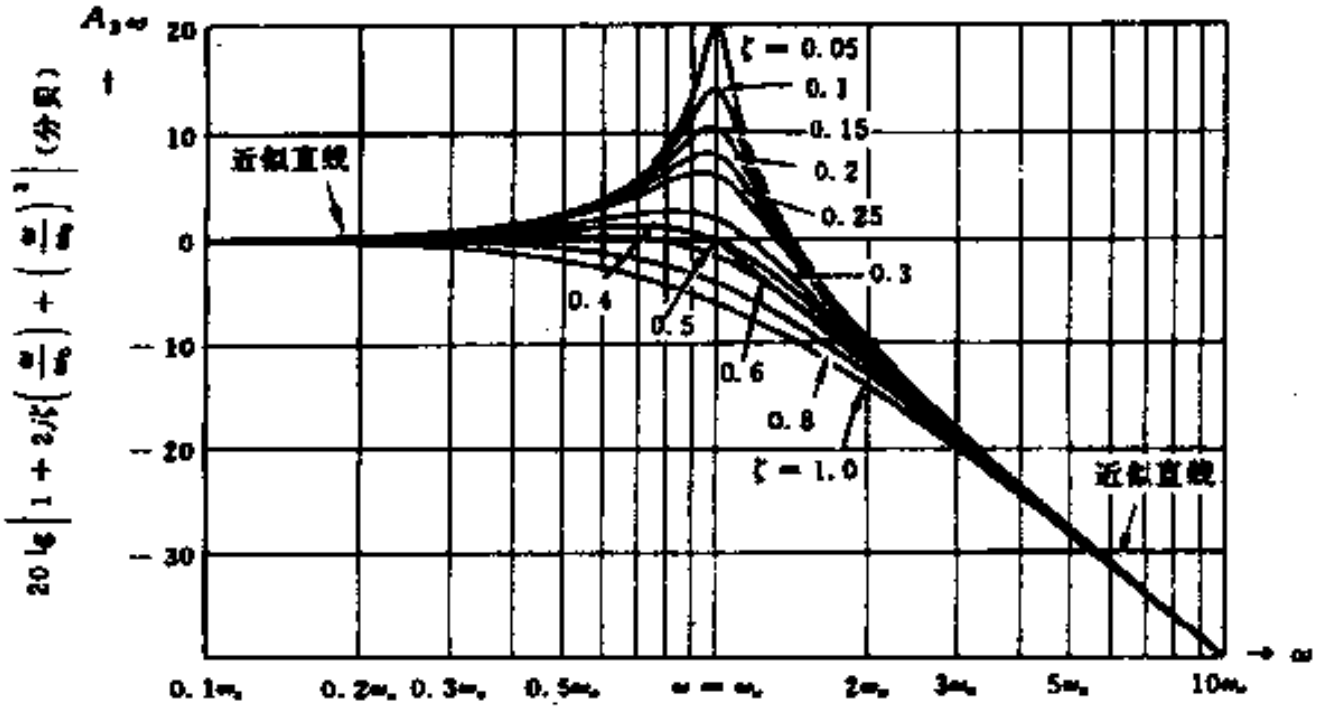


图 4.4.13　二阶极点对应的对数幅频特性曲线

$$= 100 \times \frac{s\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)} \tag{4.4.40}$$

第一步：对每一项画出相应的近似直线(见图 4.4.15)：

① 对于原点处的零点，过 $\omega = 1$ 点画一条斜率为 20 分贝 /10 倍频程的直线；

② 对于极点 $s_1' = -2$，从转折点 $\omega = 2$ 开始画一条斜率为 - 20 分贝 /10 倍频程的直线($\omega > 2$)；

③ 对于极点 $s_2' = -10$，从转折点 $\omega = 10$ 开始画一条斜率为 - 20 分贝 /10 倍频程的直线；

④ 对于零点 $s_2' = -100$，从 $\omega = 100$ 开始画一条斜率为 + 20 分贝 /10 倍频程的直线。

第二步：把以上各条近似直线叠加起来(见图 4.4.15) 得近似折线。

第三步：利用图 4.4.12 进行修正：

① 修正 $\omega = 1$ 点。由转折点 $\omega = 2$ 引起的修正值为 - 1 分贝，

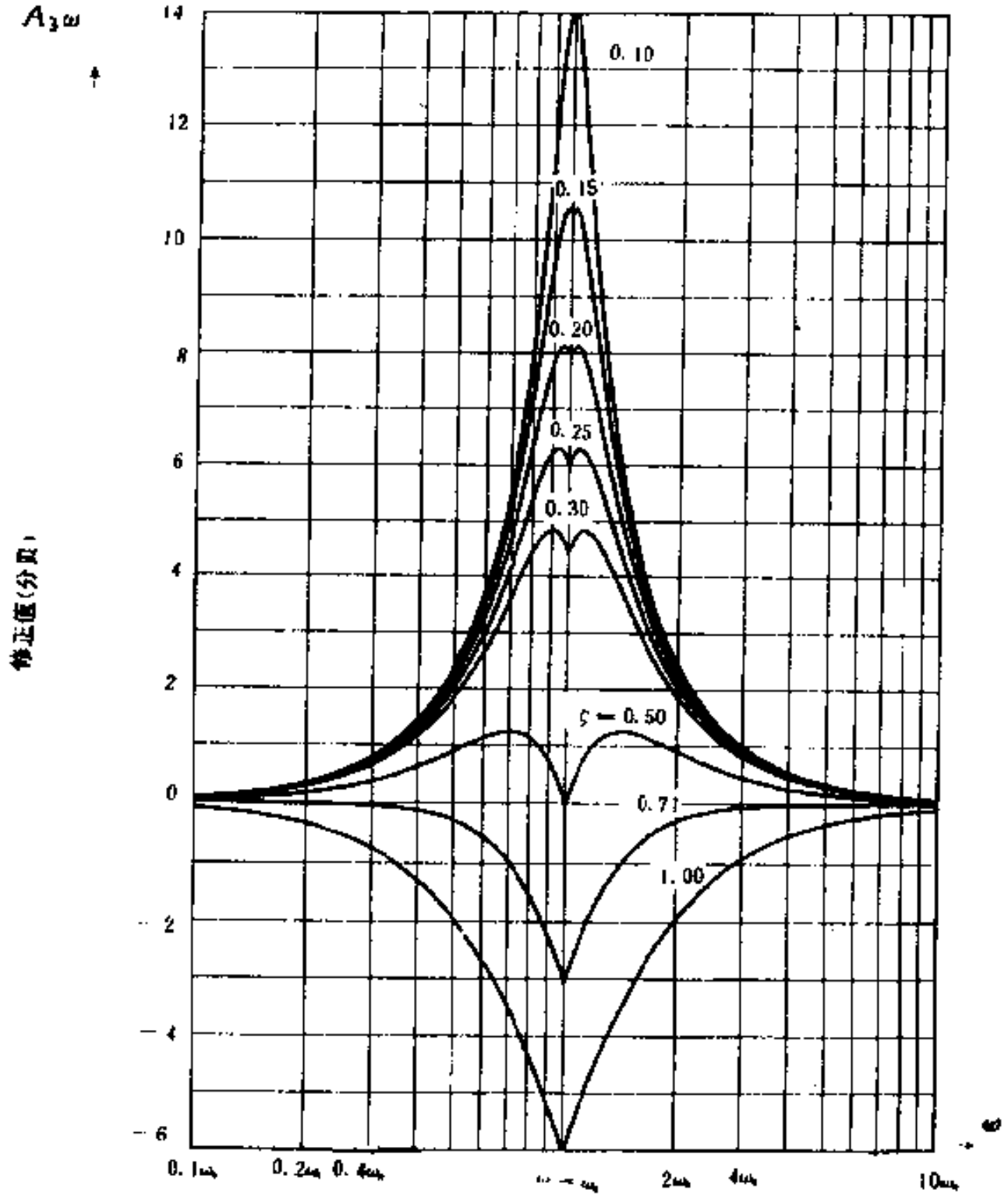


图 4.4.14　修正曲一(二阶极点)

由转折点 $\omega = 10$ 和 $\omega = 100$ 引起的修正值(由图 4.4.12)非常小，可略去。因此，在 $\omega = 1$ 点的净修正值是 -1 分贝。

② 修正 $\omega = 2$ 点。由转折点 $\omega = 2$ 引起的修正值是 -3 分贝，由转折点 $\omega = 10$ 引起的修正值是 -0.4 分贝，由 $\omega = 100$ 引起的

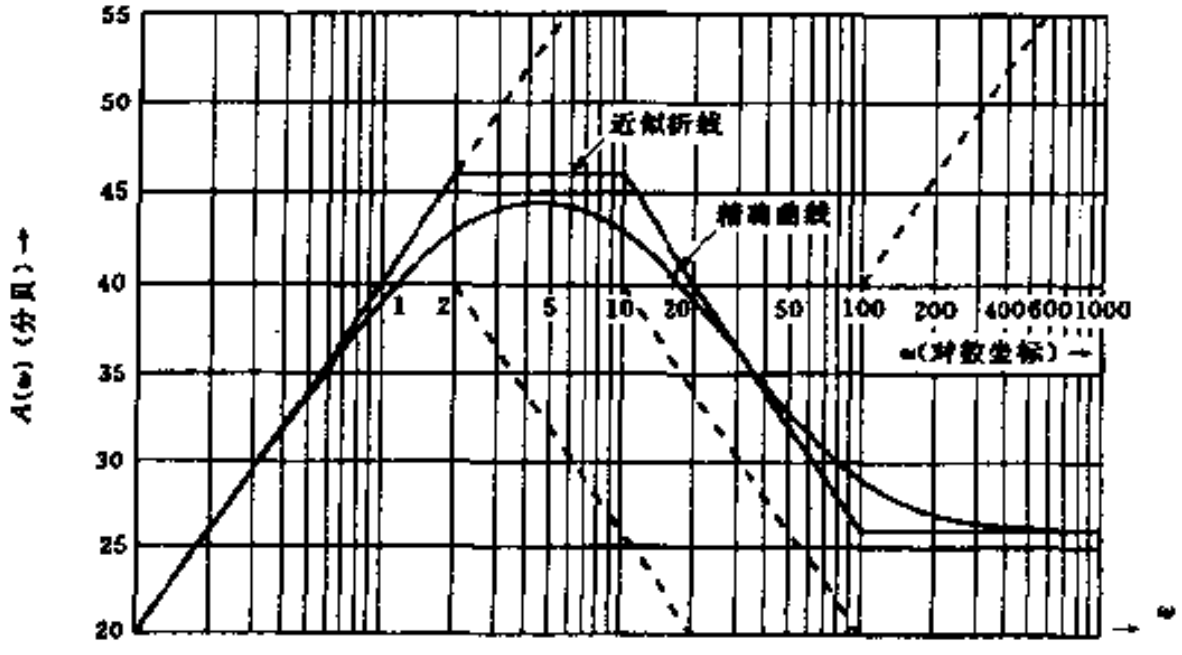


图 4.4.15　例 4.16 的对数幅频特性曲线

修正值可略去，所以在 $\omega = 2$ 点的净修正值是 -3.4 分贝。

③ 修正 $\omega = 10$ 点。由转折点 $\omega = 10$ 引起的修正值是 -3 分贝，由 $\omega = 2$ 引起的修正值是 -0.4 分贝；由 $\omega = 100$ 引起的修正值 0.04 分贝仍可略去，因此 $\omega = 10$ 点的净修正值是 -3.4 分贝。

④ 修正 $\omega = 100$ 点。其本身引起的修正值是 $+3$ 分贝，由其他转折点引起的修正值均可略去。

⑤ 修正 $\omega = 4$ 和 $\omega = 5$ 点，可类似地求出修正值均为 -1.75 分贝。

做完这些修正后，再考虑常数项 $20\lg 100$[见(4.4.40)式]，这项的数值是 $20 \times 2 = 40$(分贝)，叠加上它，只需将横坐标向上平移 40 分贝即可，如图 4.4.15 所示，这样最后得到精确的特性曲线。

例 4.17　已知某电路的传输函数为

$$H(s) = \frac{10(s+100)}{s^2 + 2s + 100} = 10 \times \frac{\left(1 + \dfrac{s}{100}\right)}{1 + \dfrac{s}{50} + \dfrac{s^2}{100}}$$

试确定该电路的对数幅频特性曲线。

解：$H(s)$ 有一个实数零点 $s_1 = -100$，有两个共轭复极点，将

二次因式写成标准形式：

$$s^2 + 2s + 100 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

其中　$\omega_n = 10, \zeta = 0.1$。

第一步：由 $\omega = 10$ 点开始画一条斜率为 -40 分贝 /10 倍频程（即 -12 分贝 / 倍频程）的直线（对应于共轭复极点），再由 $\omega = 100$ 点开始画一条斜率为 20 分贝 /10 倍频程的直线（对应于实数零点）。

第二步：把这两条直线叠加起来。

第三步：作修正：① 在 $\omega = 100$ 点，由转折点 $\omega = 100$ 引起的修正值是 3 分贝，由转折点 $\omega = 10$ 引起的修正可以忽略。② 在 $\omega = 10$ 点，由转折点 $\omega = 10$ 引起的修正值为 13.9 分贝（见图 4.4.14 中 $\zeta = 0.1$ 那条修正曲线）。③ 在 $\omega = 6$ 点，由转折点 $\omega = 10$ 引起的修正值为 3.6 分贝，④ 在 $\omega = 8$ 点，修正值为 7.4 分贝（均见图 4.4.14），还可再取一些点进行修正，最后得到图 4.4.16 中的精确曲线。考虑常数因子后，还应将横轴平移 20 lg10 = 20 分贝，图 4.4.16 中的曲线已做了平移。

以上两例中的计算和作图可编制程序由计算机来完成。

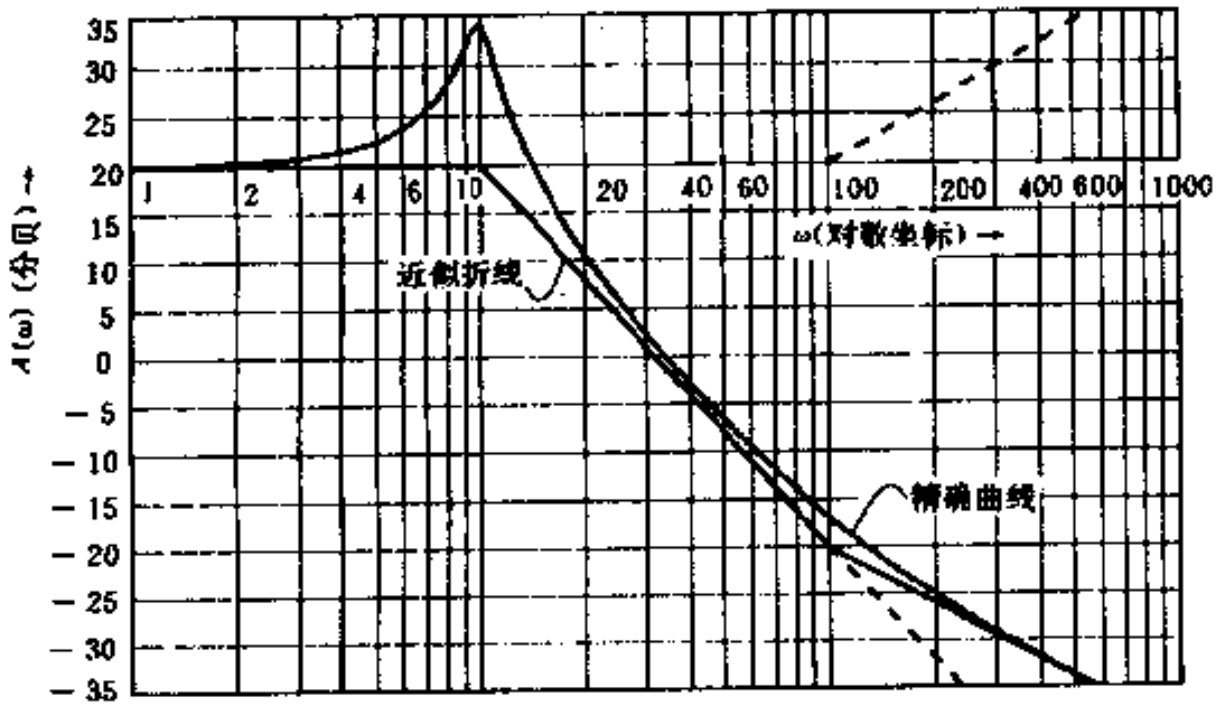


图 4.4.16　例 4.17 的对数幅频特性曲线

4.4.5 有源网络

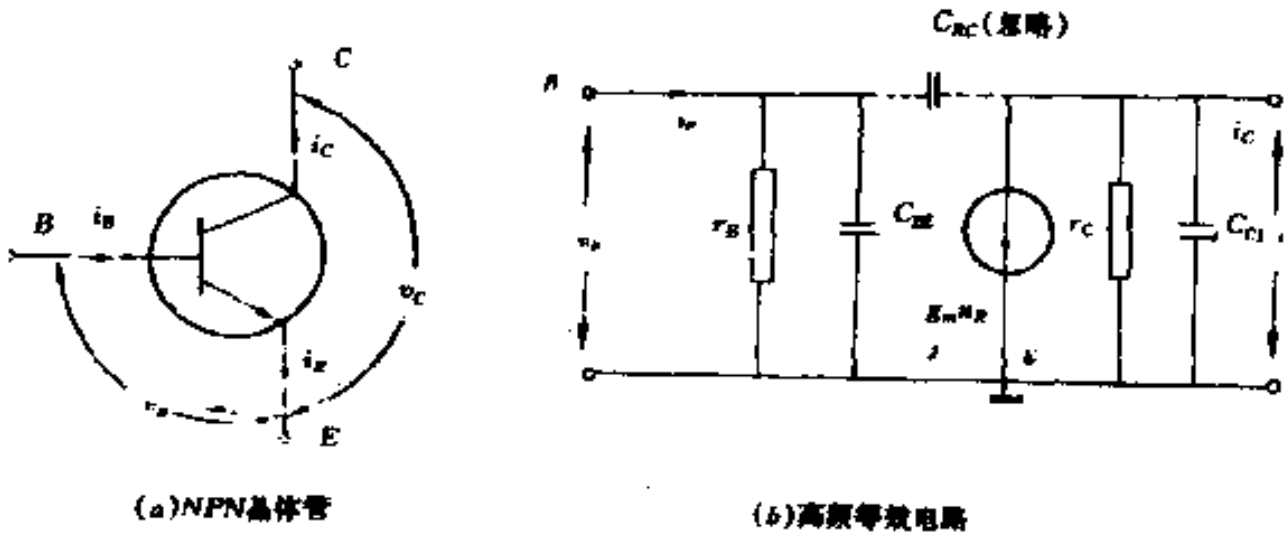
1.引述

有源网络与无源网络的区别主要在于其中包含有晶体管等非线性元件。但是在输入信号和输出信号比较小的条件下，可以在工作点附近的小范围内用直线代替管子的实际特性曲线，把非线性元件当作线性元件来处理。这样，我们就可以把晶体管电路等效为线性电路，利用类似于分析无源线性电路的方法进行分析。

对于结构简单的低频电路，它们的等效电路比较简单，往往只用到初等数学工具就可以了。但在高频电路或脉冲电路的条件下，因为要考虑分布电容的影响或晶体管的 $P-N$ 结电容的影响(频率再高还要考虑引线电感的影响)，等效电路比较复杂，在进行定量分析时，常采用 $\mathscr{L}$ 变换方法。特别是在根据瞬态特性设计电路时更显出 $\mathscr{L}$ 变换方法的优点。此外，分析多级电路也常采用 $\mathscr{L}$ 变换方法。下面通过几个具体问题来说明。

2.高频晶体管与多级放大器

图 4.4.17*a* 表示一个 *NPN* 型晶体管，当共发射极连接时，这晶体管的高频等效电路如图 4.4.17*b* 所示。



(a)NPN晶体管　　(b)高频等效电路

图 4.4.17　*NPN* 晶体管的高频等效电路

其中 r_B 是输入电阻(输出端交流短路)，r_C 是输出电阻(输入端交

流开路)，C_{BE} 和 C_{CE} 为 PN 结电容(忽略了 C_{BC}，因为 $C_{BC} \ll C_{B\dot{E}}$)，$g_m = \beta_0 / r_B$ 为低频跨导。β_0 为低频电流增益。

令 $\mathscr{L}[v_B(t)] = V_B(S)$ 和 $\mathscr{L}[i_B(t)] = I_B(s)$，对输入回路我们可写出：

$$I_B(s) = \left(\frac{1}{r_B} + sC_{BE}\right)V_B(s)$$

令 $\mathscr{L}[v_C(t)] = V_C(s)$ 和 $\mathscr{L}[i_c(t)] = I_C(s)$，对输出回路我们可写出：

$$I_C(s) = \left(\frac{1}{r_C} + sC_{CE}\right)V_C(s) + g_m V_B(s)$$

输出端短路时的电流增益为

$$\beta(s) = \left.\frac{I_C(s)}{I_B(s)}\right|_{V_C=0} = \frac{g_m V_B(s)}{\left(\frac{1}{r_B} + sC_{BE}\right)V_B(s)}$$

$$= \frac{g_m r_B}{1 + sr_B C_{BE}}$$

若取 $\beta_o = g_m r_B$ 和 $\tau_B = r_B C_{BE}$，则上式成为

$$\beta(s) = \frac{\beta_o}{1 + s\tau_B} \tag{4.4.41}$$

在负载 R_L 远小于输出电阻 r_C 的条件下，$\beta(s)$ 就是晶体管的电流增益，或称电流传输函数，我们看到，$\beta(s)$ 只具有一个极点。由于在推导(4.4.41)式时忽略了一些因素的影响，因此，(4.4.41)式常称为单极点近似。由(4.4.41)式很容易确定单极点函数 $\beta(s)$ 的瞬态特性和稳态特性。例如，令(4.4.41)式中 $s = j\omega$ 即得稳态频率响应 $\beta(j\omega)$：

$$\beta(j\omega) = \frac{\beta_o}{\sqrt{1 + (\omega\tau_B)^2}} e^{j\mathrm{tg}^{-1}(\omega\tau_B)}$$

其高频 3 分贝截止频率为 $f_B = (1/2)\pi\tau_B = (1/2)\pi r_B C_{BE}$。

由 NPN 晶体管构成的(单级)共发射极放大电路如图 4.4.18a 所

示，图中 C_o 表示输出回路中接线和元件对地产生的杂散电容。图 4.4.18*b* 为其简化后的等效电路。我们看到，这个放大电路的等效电路与图 4.4.17*b* 的晶体管等效电路具有类似的形式，只不过等效元件的数值有所不同。因此，我们不需重复前面的推导，即可知放大电路的电流传输函数（或电压传输函数）应具有类似于 (4.4.41) 式的形式：

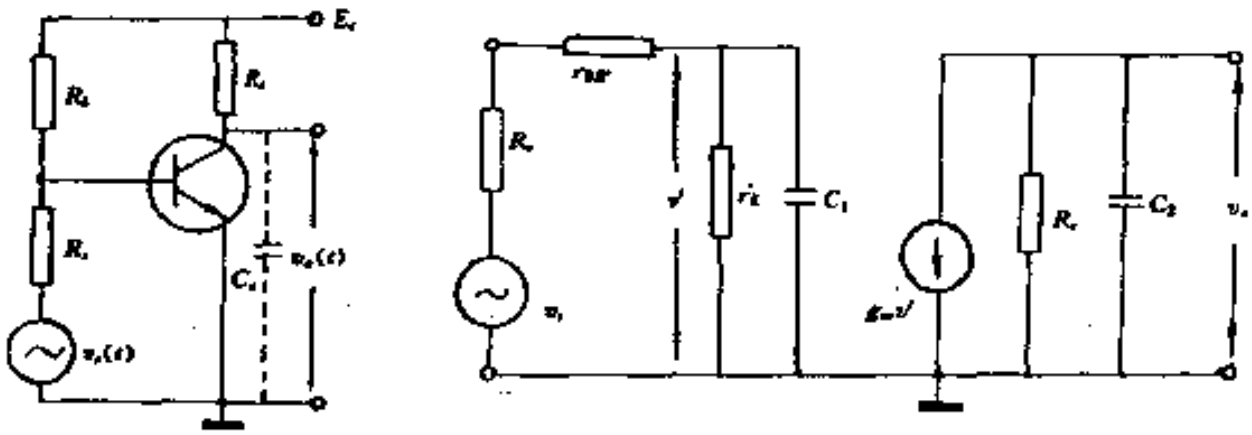
$$H(s) = \frac{A}{1 + s\tau} \tag{4.4.42}$$

其中 A 和 τ 是与复变量 s 无关的常数，A 是低频时（$s \to 0$）的电流增益（或电压增益），τ 是单级放大器高频截止频率所对应的时间常数。

为了提高增益常采用多级放大器（图 4.4.19），多级放大器的总增益是各级增益的乘积。假定每一级放大器都完全相同，以 $H(s)$ 表示一级的电压增益，那么总增益为

$$H_N(s) = [H(s)]^N = \frac{A^N}{(1 + s\tau)^N} \tag{4.4.43}$$

我们来考虑，给这样一个多级放大器输入一个矩形脉冲电



（*a*）放大电路　　（*b*）简化等效电路

图 4.4.18　共发射极放大电路及其等效电路

压，输出电压随时间变化的关系是怎样的（时间响应）。如果矩形脉

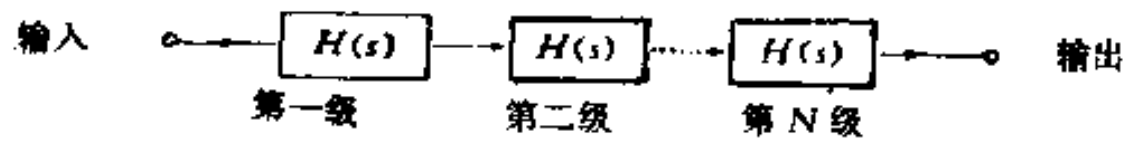


图 4.4.19　多级放大器方框图

冲高度为 E，持续时间为 T，则它可以看作是起始时刻相差 T 而极性相反的两个阶跃函数之和(见例 3.19)。因此，我们只需讨论多级放大器的阶跃响应即可。输入的阶跃函数电压 $Eu(T)$ 的像函数为

$$V_i(s) = \mathscr{L}[Eu(t)] = \frac{E}{s}$$

根据(3.2.13) 式，输出电压的像函数为

$$V_o(s) = H_N(s)V_i(s) = A^N E\left[\frac{1}{(1+s\tau)^n}\left(\frac{1}{s}\right)\right]$$

$$= \frac{A^N E}{\tau^N}\left[\frac{1}{\left(S+\frac{1}{\tau}\right)^N}\left(\frac{1}{s}\right)\right]$$

对上式做 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换就得到输出电压的时间函数：

$$v_o(t) = \frac{A^N E}{\tau^N}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)^N}\left(\frac{1}{s}\right)\right] \tag{4.4.44}$$

根据(4.2.13) 式，我们先求出[对(4.4.44) 式亦可按部分分式展开法做，见(4.2.9) 式]：

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)^N}\right] = \frac{1}{(N-1)!}t^{N-1}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{4.4.45}$$

利用表 3.4 中 $\mathscr{L}$ 变换的第 6 个性质(积分性质)，我们有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)^N}\left(\frac{1}{s}\right)\right] = \frac{1}{(N-1)!}\int_o^t t^{N-1}e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}t$$

$$= \tau^N \left\{ 1 - \left[1 + \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{N-1} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \right\}$$

$$= \tau^N \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{n-1} \right] \tag{4.4.46}$$

将(4.4.46)式的结果代入(4.4.44)式,就得到 N 级放大器对阶跃输入的瞬态响应为

$$v_o(t) = A^N E \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{n-1} \right] \tag{4.4.47}$$

根据(4.4.47)式,在第一级的输出端($N = 1$)有

$$v_{o1}(t) = AE\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

在第二级输出端($N = 2$)有

$$v_{o2}(t) = A^2 E \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \right]$$

在第三级输出端($N = 3$)有

$$v_{o3}(t) = A^3 E \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{\tau^2} \right) \right]$$

如此等等。给定常数 A, E, τ,即可按照以上各式画出级数不同的多级放大器输出电压 $v_o(t)$ 随时间变化的关系曲线,如图 4.4.20 所示。求出多级放大器的阶跃响应(4.4.47)式和相应的关系曲线有什么用呢?我们说,上述对多级放大器的初步计算,已经可以给出许多在设计中有用的指导性的结论,例如:

第一,当输入信号有突变时,放大器输出信号要经过一段时间后才能从零增长到接近于稳态值。这表明,由于放大器时间常数的存在,陡峭的脉冲前沿通过放大器后变成了较平缓的斜坡,并且,放大器的级数越多,输出信号的上升时间越长。所以,多级放大器虽然提高了增益,但却使信号波形失真了。这里我们看到放大器的增益和上升时间的相互制约性。

第二,一般规定,在图 4.4.20 中输出信号由 $0.1A^NE$ 上升到

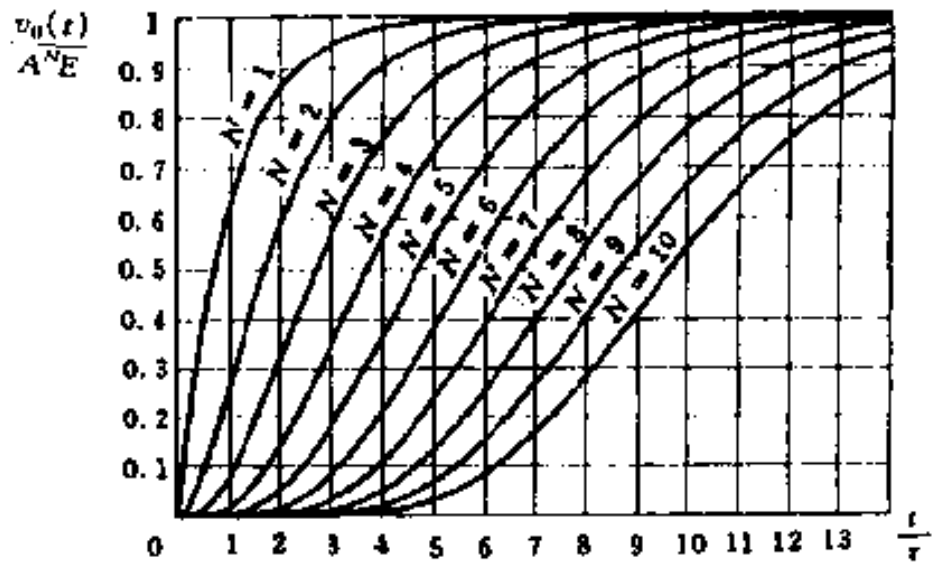


图 4.4.20　多级放大器的阶跃响应

$0.9A^NE$ 所用的时间为"上升时间",记为 τ_r。为确定不同级数 N 的上升时间 τ_r,就需要对不同的 N 值按(4.4.47)式计算出(或由图4.4.20直接算出)函数 $v_o(t)$,再算出 10% 到 90% 电平之间的时间就是上升时间 τ_r,表4.1给出不同级数 N 的上升时间 τ_r(第二行数据),这些数据是按 τ_r 除以 2.2τ 给出的(2.2τ 是一级的上升时间,记为 τ_r')。仔细观察表 4.1 第二行数据,它们大致与 N 的平方

表 4.1　多级放大器阶响应上升时间与级数 N 的关系

多级放大器的级数 N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\tau_r}{\tau_r'}$[按(4.4.47)式算出]	1.0	1.5	1.9	2.2	2.5	2.8	2.9	3.14	3.27	3.54
$\frac{\tau_r}{\tau_r'} \approx 1.1\sqrt{N}$	/	1.56	1.91	2.2	2.46	2.7	2.91	3.11	3.3	3.48

根成正比(略大于$\sqrt{N}$),在工程设计中常用近似公式

$$\frac{\tau_r}{\tau_t} \approx 1.1\sqrt{N} \tag{4.4.48}$$

来计算。按(4.4.48)式算出的数据列于表4.1的第三行。这些数据在按照瞬态响应进行电路设计时是有用的。

第三，在(4.4.43)式中令 $s = j\omega$ 就得到多级放大器的稳态频率响应：

$$H_N(j\omega) = \frac{A^N}{(1 + j\omega\tau)^N} \tag{4.4.49}$$

幅频特性为

$$|H_N(j\omega)| = \frac{|A|^N}{|1 + j\omega\tau|^N} = \frac{|A|^N}{[1 + (\omega\tau)^2]^{\frac{N}{2}}} \tag{4.4.50}$$

由于 τ 是单级放大器的时间常数，$1/\tau$ 对应于单级放大器的通频带高频半功率点 ω_h'，故为确定多级放大器的高频半功率点 ω_h，令(4.4.50)式右端等于最大幅值 $|A|^N$ 的 0.707(即 $1/\sqrt{2}$) 倍即可：

$$\frac{|A|^N}{\left[1 + \left(\frac{\omega_h}{\omega_h'}\right)^2\right]^{\frac{N}{2}}} = \frac{|A|^N}{\sqrt{2}}$$

即

$$1 + \left(\frac{\omega_h}{\omega_h'}\right)^2 = 2^{\frac{1}{N}}$$

由此得

$$\omega_h = \omega_h' \sqrt{2^{\frac{1}{N}} - 1}$$ 或

$$f_h = f_h' \sqrt{2^{\frac{1}{N}} - 1} \tag{4.4.51}$$

对于不同的级数 N，上式中 $\sqrt{2^{\frac{1}{N}} - 1}$ 的数值列于表 4.2。从表 4.2 所列数据可以看出，多级放大器的高频半功率点 f_h 总是小于单级的 f_h'。并且，级数越多，高频半功率点 f_h 的

表 4.2 f_h/f_h' 与 N 的关系

N	$\frac{f_h}{f_h'} = \sqrt{2^{\frac{1}{N}} - 1}$
1	1
2	0.64
3	0.51
4	0.43
5	0.38
6	0.35
7	0.32
8	0.30
9	0.28
10	0.265

数值越低。所以，多级放大器虽然提高了增益，但是通频带却窄了。这里我们看到增益和带宽的相互制约性。

3. 电感补偿放大器

为了展宽放大器的通频带，可以采取各种手段。这里仅就最简单的电感补偿放大器加以说明，重点放在如何利用 $\mathscr{L}$ 变换方法进行定量分析。图 4.4.21 是电感补偿放大器的高频简化等效电路。图中 R 为负载电阻，L 为所加的补偿电感，C 为极间电容 C_P 与分布电容 C_0 之和：$C = C_P + C_0$，r 为电子管的板极电阻，μ 为电子管的放大倍数(对于晶体管放大器亦可做出类似于图 4.4.21 的等效电路，所以，以下讨论的方法和结论也适用于晶体管放大器)。

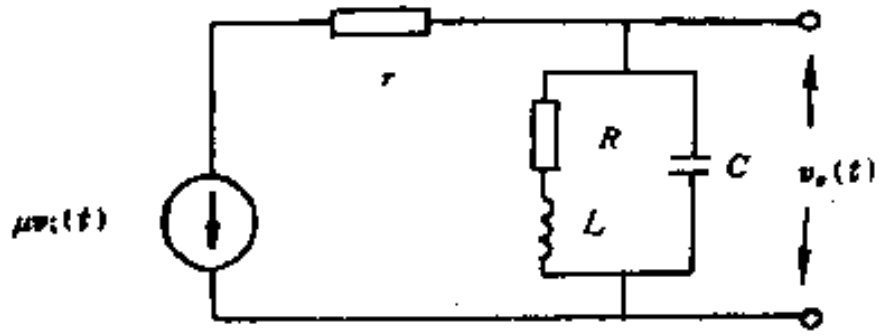


图 4.4.21　电感补偿放大器的简化等效电路

我们要讨论的问题是，如何选择补偿电感 L 的数值，以便获得最佳的输出波形和展宽通频带。

像前面一样，我们仍假定输入信号 $v_i(t)$ 是阶跃电压 $Eu(t)$，于是图 4.4.21 中的输入电压为

$$\mu v_i(t) = \mu E u(t) = K u(t)$$

其中常数 $K = \mu E$。对上式做 $\mathscr{L}$ 变换，设 $\mathscr{L}[v_i(t)] = V_i(s)$，我们有

$$\mu V_i(s) = \frac{K}{s} \tag{4.4.52}$$

图 4.4.21 中并联 RLC 回路的阻抗函数为

$$Z(s) = \frac{1}{\dfrac{1}{R + sL} + sC} = \frac{R + sL}{s^2LC + sRC + 1} \tag{4.4.53}$$

设输出电压 $v_o(t)$ 的像函数为 $V_o(s) = \mathscr{L}[v_o(t)]$，由图 4.4.21 可知：

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \left[\frac{Z(s)}{r + Z(s)}\right]\mu V_i(s) \\ &= \left(\frac{R + sL}{s^2LC + sRC + 1}\right)\left(r + \frac{R + sL}{s^2LC + sRC + 1}\right)^{-1}\frac{K}{s} \\ &= \frac{K(R + sL)}{srLC}\left[s^2 + s\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{rC}\right) + \left(\frac{r + R}{rLC}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \tag{4.4.54}$$

由上式右端可看出，$V_o(s)$ 有三个极点，一个是 $s_1 = 0$，另两个是

$$s_2, s_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{rC}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R^2}{L^2} + \frac{1}{r^2C^2}\right) - \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R}{2r}\right)} \tag{4.4.55}$$

所以(4.4.54)式的部分分式展开式为[参照(4.2.3)式]：

$$V_o(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s - s_3} \tag{4.4.56}$$

其中 A_1, A_2, A_3 分别为[根据(4.2.4)式]：

$$A_1[sV_o(s)]_{s=0} = \frac{K}{rLC}\left[\frac{R(rLC)}{r + R}\right] \tag{4.4.57a}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= [(s - s_2)V_o(s)]_{s=s_2} = \frac{K}{s_2rLC} \cdot \frac{R + s_2L}{s_2 - s_3} \\ &= \frac{K}{rLC}\left[\frac{R + s_2L}{2s_2^2 + \left(\dfrac{R}{L} + \dfrac{1}{rC}\right)s_2}\right] \end{aligned} \tag{4.4.57b}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= [(s - s_3)V_o(s)]_{s=s_3} = \frac{K}{s_3rLC} \cdot \frac{R + s_3L}{s_3 - s_2} \\ &= \frac{K}{rLC}\left[\frac{R + s_3L}{2s_3^2 + \left(\dfrac{R}{L} + \dfrac{1}{rC}\right)s_3}\right] \end{aligned} \tag{4.4.57c}$$

利用(4.4.56)和(4.4.57)式的结果,我们求出输出电压的时间函数[按照(4.2.7)式]:

$$v_o(t) = \mathscr{L}^{-1}[V_o(s)]$$

$$= \frac{K}{rLC}\left\{\frac{R(rLC)}{r+R} + \left[\frac{R+s_2L}{2s_2^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{1}{rC}\right)s_2}\right]e^{s_2t}\right.$$

$$\left. + \left[\frac{R+s_3L}{2s_3^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{1}{rC}\right)s_3}\right]e^{s_3t}\right\}_{t\geqslant 0} \tag{4.4.58}$$

若 r 非常大(实际多如此),则(4.4.58)式中的 $1/rC$ 和 $R/2r$ 可略去而得

$$v_o(t) = \frac{KR}{r} + \frac{K}{rLC}\left\{\left[\frac{\frac{R}{2}+L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}{\frac{R^2}{2L^2}-\frac{2}{LC}-\frac{R}{L}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}\right]\right.$$

$$\cdot\exp\left[\left(-\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)t\right]+$$

$$\left[\frac{\frac{R}{2}-L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}{\frac{R^2}{2L^2}-\frac{2}{LC}+\frac{R}{L}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}\right]$$

$$\left.\cdot\exp\left[\left(-\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)t\right]\right\} \tag{4.4.59}$$

以下分三种情况讨论:

(1) $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ 的情况:

令 $\alpha = -\frac{R}{2L}$

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \\ A &= \frac{R}{2} + L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \\ B &= \frac{R^2}{2L^2} - \frac{2}{LC} - \frac{R}{L}\sqrt{\frac{R^2}{2L^2} - \frac{1}{LC}}\end{aligned}\right\} \tag{4.4.60}$$

则(4.4.59)式中大括号内的项可表示成(注意,A^*为 A 的共轭复数):

$$\begin{aligned}&\frac{A}{B}e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{A^*}{B^*}e^{(\alpha-j\beta)t} \\ &= e^{\alpha t}\left(\frac{A}{B}e^{j\beta t} + \frac{A^*}{B^*}e^{-j\beta t}\right) \\ &= e^{\alpha t}\left[\left(\frac{A}{B} + \frac{A^*}{B^*}\right)\cos\beta t + j\left(\frac{A}{B} - \frac{A^*}{B^*}\right)\sin\beta t\right] \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{BB^*}[AB^* + A^*B)\cos\beta t + j(AB^* - A^*B)\sin\beta t]\end{aligned} \tag{4.4.61}$$

容易算出:

$$\left.\begin{aligned}BB^* &= \frac{4}{LC}\beta^2 \\ AB^* + A^*B &= -4R\beta^2 \\ AB^* - A^*B &= j\beta\left[\frac{2R^2}{L} - \frac{4}{C}\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.4.62}$$

将(4.4.60)至(4.4.62)式代入(4.4.59)式,我们得到

$$v_o(t) = \frac{KR}{r}\left[1 - e^{\alpha t}\cos\beta t - \frac{e^{\alpha t}}{2\beta}\left(\frac{R}{L} - \frac{2}{RC}\right)\sin\beta t\right] \tag{4.4.63}$$

通常引入参数 m(称为补偿参数):

$$m = \frac{L}{CR^2} \tag{4.4.64}$$

并将(4.4.63)式表示成

$$v_o(t) = \frac{KR}{r}\left[1 - e^{\alpha t}\cos\beta t + e^{\alpha t}\left(\frac{2m-1}{\sqrt{4m-1}}\right)\sin\beta t\right] \tag{4.4.65}$$

α 和 β 也可借 m 表示成

$$\alpha = -\frac{1}{2mCR} \tag{4.4.66a}$$

$$\beta = \frac{1}{2mCR}\sqrt{4m-1} \tag{4.4.66b}$$

(2) $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ 的情况:类似上面的计算可求出

$$v_o(t) = \frac{KR}{r}\left(1 - e^{\alpha t} - \frac{1}{2}\alpha t\, e^{\alpha t}\right) + 2m\alpha t\, e^{\alpha t} \tag{4.4.67}$$

(3) $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$ 的情况:可类似求出

$$v_o(t) = \frac{KR}{r}\left[1 + \frac{1+\sqrt{1-4m}}{\frac{1}{m}(1-\sqrt{1-4m})-4}e^{(1-\sqrt{1-4m})\alpha t} + \frac{1-\sqrt{1-4m}}{\frac{1}{m}(1+\sqrt{1-4m})-4}e^{(1-\sqrt{1-4m})\alpha t}\right] \tag{4.4.68}$$

这样,我们就可以画出输入阶跃电压时输出电压随时间变化的关系曲线,即阶跃响应曲线。当 $m > 0.25$ 时用(4.4.65)式;当 $m = 0.25$ 时用(4.4.67)式;当 $m < 0.25$ 时用(4.4.68)式。在图4.4.22中对六个不同的 m 值画出了阶跃响应曲线。我们看到,曲线 D 的波形比较理想,失真较小。这时所对应的 m 值为 0.35,根据(4.4.64)式,这时所对应的最佳补偿电感值为

$$L = 0.35R^2C \tag{4.4.69}$$

L 值若小于(4.4.69)式的值将使输出波形出现上冲;L 值若小于(4.4.69)式的值,则上升时间嫌长。

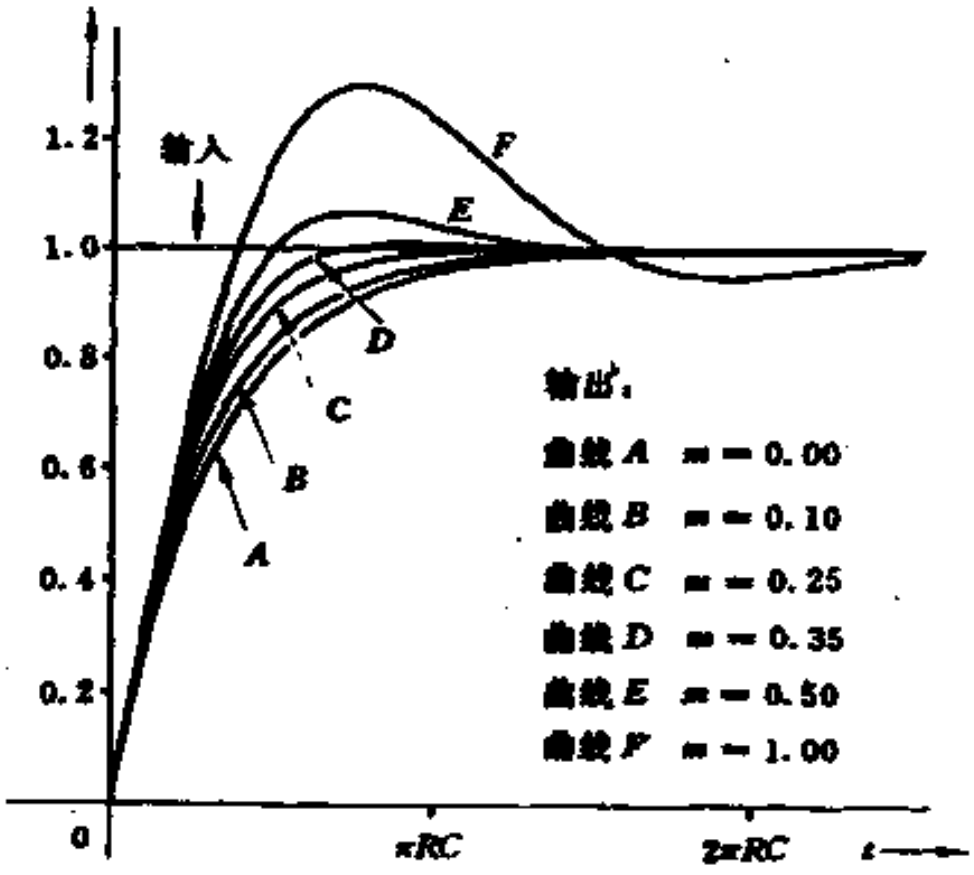


图 4.4.22　补偿电感对输出波形的影响

下面我们来讨论输出电压的稳态频率特性。这主要决定于 *RLC* 并联回路的阻抗。令(4.4.53) 式中 $s = j\omega$ 即得稳态频率特性：

$$Z(j\omega) = \frac{R + j\omega L}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1} \tag{4.4.70}$$

幅频特性则为

$$|Z(j\omega)| = R\sqrt{\frac{1 + m^2\Omega^2}{m^2\Omega^4 + (1 - 2m)\Omega^2 + 1}} \tag{4.4.71}$$

其中为简便引入：

$$m = \frac{L}{CR^2},\ \Omega = \omega RC = \frac{f}{f_o},\ f_o = \frac{1}{2\pi RC} \tag{4.4.72}$$

(4.4.71) 式还可改写为

$$P(j\omega) = \frac{|Z(j\omega)|}{R} = \sqrt{\frac{1 + m^2\Omega^2}{m^2\Omega^4 + (1 - 2m)\Omega^2 + 1}} \tag{4.4.73}$$

$P(j\omega)$ 称为频率失真系数。频率特性曲线 $P = f(\Omega)$ 的形状是由补偿参数 m 决定的。图 4.4.23 画出 $P = f(\Omega)$ 的曲线，六条曲线对应六个不同的 m 值。当 m 超过某个临界值，通频带高频端出现极大值。当 m 由 1 减小到零，对应的曲线由有极大值到没有极大值。当 m 为某一确定数值时，通频带的平坦部分最宽(这是我们所希望的)。为了寻找这个 m 值，我们求曲线 $P = f(\Omega)$ 的极大值所对应的频率 Ω_m。Ω_m 是补偿参数 m 的函数，当 Ω_m 是虚数时就过渡

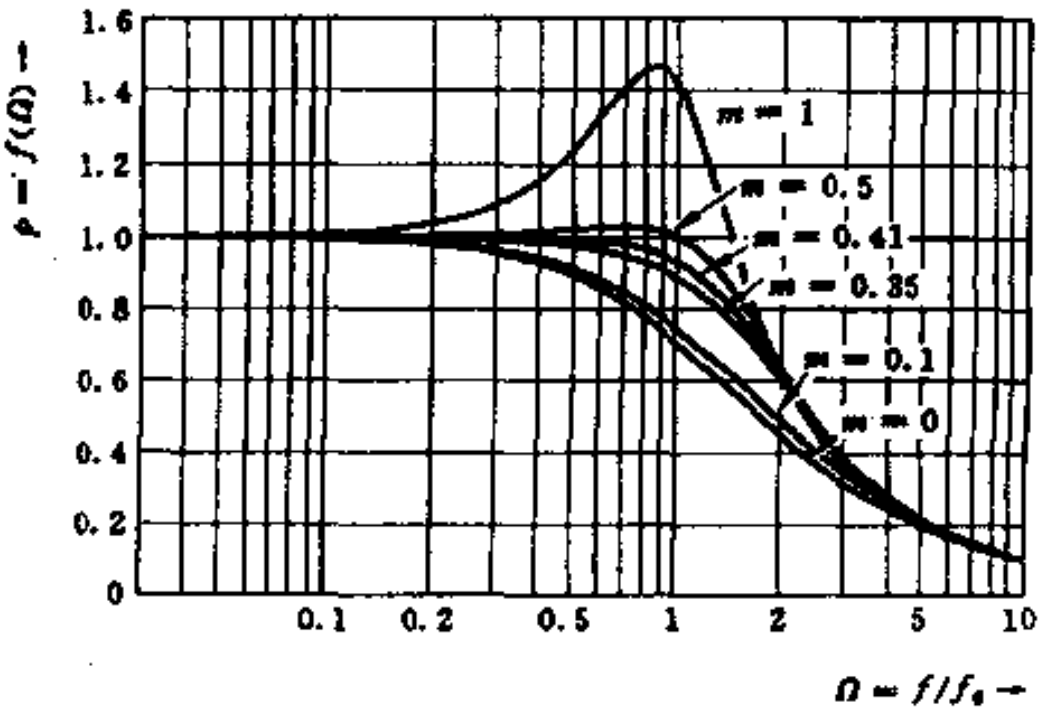


图 4.4.23　补偿电感对幅频特性的影响

到没有极大值的曲线了。为此，我们由(4.4.73)式出发求极值：

$$\frac{dP}{d\Omega} = 0 \tag{4.4.74}$$

即

$$2m^2\Omega\left[m^2\Omega^4 + (1 - 2m)\Omega^2 + 1\right] - (1 + m^2\Omega^2)\left[4m^2\Omega^3 + 2(1 - 2m)\Omega\right] = 0$$

整理后得方程：

$$m^4\Omega^4 + 2m^2\Omega^2 - (m^2 + 2m - 1) = 0$$

上述方程的解为：

$$\Omega = \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{m^2 + 2m}}{m^2}} \tag{4.4.75}$$

因此，由有极大值的曲线过渡到没有极大值的曲线所对应的 m 值决定于下面的条件：

$$m^2 + 2m = 1$$

亦即（m 仅取正值）：

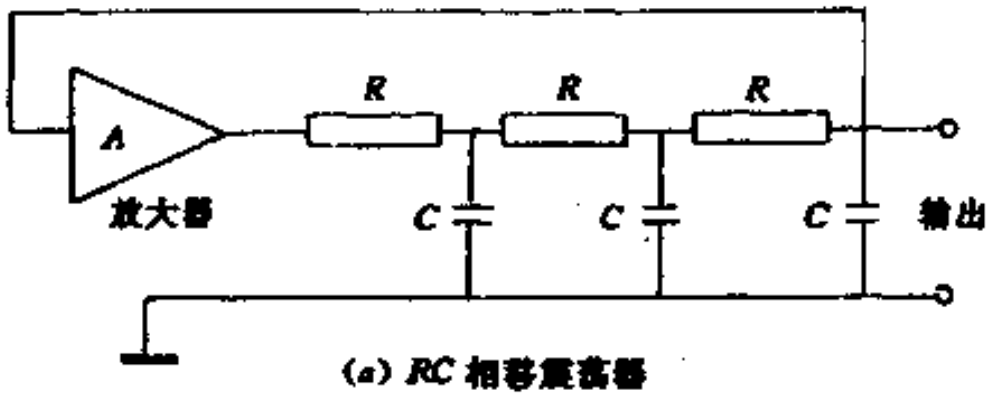
$$m = -1 + \sqrt{2} = 0.41 \tag{4.4.76}$$

这样，我们得出结论：要使通频带的平坦部分最宽，应选择补偿电感值的要求与失真较小的要求[(4.4.69) 式] 基本上是一致的。在工程设计上往往采用 $L = 0.4R^2C$。

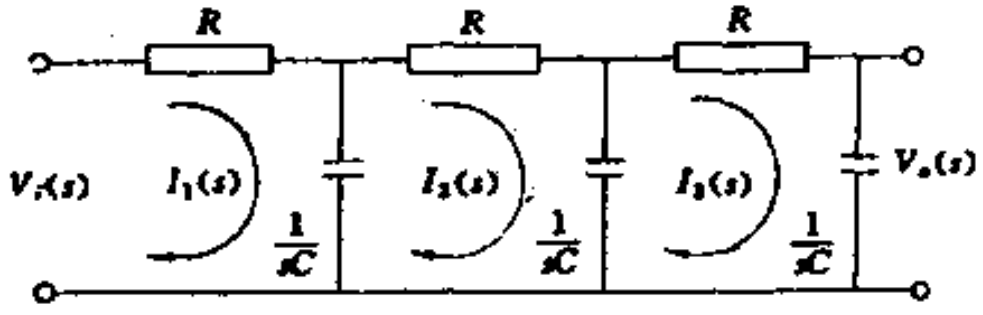
4. 相移振荡器

这种振荡器的基本电路如图 4.4.24(a) 所示。它由一个单级放大器和三节 RC 网络组成，由于放大器的输入与输出电压之间（对晶体管是基极电压与集电极电压之间）有 180° 的位相差，为满足振荡条件，三节 RC 网络必须在某一频率下也产生 180° 的相移。现在我们来确定这个起振频率和对增益的要求。为简化分析，我们略去移相网络与放大器的输入阻抗及输出阻抗之间的相互影响，来考察图 4.4.24(b) 的移相网络在什么条件下能提供 180° 的相移。在图 4.4.24(b) 中已将各物理量表示成 s 的函数（已做了 $\mathcal{L}$ 变换），由克希霍夫定律对图中的三个回路可以写出以下三个方程：

$$\left.\begin{aligned} V_i(s) &= \left(R + \frac{1}{sC}\right)I_1(s) - \frac{1}{sC}I_2(s) \\ 0 &= -\frac{1}{sC}I_1(s) + \left(R + \frac{2}{sC}\right)I_2(s) - \frac{1}{sC}I_3(s) \\ 0 &= -\frac{1}{sC}I_2(s) + \left(R + \frac{2}{sC}\right)I_3(s) \end{aligned}\right\} \tag{4.4.77}$$



(a) RC 相移振荡器



(b) 移相网络

图 4.4.24　相移振荡器

输出电压的像函数为

$$V_o(s) = \frac{1}{sC} I_3(s) \tag{4.4.78}$$

由方程组(4.4.77) 容易解出 $I_3(s)$：

$$I_3(s) = \frac{V_i(s)}{R^3C^2s^2 + 5R^2Cs + 6R + \frac{1}{sC}}$$

三节 RC 网络的传输函数为

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC} I_3(s)}{V_i(s)}$$

$$= \frac{1}{R^3C^3s^3 + 5R^2C^2s^2 + 6RCs + 1} \tag{4.4.79a}$$

稳态频率特性为

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

$$= \frac{1}{(1 - 5R^2C^2\omega^2) + j(6RC\omega - R^3C^3\omega^3)} \tag{4.4.79b}$$

要保证输出电压与输入电压有 180° 相位差，上式必须为负实数，亦即上式中不应出现虚数部分，令上式中的虚数部分为零得：

$$6RC\omega - R^3C^3\omega^3 = 0$$

解出

$$\omega = \frac{\sqrt{6}}{RC} \tag{4.4.80a}$$

或

$$f = \frac{\sqrt{6}}{2\pi RC} \tag{4.4.80b}$$

这就是所要确定的振荡频率。在工程设计上可以根据(4.4.80b)式选择 R 和 C 的数值。在这个振荡频率下，由(4.4.79b)式知输入电压与输出电压之比为

$$\frac{V_i(j\omega)}{V_o(j\omega)} = 1 - 5R^2C^2\omega^2$$

但由(4.4.80a)式知

$$\omega^2 = \frac{6}{R^2C^2}$$

所以

$$\frac{V_i}{V_o} = 1 - 5R^2C^2\left(\frac{6}{R^2C^2}\right) = -29 \tag{4.4.81}$$

上式中负号表示输入与输出之间存在 180° 的相移，$\left|\frac{V_i}{V_o}\right| = 29$ 说明移相网络使电压减小 29 倍，因此放大器的增益 $A \geqslant 29$ 才能起振。

容易证明，若将图 4.4.24a 中的 R 和 C 交换位置，振荡频率则

为 $f=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{6}RC}$。

4.4.6 滤波器

$\mathscr{L}$变换把电路问题由时域转移到复频域(s 域)来讨论,本章已经介绍了一些例子。这里我们以滤波器为例,进一步说明如何在 s 域研究电路问题。

1.传输函数的归一化

打开近代滤波器设计手册,我们看到所给出的多是归一化网络和归一化传输函数。在本章也多次出现过归一化传输函数。在讨论滤波器之前,有必要对归一化问题做简单说明。

我们知道,实际电路中元件数值差别很大,电容值可以在 10^{-12} 的数量级,而电阻值可以在 10^{6} 数量级;同时,所遇到的频率范围也很大,比如从1赫到 10^{8} 赫。这样,电路传输函数中的系数数值就比较复杂。为避免使用复杂的数值系数所带来的麻烦,简化运算,普遍采取所谓归一化方法。什么是归一化呢?我们先看看网络传输函数的两个简单性质。

(1) 网络中每个元件的阻抗值除以(或乘以) 常数 R_0,网络传输函数保持不变。例如,把图 4.4.25a 电路中每个元件的阻抗值除以常数 R_0 就得到图 4.4.25b 的电路。这两个电路的传输函数 $H(s)$ 是一样的,对于复杂电路亦如此。这个性质也可以说成:如果同时把一个网络中的每个电阻值 R 除以 R_0,每个电感值 L 除以 R_0,而每个电容值 C 乘以 R_0,则这网络的传输函数不变。这一步骤称为阻抗水平变换。

(2) 图 4.4.25 是一个简单的低通滤波器,前已讨论过,它的高频截止频率为 $\omega_0=\dfrac{1}{RC}$,为进一步简化传输函数,我们可以把这个截止频率值选为1(即 ω_0 除以 ω_0),于是图 4.4.25 的传输函数

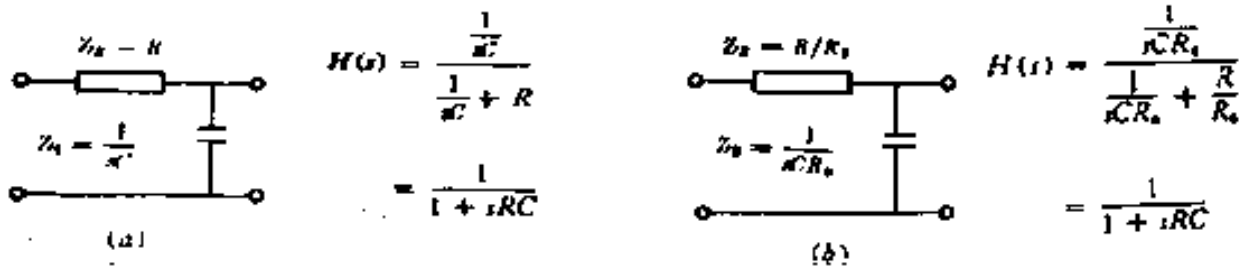


图 4.4.25　两个 RC 网络具有相同的传输函数

简化为 $H(s) = 1/(1 + s)$。这一步骤称为频率归一化或频率标度变换。这样做并未改变 $H(s)$ 的一般性质(如零点、极点的个数及相对位置)。频率归一化以后,为使与频率有关的电抗元件数值保持不变,应将原来的电感值 L 乘以 ω_0,电容值 C 也乘以 ω_0。或者反过来说,当频率由 $\omega = 1$ 变为 $\omega = \omega_0$ 时,网络中所有电感和电容值均应除以 ω_0,而所有电阻值不变。

把以上两个性质综合起来,我们得到由实际元件数值(R、L、C)求归一化元件数值(R_n、L_n、C_n)的公式为:

$$R_n = \frac{R}{R_0};\quad L_n = \frac{L\omega_0}{R_0};\quad C_n = CR_0\omega_0 \qquad (4.4.82)$$

其中 ω_0 称基准频率,R_0 称基准阻抗。ω_0 和 R_0 可根据具体情况有不同选择。由(4.4.82)式可看出,归一化元件值是没有量纲的。手册中给出的大多是标有归一化元件数值的网络和相应的传输函数。当需要由归一化元件值还原为实际元件值时,由(4.4.82)式有

$$R = R_nR_0;\quad L = \frac{L_nR_0}{\omega_0};\quad C = \frac{C_n}{R_0\omega_0} \qquad (4.4.83)$$

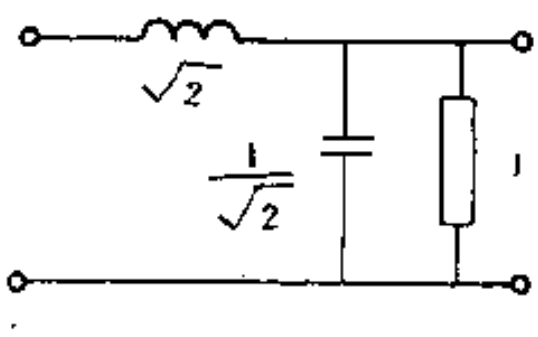


图 4.4.26　低通滤波器

例 4.18　图 4.4.26 是一个归一化低通滤波器,输出电阻为 1,截止频率为 $\omega_0 = 1$,试确定输出电阻为 10k 欧姆、截止频率为 $\omega_0 = 1000$ 弧度/秒时,该滤波器各元件的实际数值。

解：基准阻抗 $R_0 = 10\text{k}$ 欧姆，基准频率 $\omega_c = 1000$ 弧度 / 秒，根据(4.4.83) 式，元件的实际数值为：

$$R = 1 \times 10^4 = 10\text{K}(\text{欧姆})$$

$$L = \frac{\sqrt{2} \times 10^4}{10^3} = 10\sqrt{2}(\text{亨利})$$

$$C = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{10^4 \times 10^3} = \frac{10^{-7}}{\sqrt{2}}(\text{法拉})$$

2. 伯特沃斯低通滤波器

最合乎我们理想的低通滤波器应具有图 4.4.27 所示的幅频特性。就是通带内的全部频率成分能毫无衰减地通过，而阻带内的全部频率成分则完全被衰减掉。这种理想的滤波器实际上是无法实现的。因为，以前讨论过，实际网络的传输函数 $H(s)$ 总是两个有限项的多项式之比，其稳态幅频特性 $|H(j\omega)|$ 是 ω 的连续匀滑函数(处处可导)，不可能像图 4.4.27 那样出现无限大斜率。但是，我们可以近似地找到最接近理想特性的传输函数 $H(s)$。近似的方法有许多种，如伯特沃斯近似，切比雪夫近似，贝塞尔近似等等。这里仅讨论伯特沃斯近似。它是用下列函数来近似地表示图4.4.27 的归一化幅频特性：

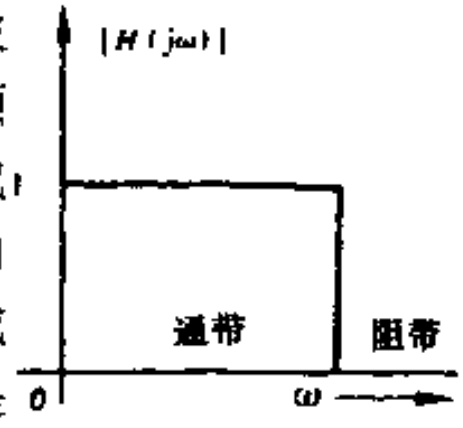


图 4.4.27　理想低通滤波器的幅频特性

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \tag{4.4.84a}$$

$$G(\omega^2) = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \tag{4.4.84b}$$

其中 n 为正整数。从(4.4.84a) 式可以看出，当 $\omega = 1$ 时(归一化截止频率)，$|H(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$；当 $\omega < 1$ 时，$|H(j\omega)|$ 近似为 1；当

$\omega > 1$ 时，$|H(j\omega)|$ 近似为零。所以 $0 < \omega < 1$ 为通带，$\omega > 1$ 为阻带，确有低通特性。并且 n 值越大，越接近于图 4.4.27 的理想低通特性。按照(4.4.84) 式设计出的低通滤波器称为伯特沃斯低通滤波器。n 称为滤波器的阶数。在图 4.4.28 中按照(4.4.84) 式画出

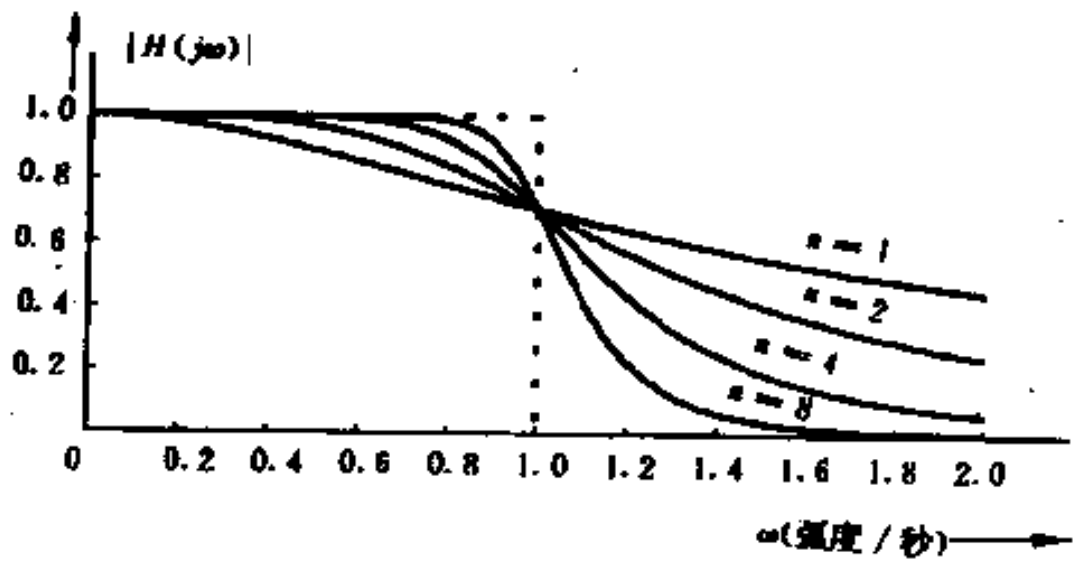


图 4.4.28　伯特沃斯滤波器的幅频特性

了 1 阶、2 阶、4 阶、8 阶伯特沃斯滤波器的幅频特性曲线。从图中我们看到：(1) n 值越大，由通带到阻带的过渡带越窄；(2) 在通带内曲线平坦而没有起伏；(3) n 值越大，曲线平坦部分越宽。

现在我们问，什么样的传输函数 $H(s)$ 才具有(4.4.84) 式的幅频特性呢？根据前面所讨论的传输函数与频率响应的关系，只要在(4.4.84b) 式中令 $j\omega \to s$，或 $\omega \to s/j$ 即可找到相应的传输函数 $H(s)$：

$$G(\omega^2) \to G(-s^2)$$

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) \to H(s)H(-s)$$

$$\frac{1}{1+\omega^{2n}} \longrightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

所以

$$G(-s^2) = H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}} \qquad (4.4.85)$$

上式右端仅在无限远点($s = \infty$)有零点,故为全极点函数。令上式右端分母为零即可求得各极点。这时有 $s^{2n} = \pm 1$(n 为偶数时取正号),于是有

$$\left.\begin{aligned} s_k &= e^{j\frac{2k-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}(n \text{ 为偶数}) \\ s_k &= e^{j\frac{2k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}} \quad (n \text{ 为奇数}) \end{aligned}\right\} k = 1,2,\cdots,2n \qquad (4.4.86)$$

显然这些极点都位于 s 平面的单位圆圆周上,且具有相等的弧度间隔,极点的总数为 $2n$ 个。图 4.4.29 画出了 2 阶到 4 阶情况下 $G(-s^2)$ 函数的极点位置。

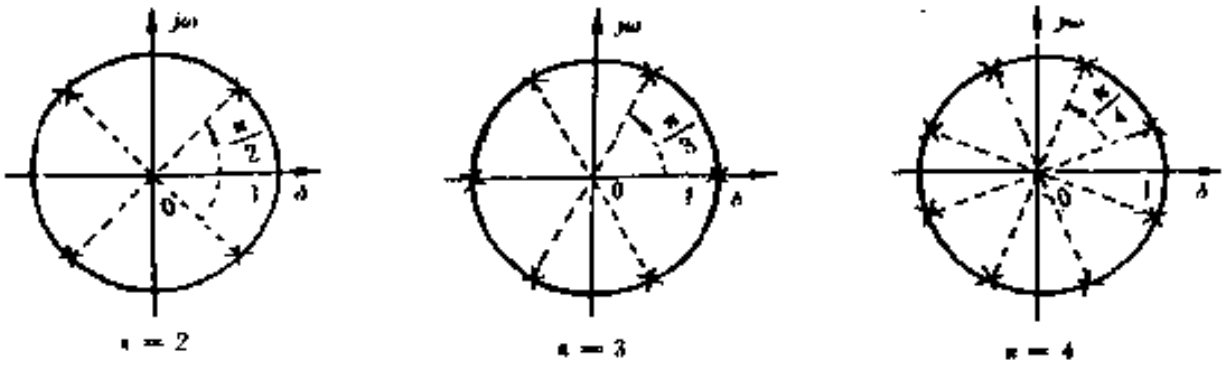


图 4.4.29　函数 $G(-s^2)$ 的极点位置

前已讨论过,稳定网络的传输函数 $H(s)$ 的全部极点应在 s 平面的左半平面,于是 $H(-s)$ 的全部极点就应在 s 平面的右半平面,而 $G(-s^2)$ 的极点是 $H(s)$ 的极点与 $H(-s)$ 的极点之和[见(4.4.85)式],所以 $G(-s)^2$ 的左半平面的全部极点(n 个)均应属于 $H(s)$。这样,我们得到伯特沃斯滤波器的传输函数一般形式:

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(s - s_k)} = \frac{1}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + s^n}$$

$$= \frac{1}{P_{Bn}(s)} \qquad (4.4.87)$$

其中分母多项式 $P_{Bn}(s)$ 称为伯特沃斯多项式。

各阶伯特沃斯多项式的具体形式如何呢?当 $n = 1$ 时,$H(s)$ 只有一个极点:$s_1 = -1$,所以

$$H(s) = \frac{1}{1+s}, \quad (n = 1) \tag{4.4.88}$$

当 $n = 2$ 时,$H(s)$ 有两个极点(共轭):$s_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$,所以

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} \\ &= \frac{1}{P_{B2}(s)} \end{aligned} \tag{4.4.89}$$

当 $n = 3$ 时,$H(s)$ 有三个极点:$s_1 = -1$, $s_2 = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $s_3 = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$,所以

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s+1)(s-e^{j\frac{2\pi}{3}})(s-e^{-j\frac{2\pi}{3}})} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s^2-se^{j\frac{2\pi}{3}}-se^{-j\frac{2\pi}{3}}+1)} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s^2-2s\cos\frac{2\pi}{3}+1)} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \\ &= \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1} = \frac{1}{P_{B3}(s)} \end{aligned} \tag{4.4.90}$$

表 4.4.3 列出 2 阶到 10 阶伯特沃斯多项式 $P_{Bn}(s)$ 的系数。确定了 $H(s)$ 的极点,则伯特沃斯多项式 $P_{Bn}(s)$ 也就确定了。

表 4.3　多项式 $1+\sum_{k=1}^{n} b_k s^k + s^n$ 的系数

n	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
2	1.414								
3	2.000	2.000							
4	2.613	3.414	2.613						
5	3.236	5.236	5.236	3.236					
6	3.864	7.404	9.141	7.464	3.864				
7	4.494	10.103	14.606	14.606	10.103	4.494			
8	5.126	13.138	21.848	25.691	21.848	13.138	5.126		
9	5.759	16.582	31.163	41.986	41.986	31.163	16.582	5.759	
10	6.392	20.432	42.802	64.882	74.233	64.882	42.802	20.432	6.392

$H(s)$ 的极点可用复数表示[注意 $H(s)$ 的 n 个极点均在左半平面，参照图4.4.29]，由(4.4.86)式将 $G(-s^2)$ 的前 n 个极点旋转 $\pi/2$ 即得 $H(s)$ 的极点，故 $H(s)$ 的极点为：

$$s_k = \delta_k + j\omega_k, \tag{4.4.91a}$$

$$\delta_k = -\sin\left\{\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right\}, \tag{4.4.91b}$$

$$\omega_k = \cos\left\{\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right\}, \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{4.4.91c}$$

在表 4.4 中给出 2 阶至 10 阶伯特沃斯滤波器的极点位置。

伯特沃斯低通滤波器的电路结构是什么样的呢?由传输函数 $H(s)$ 求电路结构是一个网络综合问题，许多专业书中均有讨论，此处仅将结论提一下。对于工作在信号源与负载之间的低通滤波器，具有图 4.4.30 的梯形网络结构，其中 $g_0, g_1, g_2, \cdots, g_n, g_{n+1}$ 是电路中各元件的归一化数值，图中(a) 和(b) 两电路互为对偶电路。各元件物理意义如下：

$$g_k\big|_{k=1\sim n} = \begin{cases} \text{串联电感} \\ \text{或并联电容} \end{cases}$$

表 4.4　伯特沃斯滤波器的极点位置

$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
-0.707	-0.500	-0.383	-0.809	-0.259	-0.901	-0.195	-0.940	-0.156
$\pm j0.707$	$\pm j0.866$	$\pm j0.924$	$\pm j0.588$	$\pm j0.966$	$\pm j0.434$	$\pm j0.981$	$\pm j0.342$	$\pm j0.988$
	-1.000	-0.924	-0.309	-0.707	-0.223	-0.556	-0.174	-0.454
		$\pm j0.383$	$\pm j0.951$	$\pm j0.707$	$\pm j0.975$	$\pm j0.831$	$\pm j0.985$	$\pm j0.891$
			-1.000	-0.966	-0.623	-0.831	-0.500	-0.707
				$\pm j0.259$	$\pm j0.782$	$\pm j0.556$	$\pm j0.866$	$\pm j0.707$
					-1.000	-0.981	-0.766	-0.891
						$\pm j0.195$	$\pm j0.643$	$\pm j0.454$
							-1.000	-0.988
								$\pm j0.156$

$$g_0 = \begin{cases} \text{若 } g_1 = C_1\text{(即电容输入)，则为信号源的电阻 } R_s \\ \text{若 } g_1 = L_1\text{(即电感输入)，则为信号源的电导 } G_s \end{cases}$$

$$g_{n+1} = \begin{cases} \text{若 } g_n = C_n\text{，则为负载电阻 } R_L \\ \text{若 } g_n = L_n\text{，则为负载电导 } G_L \end{cases}$$

可以证明，若 $g_0 = g_{n+1} = 1$(信号源内阻等于负载电阻)，且3分贝截止频率 $\omega_0 = 1$，则有

$$g_k = -2\delta_k = 2\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right], \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{4.4.92}$$

其中 δ_k 是极点 s_k 实部的负值，见(4.4.91b)式，δ_k(因而 g_k)的数值可由表4.4中查出。这样，由预给的滤波器技术要求可以确定传输函数 $H(s)$，进而确定具体电路。

例4.19　设计一个伯特沃斯低通滤波器，它工作在相等的信号源电阻 R_s 与负载电阻 R_L 之间。并且 $R_s = R_L = 1\text{k}\Omega$；滤波器要能通过0和10kHz之间的频率，在10kHz的最大衰减为3分贝；在15kHz及其以上频率衰减不小于30分贝。

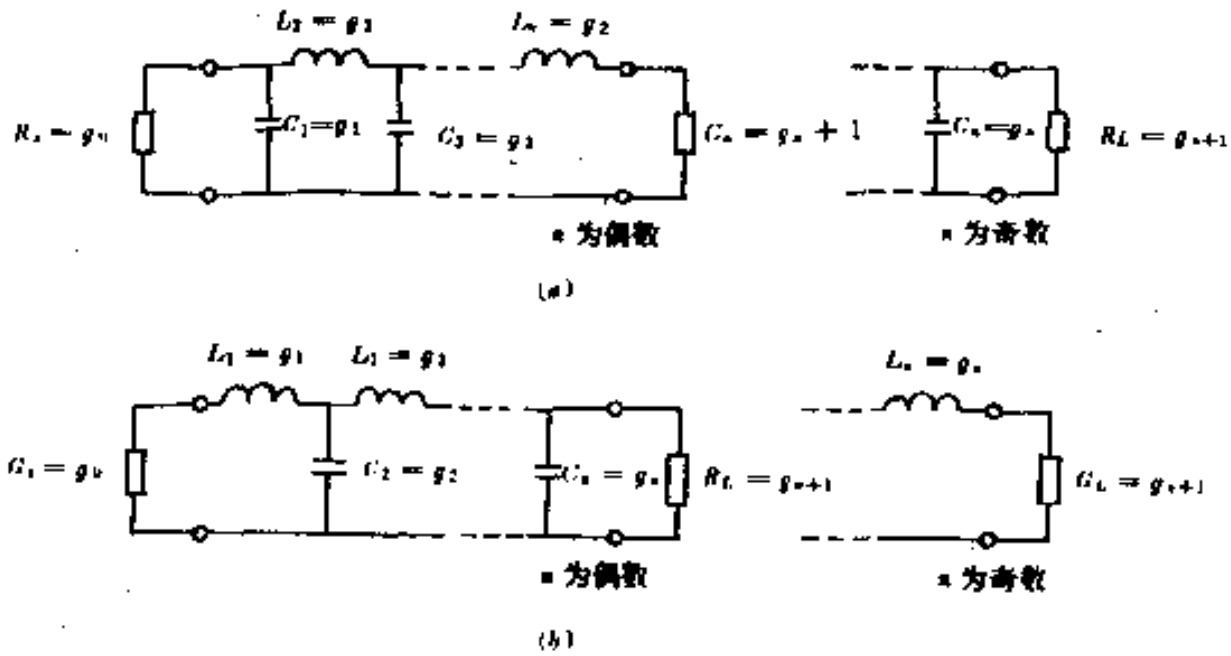


图 4.4.30　伯特沃斯低通滤波器(原型)

解:第一步:确定滤波器所需要的阶数。

以截止频率 $\omega_0 = 2\pi \times 10\text{kHz}$ 为基准频率,15kHz 所对应的归一化频率为

$$\omega = \frac{2\pi \times 15\text{kHz}}{2\pi \times 10\text{kHz}} = 1.5$$

利用(4.4.84a)式,在 15kHz 频率的衰减应满足以下关系:

$$+20\lg\frac{1}{\sqrt{1+(1.5)^{2n}}} = 30$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{1+(1.5)^{2n}}} = 10^{\frac{3}{2}}$$

或

$$1+(1.5)^{2n} = 10^3$$

近似取　$(1.5)^{2n} = 10^3$

于是　$n = \dfrac{3}{2\lg 1.5} = \dfrac{3}{2\times 0.176} = 8.52$

可见,滤波器应在 8 阶与 9 阶之间,兹取为 9 阶。

第二步:确定归一化网络。

由于 $n = 9$,根据(4.4.92)式,该网络应由9个电抗元件组成。根据图(4.4.30a),由于 $g_0 = R_s = 1, g_{n+1} = R_L = 1$,所以该网络应该由4个电感和5个电容组成。每个电抗元件的归一化数值由(4.4.92)式和表4.4可以定出。注意当 n 从1增加到9时,$|\delta_k|$ 应按小→大(等于1)→小的次序排列。这样,我们得到图4.4.31的归一化低通网络,每个元件的归一化数值均已标于图中。

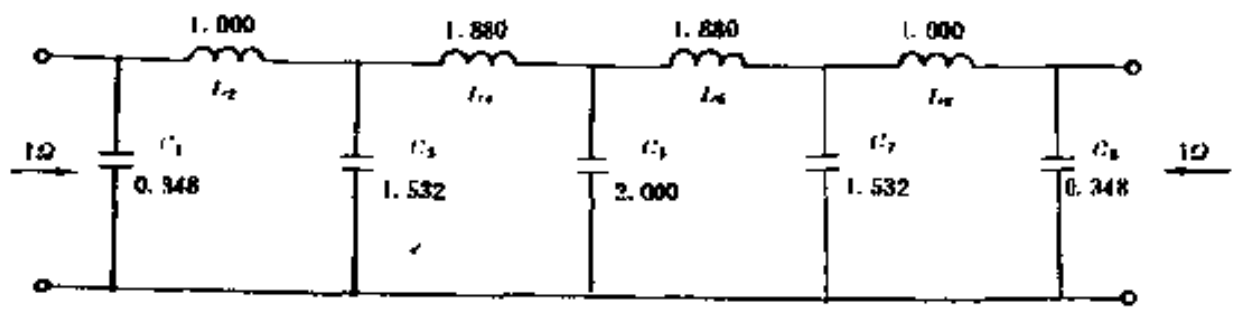


图 4.4.31　归一化伯特沃斯低通滤波器

第三步:确定实际元件的数值。

根据(4.4.83)式,归一化电感值 L_n 乘以 R_0/ω_0 即得实际电感值;归一化电容值 C_n 乘以 $1/R_0\omega_0$ 即得实际电容值。今 $\omega_0 = 2\pi \times 10^4$ 弧度 / 秒, $R_0 = R_3 = R_L = 10^3\Omega$,故

$$\frac{R_0}{\omega_0} = \frac{10^3}{2\pi \times 10^4} = 15.9(\text{毫亨})$$

$$\frac{1}{R_0\omega_0} = \frac{1}{10^3 \times 2\pi \times 10^4} = 0.0159(\text{微法})$$

将图4.4.31中每个电感值乘以15.9(毫亨),每个电容值乘以0.0159(微法)就得到图4.4.32中的实际元件值。

3.瞬态响应

现在我们进一步考虑伯特沃斯低通滤波器的瞬态响应。假定给这样一个滤波器输入单位阶跃信号:$v_i(t) = u(t)$,对 $u(t)$ 做 $\mathcal{L}$ 变换即得输入信号的像函数 $V_i(s)$:

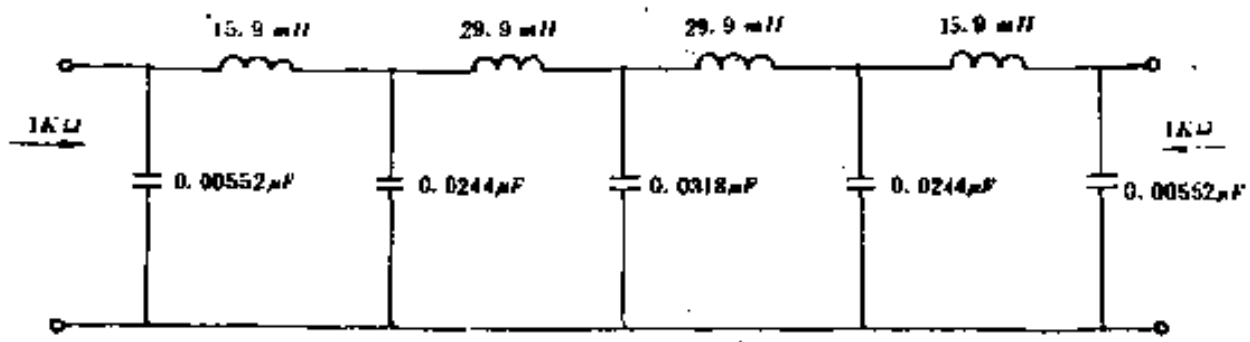


图 4.4.32　伯特沃斯低通滤波器的实际元件值

$$V_i(s) = \mathscr{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \tag{4.4.93}$$

根据(3.2.13)式,输出信号的像函数是

$$\mathscr{L}[v_o(t)] = H(s)V_i(s) \tag{4.4.94}$$

其中 $H(s)$ 是伯特沃斯低通滤波器的传输函数,如(4.4.87)式所示。将(4.4.87)式展为部分分式得

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{K=1}^{n}(s - s_k)} = \sum_{K=1}^{n}\frac{A_k}{s - s_k} \tag{4.4.95}$$

其中 A_k 是在极点 s_k 处的留数,它的数值按(4.2.4)式计算。将(4.4.93)和(4.4.95)式代入(4.4.94)式得

$$\mathscr{L}[v_o(t)] = \sum_{K=1}^{n}\frac{A_k}{s(s - s_k)} = \sum_{K=1}^{n}\left[\frac{\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)}{s} - \frac{\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)}{s - s_k}\right] \tag{4.4.96}$$

我们利用 $\mathscr{L}$ 变换的初值性质(3.3.7)式和终值性质(3.3.5)式先来确定输出信号 $v_o(t)$ 的初值和终值:

$$v_o(t)\big|_{t=o} = \left[s\sum_{K=1}^{n}\frac{A_k}{s(s - s_k)}\right]_{s=\infty} = 0$$

$$v_o(t)\big|_{t=\infty} = \left[s\sum_{K=1}^{n}\frac{A_k}{s(s - s_k)}\right]_{s=o} = \sum_{K=1}^{n}\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)$$

由(4.4.95)式(令其中 $s = 0$)可知:

$$\sum_{K=1}^{n}\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)=\frac{1}{\prod_{K=1}^{n}(-s_k)}=1 \tag{4.4.97}$$

上式右端等于1是因为$\prod_{k=1}^{n}(-s_k)$就是伯特沃斯多项式的常数项，它等于1。故有

$$\left.\begin{aligned} v_o(t)\big|_{t=0}&=0\\ v_o(t)\big|_{t=\infty}&=1\end{aligned}\right\} \tag{4.4.98}$$

为求输出信号的整个时间函数，我们对(4.4.96)式做$\mathscr{L}^{-1}$变换得到

$$\begin{aligned} v_o(t)&=\sum_{k=1}^{n}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)}{s}-\frac{\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)}{s-s_k}\right]\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)u(t)-\sum_{K=1}^{n}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)}{s-s_k}\right]\end{aligned}$$

根据(4.4.97)式，上式右端第一个求和项就等于$u(t)$，而第二个求和项具有(4.2.7)式的形式，故有

$$v_o(t)=u(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)e^{s_K t}u(t) \tag{4.4.99}$$

由于$H(s)$的极点s_k为共轭复数，相应的留数A_k亦为共轭复数，它们都成对出现。为便于计算，(4.4.99)式右端第二个求和项中的各共轭项尚可表示为[参照(4.2.14)式]：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)e^{s_k t}+\left(\frac{A_K}{-s_K}\right)e^{s_k^* t}\\ &=2e^{\delta_k t}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)\cos\omega_k t-\mathrm{Im}\left(\frac{A_k}{-s_k}\right)\sin\omega_k t\right]\end{aligned} \tag{4.4.100}$$

其中$s_k=\delta_k+j\omega_k$，$s_k^*=\delta_k-j\omega_k$，Re和Im分别表示取实部和取虚部。给定伯特沃斯低通滤波器的阶数，由表4.4.4可查出相应的极点，并算出相应的留数A_k，于是可按(4.4.99)和(4.4.100)式

计算出这滤波器的单位阶跃响应 $v_o(t)$，这种计算多由电子计算机进行。图 4.4.33 画出了 1 至 10 阶滤波器的单位阶跃响应曲线。从这些曲线可以看出，给这种滤波器输入阶跃信号，其输出信号存在过冲和振铃现象。过冲量与滤波器的阶数 n 有关，阶数 n 越高，过冲量越大。例如，由图中可以看出，4 阶滤波器约有 11% 的过冲量。其次可以看出，输出信号的上升时间总的来说还是很短的，随阶数 n 的增大，上升时间稍有增加。另外可看出输出信号存在着时间延迟，延迟时间随阶数 n 的增加而有所增加。

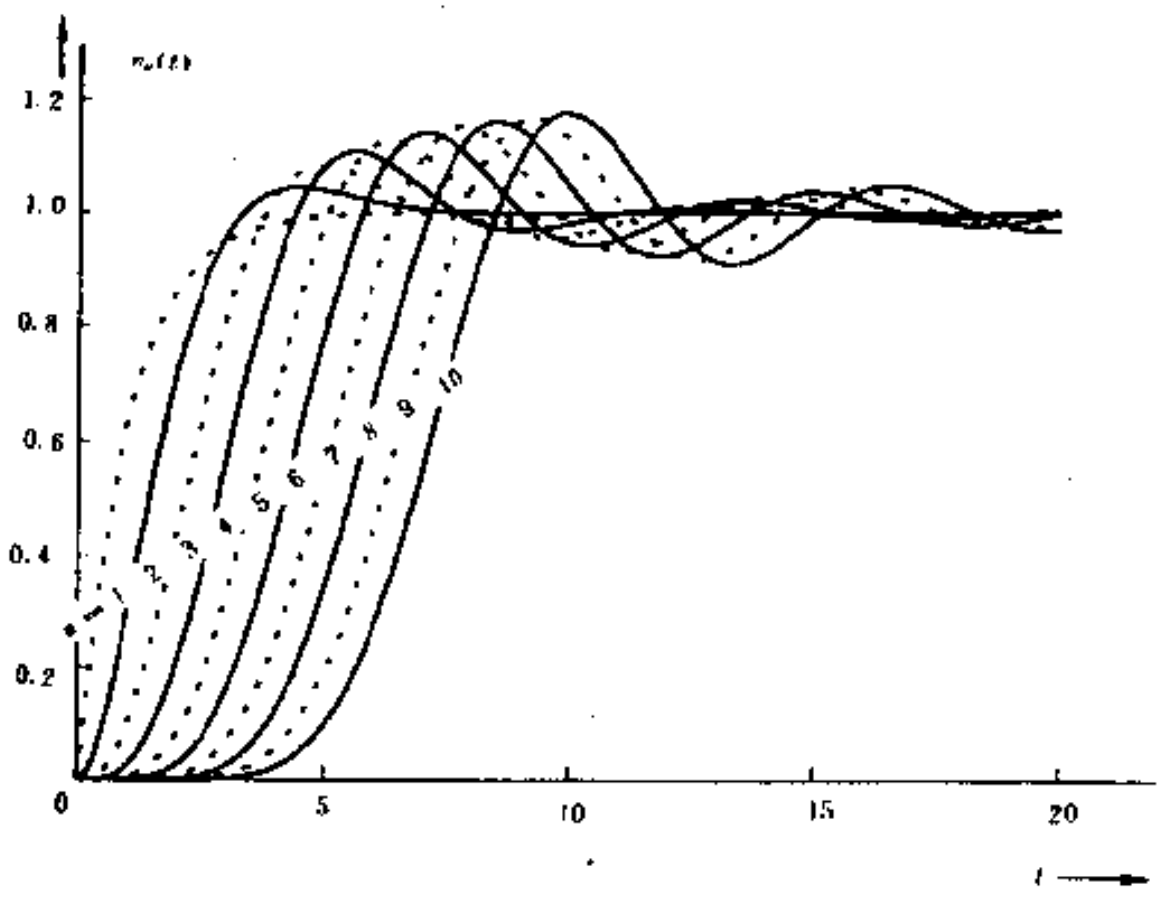


图 4.4.33　伯特沃斯低通滤波器的单位阶跃响应

第五章　电子工程中的复变函数(Ⅰ)

§5.1　复数

5.1.1　复数的表示方法

读者在学习交流电路时已经遇到过复数。例如，电阻 R 和电抗 X 的串联阻抗为

$$Z = R + jX \tag{5.1.1}$$

其中，R 和 X 都是实数，$j = +\sqrt{-1}$(称虚单位)，Z 为复数。R 称为复数 Z 的实部，X 称为复数 Z 的虚部，记为

$$R = \mathrm{Re}(Z) \tag{5.1.2}$$

$$X = \mathrm{Im}(Z) \tag{5.1.3}$$

这里，Re 和 Im 是英文 *Real* 和 *Imaginary* 的缩写。显然，如果一个复数的实部和虚部均为零，则该复数为零。两个复数只有当它们的实部和虚部分别相等时才相等。

若另有一复数 Z^*，其实部等于(5.1.1) 式中的 R，而其虚部等于(5.1.1) 式中 X 的负值，即

$$Z^* = R - jX, \tag{5.1.4}$$

则我们称 Z^* 与 Z 互为共轭复数(共轭阻抗)。若 Z 的电抗是电感性的，则 Z^* 的电抗为电容性的。

任意一个复数 $z = a + jb$ 都对应着平面直角坐标系中的一个

点(图 5.1.1)。用来表示复数的平面通常称为复平面。横轴称为实轴(单位为 1),纵轴称为虚轴(单位为 j)。复数 z 不仅可以用它在直角坐标系中的坐标(a, b) 来表示,而且可以用极坐标表示。从坐标原点 o 到 z 点的距离(径矢量$\overrightarrow{oz}$ 的长度) 称为复数 z 的模,记为

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5.1.5}$$

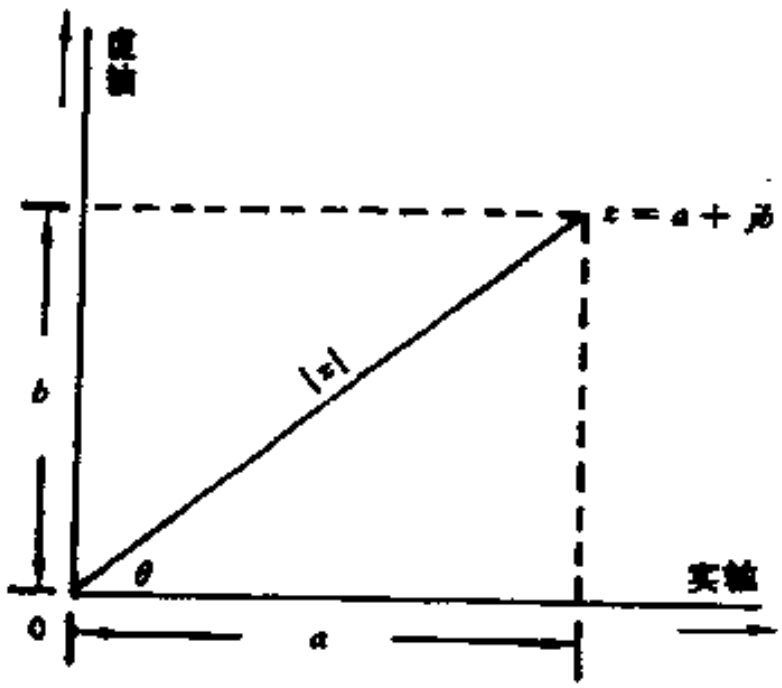


图 5.1.1　复数的几何表示

由正实轴到径矢量$\overrightarrow{oz}$ 的夹角 θ 称为复数 z 的辐角,记为

$$\theta = \mathrm{Arg}Z = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5.1.6}$$

注意,仅由 $\mathrm{tg}\theta = b/a$ 的比值不能唯一地确定 θ 值,因为若 b/a 为正,θ 可能在复平面的第一或第三象限,若 b/a 为负,则 θ 可能在第二或第四象限。要完全确定 θ 还要看 a 和 b 的具体数值。例如,在图 5.1.2 中,$a = -4, b = -1$,则 $\mathrm{tg}\theta = 0.25, \theta = 194°$(第三象限)。所以只看 $\mathrm{tg}\theta$ 为正,并不能确定 θ 是在第一还是第三象限。

在科学和工程书籍中,有时把一个复数用极坐标简单地表示成

$$z = r\angle\theta \tag{5.1.7}$$

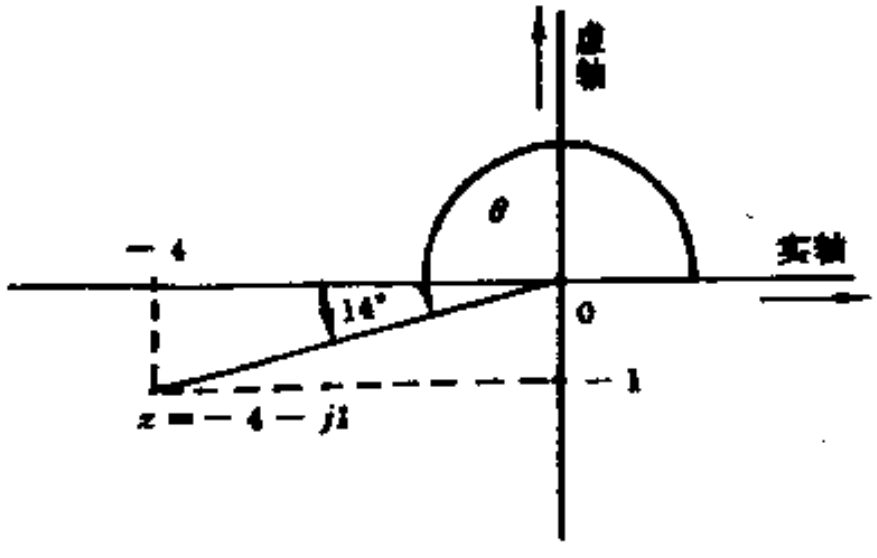


图 5.1.2　相位在第三象限的复数

意思是 z 等于模为 r、辐角为 θ 的复数。

例 5.1.1　求电阻 $R = 4\Omega$、感抗 $X = 3\Omega$ 的串联阻抗 Z 的模和辐角。

解　由(5.1.5)、(5.1.6) 和(5.1.7) 式有

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}\angle \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2}\angle \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= 5\angle 36.9^\circ$$

由图 5.1.1 容易看出，复数的直角坐标表示(用 a 和 b) 和极坐标表示(用 r 和 θ) 之间的关系是

$$a = r\cos\theta \tag{5.1.8a}$$

$$b = r\sin\theta \tag{5.1.8b}$$

所以复数 z 可表示成

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{5.1.9}$$

上式称为复数 z 的三角表示。

例 5.1.2　给出复数 $1 + j$、j、1、-2 和 $-3j$ 的三角表示。

解　由(5.1.5)、(5.1.6) 和(5.1.8) 式，有

$$1 + j = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$j = 1(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2})$$

$$1 = 1(\cos 0 + j\sin 0)$$

$$-2 = 2(\cos\pi + j\sin\pi)$$

$$-3j = 3[\cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2})]$$

如果 θ 是复数 z 的辐角，那么显然 $\theta + 2n\pi$（n 为整数）也是 z 的辐角。通常把 θ 在 $-\pi$ 到 π 之间的值叫做主值。在例 5.1.2 中出现的辐角都是用主值表示的。有的科技书中规定主值区间是从 0 到 2π，这样，例 5.1.2 中的复数 $-3j$ 应表示为

$$-3j = 3[\cos(\frac{3\pi}{2}) + j\sin(\frac{3\pi}{2})]$$

利用欧拉公式

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta} \tag{5.1.10}$$

和(5.1.9)式可以得到复数的指数表示式

$$z = re^{j\theta} \tag{5.1.11}$$

例 5.1.3　将复数 $1 + j$、$2 + 2\sqrt{3}j$、j 和 -1 表示为指数形式。

解　由(5.1.5)、(5.1.6)和(5.1.11)式易得

$$1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$2 + 2\sqrt{3}j = 4e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$-1 = e^{j\pi}$$

总起来说，任意一个复数 z 可以表示成以下四种形式：

$$z = a + jb \tag{5.1.12}$$

$$= r\angle\theta \tag{5.1.13}$$

$$= r(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{5.1.14}$$

$$= re^{j\theta} \tag{5.1.15}$$

下面将看到，在进行复数的和差运算时，用代数表示式(5.1.12)很方便。在进行复数的积商运算时，用极坐标表示式(5.1.13)或(5.1.14)比较方便。指数表示式(5.1.15)则对于积、商、幂、根、微分和积分等运算都比较方便，在科学技术问题中使用也最广泛。

5.1.2 基本运算

1.和、差、积、商

两个复数 $z_1 = a_1 + jb_1$ 和 $z_2 = a_2 + jb_2$ 的和或差仍然是复数：

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \tag{5.1.16}$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) \tag{5.1,17}$$

两个复数的乘积可以按照普通代数规则来做(注意 $j^2 = -1$)：

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (a_1 + jb_1) \times (a_2 + jb_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

复数 z_1 被复数 z_2 除时($z_2 \neq 0$)可以用有理化的方法来做，在分子和分母同乘以 z_2 的共轭复数就可以消去分母中的虚数项：

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

利用指数表示式计算复数的积或商十分方便，例如，两个复数 $r_1e^{j\theta_1}$ 和 $r_2e^{j\theta_2}$ 的乘积为

$$r_1e^{j\theta_1} \times r_2e^{j\theta_2} = r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)} \tag{5.1.20}$$

可见，两个复数的乘积，就是它们的模(或称幅度)相乘，而辐角(或称位相)相加。在应用中常遇到任意复数 $re^{j\theta}$ 乘以复数 $e^{j\frac{\pi}{2}}$ 的情况，其结果显然是 $re^{j(\theta+\pi/2)}$，即位相比原来增加 90°。由例 5.1.3，$e^{j\frac{\pi}{2}}$ 就是复数 j，所以一个复数 z 乘以 j 意味着复平面中与 z

对应的径矢量沿逆时针方向旋转 90°。图 5.1.3 说明 z 连续几次乘以 j 相应径矢量旋转的情形。复数 z 乘以 $(-j)$ 也可看作是径矢量沿顺时针方向旋转 90°。由于 $e^{j2n\pi} = 1$(n 为整数),故

$$re^{j(\theta+2n\pi)} = re^{j\theta} \times e^{j2n\pi} = re^{j\theta}$$

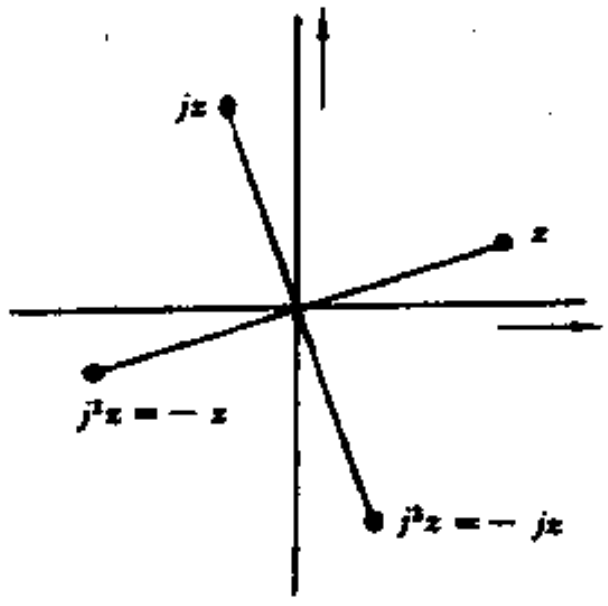


图 5.1.3　复数 z 连续乘以 j

利用复数的指数表示式作除法运算也很方便。例如,$z_1 = r_1e^{j\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{j\theta_2}$,则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)} \tag{5.1.21}$$

这比(5.1.19)式的有理化分母方法简捷多了。

例 5.1.4　试求 $(5-2j)/(-1+j)$ 的实部和虚部。

解　由(5.1.19)式,

$$\frac{5-2j}{-1+j} = \frac{5-2j}{-1+j}\cdot\frac{-1-j}{-1-j} = \frac{-5-5j+2j+2j^2}{1-j^2} = \frac{-7-3j}{2} = -\frac{7}{2}-\frac{3}{2}j$$

本题的另一解法是设欲求的复数的实部和虚部分别为 a 和 b,于是得方程

$$\frac{5-2j}{-1+j} = a+bj \text{ 或 } 5-2j = -a-b+(a-b)j,$$

令上方程左右两端的实部和虚部分别相等,可得 $-a-b=5$, $a-b=-2$,解这两个方程立即得出 $a=-\frac{7}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$。

例 5.1.5　电路网络问题中常出现表示式$(R + j\omega L)/(G + j\omega C)$,试确定它的模和辐角。

解　由(5.1.5)、(5.1.6) 和(5.1.21) 式有

$$\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{G^2 + (\omega C)^2}} \angle [\mathrm{tg}^{-1}(\frac{\omega L}{R}) - \mathrm{tg}^{-1}(\frac{\omega C}{G})]$$

例 5.1.6　将$(3j^{22} - j^{15})/(2j - 1)$化简。

解
$$\frac{3j^{22} - j^{15}}{2j - 1} = \frac{3(j^2)^{11} - (j^2)^7 j}{2j - 1} = \frac{3(-1)^{11} - (-1)^7 j}{-1 + 2j}$$
$$= \frac{-3 + j}{-1 + 2j} \cdot \frac{-1 - 2j}{-1 - 2j} = \frac{5 + 5j}{5} = 1 + j.$$

例 5.1.7　计算$|3 - 4j||4 + 3j|$和$\left|\frac{1}{1 + 3j} - \frac{1}{1 - 3j}\right|$。

解　注意(5.1.5) 式,有

$$|3 - 4j||4 + 3j| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}\sqrt{4^2 + 3^2} = 25$$

$$\left|\frac{1}{1 + 3j} - \frac{1}{1 - 3j}\right| = \left|\frac{1 - 3j}{1 - 9j^2} - \frac{1 + 3j}{1 - 9j^2}\right| = \left|\frac{-6j}{10}\right| = \frac{3}{5}$$

2.幂与根

复数$z = re^{j\theta}$的n次幂很容易用指数形式或三角形式表示如下:

$$z^n = r^n e^{jn\theta} \qquad (5.1.22a)$$
$$= r^n \angle n\theta \qquad (5.1.22b)$$
$$= r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta) \qquad (5.1.22c)$$

由于$z^n = r^n(\cos\theta + j\sin\theta)^n$,令$r = 1$并比较(5.1.22$c$) 式有

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta. \qquad (5.1.23)$$

上式称为棣莫弗公式。

求任意复数$z = re^{j(\theta + 2k\pi)}$的$n$次方根可以这样运算:

$$z^{\frac{1}{n}} = [re^{j(\theta + 2k\pi)}]^{\frac{1}{n}}$$
$$= r^{\frac{1}{n}} e^{j(\frac{\theta + 2k\pi}{n})}, (k \text{ 为正整数}) \qquad (5.1.24)$$

当 $k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$ 时，$z^{\frac{1}{n}}$ 取 n 个不同的值，当 k 取大于 $(n-1)$ 的值时，求出的根仍是原来 n 个根中的某一个。所以，对一个复数开多少次方就应得到多少个根。这些根具有相同的模 $r^{\frac{1}{n}}$，但辐角不同，第一个根的辐角是 θ/n，其他根的辐角依次递增 $2\pi/n$。

例 5.1.8　计算 $(-1+\sqrt{3}j)^{10}$。

解　由(5.1.9)和(5.1.22)式

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{3}j)^{10} &= [2(\cos\frac{2\pi}{3}+j\sin\frac{2\pi}{3})]^{10}\\ &= 2^{10}(\cos\frac{20\pi}{3}+j\sin\frac{20\pi}{3})\\ &= 1024[\cos(\frac{2\pi}{3}+6\pi)+j\sin(\frac{2\pi}{3}+6\pi)]\\ &= 1024(\cos\frac{2\pi}{3}+j\sin\frac{2\pi}{3})\\ &= 1024(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j) = -512+512\sqrt{3}j.\end{aligned}$$

例 5.1.9　计算 $(-1+j)^{1/3}$。

解　$$\begin{aligned}(-1+j)^{1/3} &= [\sqrt{2}(\cos135^\circ+j\sin135^\circ)]^{1/3}\\ &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{135^\circ+k\cdot360^\circ}{3}\right)+\right.\\ &\quad \left.j\sin\left(\frac{135^\circ+k\cdot360^\circ}{3}\right)\right]\end{aligned}$$

对应于 $k = 0, 1, 2$ 的三个根分别是：

$$\sqrt[6]{2}(\cos45^\circ+j\sin45^\circ)$$

$$\sqrt[6]{2}(\cos165^\circ+j\sin165^\circ)$$

$$\sqrt[6]{2}(\cos285^\circ+j\sin285^\circ)$$

例 5.1.10　在远距离通信中使用的传输线要考虑它的损耗电阻 R、泄漏电导 G、分布电感 L 和分布电容 C。传输线的特性阻抗计算公式是

$$Z_0 = \left(\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}\right)^{1/2}$$

已知某型号传输线每公里的分布参数是 $R = 88\Omega$, $G = 1.0\mu\Omega^{-1}$, $L = 0.1\,m\mathrm{H}$, $C = 0.054\mu\mathrm{F}$($m = 10^{-3}$, $\mu = 10^{-6}$),求它的特性阻抗 Z_0,设工作角频率为 $\omega = 5000$。

解
$$\begin{aligned} Z_0 &= [(88 + j0.5)/(1 + j270)]^{1/2} \cdot 10^3\Omega \\ &= [(88\angle 3.27^\circ)/(270\angle 89.79^\circ)]^{1/2} \cdot 10^3\Omega \\ &= [0.327\angle -86.52^\circ]^{1/2} \cdot 10^3\Omega. \end{aligned}$$

上式中的平方根有两个值:

$$Z_0 = \begin{cases} (570\angle -43.26^\circ)\Omega = (415 - j391)\Omega, \\ (570\angle 136.74^\circ)\Omega = (-415 + j391)\Omega. \end{cases}$$

第二个值包含负电阻(-415Ω),并无物理意义。

5.1.3 相量 $re^{j\omega t}$

我们已经知道,复数 $re^{j\theta}$ 对应着复平面上的一个点,这个点与原点的距离为 r,与正实轴的夹角为 θ。如果 θ 是时间 t 的函数:$\theta = \omega t$,那么复数 $re^{j\theta}$ 就成为时间 t 的函数 $re^{j\omega t}$。随着 t 的增加,对应的复平面上的点将绕原点按逆时针方向做半径为 r 的圆周运动。$re^{j\omega t}$ 常称为旋转相量。它在实轴和虚轴上的投影分别为

$$r\cos\omega t = \mathrm{Re}(re^{j\omega t})$$
$$r\sin\omega t = \mathrm{Im}(re^{j\omega t})$$

换句话说,任一余弦时间函数 $r\cos\omega t$ 可以看作是旋转相量 $re^{j\omega t}$ 的实部,正弦时间函数则可视为旋转相量的虚部。如果余弦时间函数具有初始位相 θ_0(常数),就可表示成

$$\begin{aligned} r\cos(\omega t + \theta_0) &= \mathrm{Re}[re^{j(\omega t + \theta_0)}] \\ &= \mathrm{Re}[re^{j\theta_0} \cdot e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{r} \cdot e^{j\omega t}]. \end{aligned} \tag{5.1.25}$$

其中复数 $\dot{r} = re^{j\theta_0}$ 称为稳定相量或称复振幅,它表示旋转相量在

$t = 0$ 时的位置。

在交流电路中，像交流电压和交流电流这些余弦时间函数有三个基本要素，即振幅、频率和初相。对于已知频率的余弦量来说，确定了它的振幅和初相就确定了这个余弦量。在这种情况下，稳定相量 $re^{j\theta_0}$ 与它所表示的余弦时间函数有一一对应的关系，因为把稳定相量 $re^{j\theta_0}$ 乘以因子 $e^{j\omega t}$ 后再取实部就得到对应的余弦时间函数。因此，在交流电路理论中往往规定，任一余弦量 $r\cos(\omega t + \theta_0)$ 可以用它对应的稳定相量 $\dot{r} = re^{j\theta}$ 来“符号”地表示。给定一个余弦量，可按其振幅 r 和初相 θ_0 写出稳定相量 $\dot{r}$；反之，如果已知某一余弦量的稳定相量 $\dot{r}$，就可立即写出该余弦量(频率被认为是已知的)。下面将看到，这种方法给分析交流电路带来诸多方便。

考虑电阻 R、电感 L 和电容 C 的串联电路。当把交流电压 $V\cos(\omega t + \theta_0)$ 加到电路两端以后，电路中的实际电流 i 满足以下关系：

$$V\cos(\omega t + \theta_0) = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{c}\int i\,\mathrm{d}t. \qquad (5.1.26)$$

为求出电路中的实际电流 i，本应求解上述微分积分方程，但这是比较麻烦的。如果把不包含复数的方程(5.1.26)转换成包含复数的方程，问题将得到简化。现在我们把电压和电流这些余弦时间函数都换成对应的电压相量 $\dot{V}e^{j\omega t}$ 和电流相量 $\dot{I}e^{j\omega t}$（$\dot{V}$ 和 $\dot{I}$ 表示稳定相量），于是方程(5.1.26)成为

$$\dot{V}e^{j\omega t} = R\dot{I}e^{j\omega t} + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{I}e^{j\omega t}) + \frac{1}{C}\int \dot{I}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad (5.1.27)$$

但

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{I}e^{j\omega t}) = j\omega L(\dot{I}e^{j\omega t}) \qquad (5.1.28)$$

$$\frac{1}{C}\int \dot{I}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}e^{j\omega t}) \qquad (5.1.29)$$

所以(5.1.27)式可写为

$$\dot{V}e^{j\omega t} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}e^{j\omega t}$$

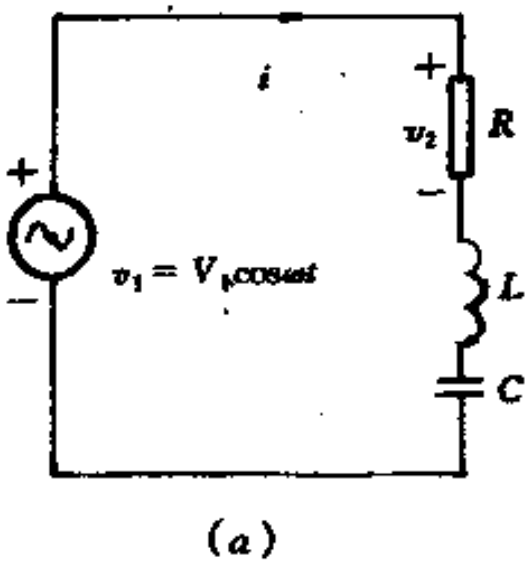
在上式中消去因子 $e^{j\omega t}$ 就得到仅包含稳定相量的方程：

$$\dot{V} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I} \tag{5.1.30}$$

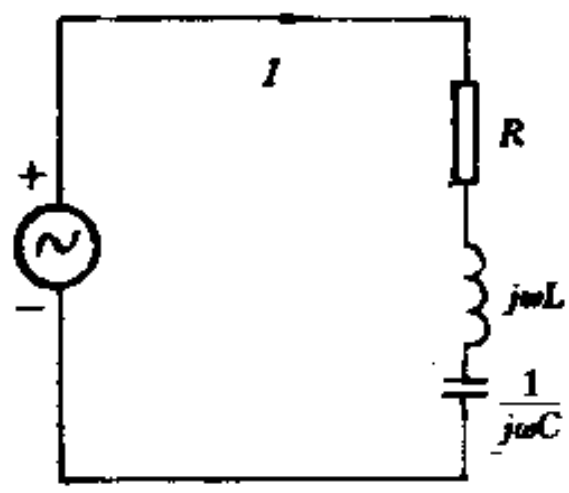
应该说明，在(5.1.29)式中取积分常数为零，是因为假定电路处于稳态，就是说，交流电压是在无限长时间以前就加上了。现在比较方程(5.1.26)和相应的表示式(5.1.30)，我们看到，由于把余弦时间函数换成对应的相量，电路的微分积分方程(5.1.26)转换成了简单的代数方程(5.1.30)，这时很容易求出稳定电流相量 $\dot{I}$：

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \tag{5.1.31}$$

再由相量 $\dot{I}$ 还原成对应的余弦时间函数，就可以得到电路中的实际电流。下面给出一个具体的实例。



(a)



(b)

图 5.1.4 *RLC* 串联电路

例 5.1.11　在 *RLC* 串联电路(图 5.1.4*a*)中，电阻 $R = 10\Omega$，电感 $L = 10\text{mH}$，电容 $C = 2\mu\text{F}$。外加电压为 $v_1 = V_1\cos\omega t$，其中电压振幅 $V_1 = 100$ 伏，角频率 $\omega = 2\pi \times 10^3$ 弧度/秒，求电阻 R 上的电压降 v_2。

解　设 v_1 对应的相量为 $\dot{V}_1$，v_2 对应的相量为 $\dot{V}_2$，由

(5.1.31) 式有

$$\dot{V}_2 = R\dot{I} = \left[\frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\right]\dot{V}_1$$

为将 $\dot{V}_2$ 化为实际电压降 v_2，需计算它的振幅和位相。由上式可知，$\dot{V}_2$ 的振幅为

$$V_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} V_1$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10^2 + (62.8 - 79.5)^2}} \times 100 \text{ 伏} = 51.4 \text{ 伏},$$

$\dot{V}_2$ 相对于 $\dot{V}_1$ 的位相是

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left[\text{Im}\left[\frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}\right] \Big/ \text{Re}\left[\frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}\right]\right]$$

$$= \text{tg}^{-1}\left[\frac{-(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}\right]$$

$$= \text{tg}^{-1}\left[\frac{-(62.8 - 79.5)}{10}\right] = \text{tg}^{-1}(1.67) \approx 59.1^\circ$$

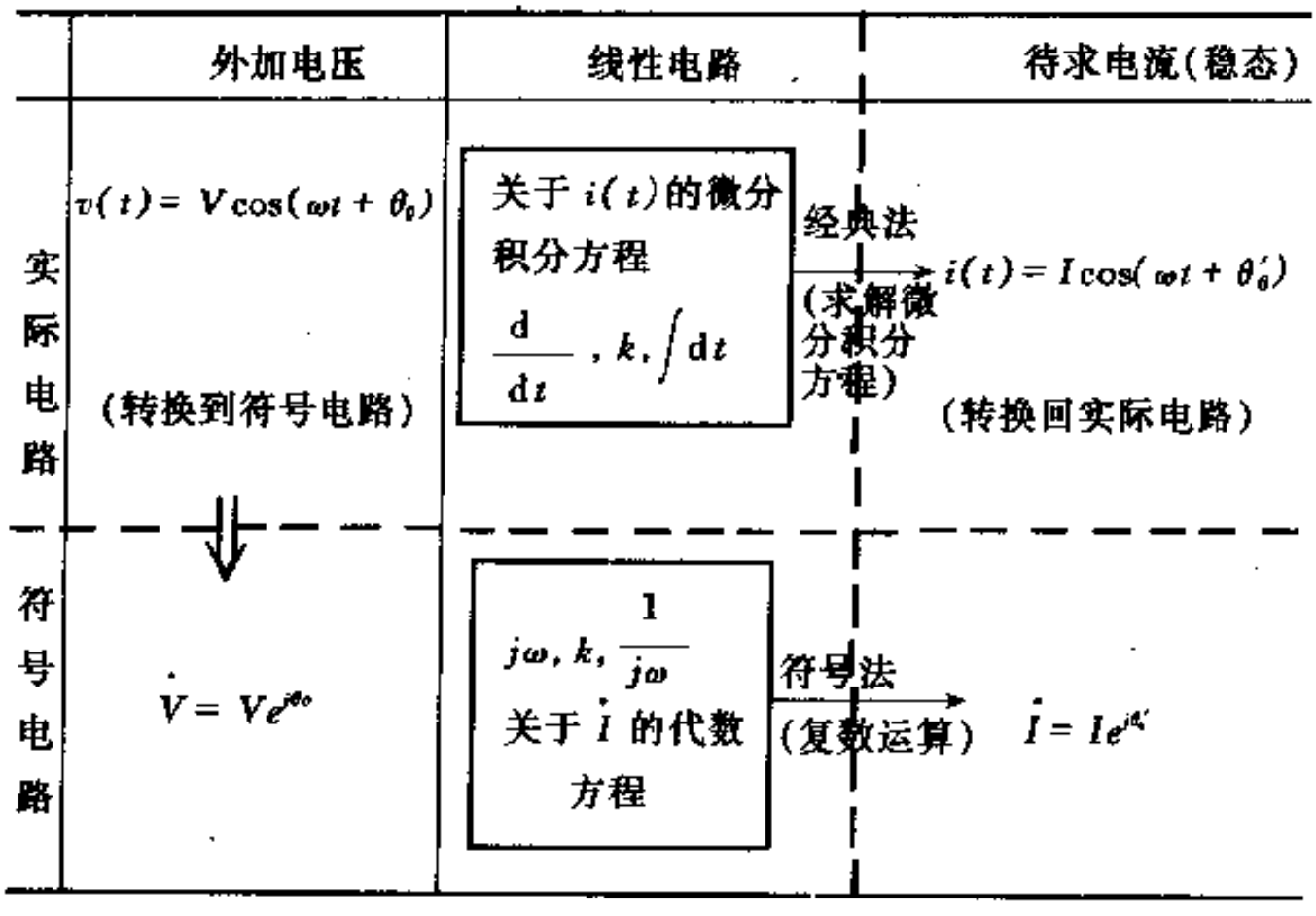
所以，电阻 R 两端的电压降 v_2 的振幅值为 51.4 伏，且比 v_1 超前 59.1°，于是可将 v_2 表示成

$$v_2 = 51.4\cos(\omega t + 59.1^\circ)$$

综上所述，利用复数运算的所谓符号法，相当于把实际电路（图 5.1.4a）先转换成符号电路（图 5.1.4b），然后应用直流电路的各项定律来求解交流电路问题。这种方法与直接求解交流电路的微分积分方程的经典法的对应关系见表 5.1。

最后我们指出，利用复数运算的符号法仅适用于余弦（或正弦）时间函数的线性运算（线性电路），对于非线性运算则不适用。这是因为，这种方法要求，当对一个相量作某种运算时，把所得到

表 5.1　解电路方程的经典法与符号法的对应关系



的结果取实部，应该等于直接对该相量的实部作同样运算的结果。例如，我们考虑相量 $\dot{r}e^{j\omega t}$ 对时间求一阶导数。设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别是它的实部和虚部：$\dot{r}e^{j\omega t}=u(t)+jv(t)$，则

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}e^{j\omega t})=\frac{du(t)}{dt}+j\frac{dv(t)}{dt},$$

所以

$$\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}(\dot{r}e^{j\omega t})\right]=\frac{du(t)}{dt}=\frac{d}{dt}[\mathrm{Re}(\dot{r}e^{j\omega t})]$$

从最后的等式可以看出，相量对时间求一阶导数的运算是线性运算。我们再来考虑相量 $\dot{r}e^{j\omega t}$ 的平方运算，设它的实部和虚部仍为 $u(t)$ 和 $v(t)$，于是有

$$(\dot{r}e^{j\omega t})^2=(u^2-v^2)+2juv$$
$$\mathrm{Re}[(\dot{r}e^{j\omega t})^2]=u^2-v^2$$
$$[\mathrm{Re}(\dot{r}e^{j\omega t})]^2=u^2.$$

可见,对相量先作平方运算再取实部,和先取实部再作平方运算,所得到的结果是不同的。不适用于非线性运算是对应用相量方法的一个重要限制。

5.1.4 复数共轭和模的常用性质

我们首先分别给出复数共轭和模的常用性质,然后作为例题择要加以证明。

1.复数共轭的性质 以 z^* 表示 z 的复数共轭。

$$(1)(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \tag{5.1.32}$$

$$(2)(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^* \tag{5.1.33}$$

$$(3)(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \tag{5.1.34}$$

$$(4)(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*,(z_2 \text{ 不为零}) \tag{5.1.35}$$

$$(5)z \cdot z^* = |z|^2 = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 \tag{5.1.36}$$

$$(6)(z + z^*)/2 = \mathrm{Re}(z) \tag{5.1.37}$$

$$(7)(z - z^*)/2j = \mathrm{Im}(z) \tag{5.1.38}$$

$$(8)(z^*)^* = z \tag{5.1.39}$$

2.模的性质 以 $|z|$ 表示 z 的模(绝对值)。

$$\left.\begin{aligned}(1)&|z| \geqslant |\mathrm{Re}(z)|,\ |z| \geqslant \mathrm{Re}(z) \geqslant -|z| \\ &|z| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|,\ |z| \geqslant \mathrm{Im}(z) \geqslant -|z|\end{aligned}\right\} \tag{5.1.40}$$

$$(2)|z| = |-z| = |z^*| \tag{5.1.41}$$

(3) 若 $z = a + jb$ 则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a| + |b|) \leqslant |z| \leqslant (|a| + |b|) \tag{5.1.42}$$

$$\left.\begin{aligned}(4)&|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ &\text{或}\quad |z_1 z_2 z_3 \cdots z_n| = |z_1|\,|z_2|\,|z_3| \cdots |z_n|\end{aligned}\right\} \tag{5.1.43}$$

$$(5)\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},(z_2 \text{ 不为零}) \tag{5.1.44}$$

$$\left.\begin{aligned}&(6)\,|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\\&\quad 或\,|z_1+z_2+z_3+\cdots z_n|\leqslant|z_1|+\\&\qquad |z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n|\end{aligned}\right\}\tag{5.1.45}$$

$$(7)\,|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|\tag{5.1.46}$$

$$(8)\,|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2.|^2)\tag{5.1.47}$$

例 5.1.12　证明(5.1.34)式。

[证]　设 $z_1=a_1+jb_1, z_2=a_2+jb_2$,则

$$\begin{aligned}(z_1\cdot z_2)^*&=[(a_1a_2-b_1b_2)+j(a_1b_2+a_2b_1)]^*\\&=(a_1a_2-b_1b_2)-j(a_1b_2+a_2b_1)\\&=(a_1-jb_1)\cdot(a_2-jb_2)\\&=z_1^*z_2^*\end{aligned}$$

例 5.1.13　证明(5.1.42)式。

[证]　因为

$$\begin{aligned}2|z|^2-(|a|+|b|)^2&=2(a^2+b^2)-(a^2+b^2+\\&\qquad 2|a||b|)\\&=(|a|-|b|)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以，$\frac{1}{2}(|a|+|b|)^2\leqslant|z|^2$ 或 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a|+|b|)\leqslant|z|$；

另一方面，$|z|=|a+jb|\leqslant|a|+|jb|=|a|+|b|$,

故有　$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a|+|b|)\leqslant|z|\leqslant(|a|+|b|)$.

例 5.1.14　证明(5.1.43)式。

[证]　设 $z_1=r_1e^{j\theta_1}$ 和 $z_2=r_2e^{j\theta_2}$,则

$$z_1\cdot z_2=(r_1e^{j\theta_1})(r_2e^{j\theta_2})=r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)},$$

所以　$|z_1\cdot z_2|=r_1r_2=|z_1|\cdot|z_2|$.

例 5.1.15　证明(5.1.45)式。

[证] $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(z_1+z_2)^*$

$=(z_1+z_2)(z_1^*+z_2^*)$

$=z_1z_1^*+z_2z_1^*+z_2^*z_1+z_2^*z_2$

$=|z_1|^2+z_2z_1^*+(z_2z_1^*)^*+|z_2|^2$

$=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_2z_1^*)+|z_2|^2$

$\leqslant|z_1|^2+2|\mathrm{Re}(z_2z_1^*)|+|z_2|^2$

$\leqslant|z_1|^2+2|z_2z_1^*|+|z_2|^2$

$=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2$

$=(|z_1|+|z_2|)^2$

对上述不等式两边开平方后取正根得

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

利用复数的几何表示极易证明上述不等式,它反映了三角形任何一边小于其他两边之和。

例 5.1.16　证明(5.1.46)式。

[证] $|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$

或 $|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$

另一方面,

$|z_2|=|z_2-z_1+z_1|\leqslant|z_1-z_2|+|z_1|$,

或 $|z_1-z_2|\geqslant|z_2|-|z_1|$,

故有 $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

利用复数的几何表示,上述不等式反映了三角形任何一边大于其他两边之差。

例 5.1.17　证明(5.1.47)式。

[证] $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$

$=(z_1-z_2)(z_1^*-z_2^*)+(z_1+z_2)(z_1^*+z_2^*)$

$=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1z_2^*-z_2z_1^*+|z_1|^2+|z_2|^2+$

$z_1z_2^*+z_2z_1^*$

$$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

5.1.5 其他初等运算

本节介绍复数的对数、正弦、余弦等初等运算。首先给出有关公式，然后在例题中给出典型证明和它们在电路问题中的应用。

考虑复数 $z = a + jb$，可以证明

$$\ln z = \ln\sqrt{a^2 + b^2} + j\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5.1.48}$$

$$\sin z = \sin a \cdot \mathrm{ch} b + j\cos a \cdot \mathrm{sh} b \tag{5.1.49}$$

$$\cos z = \cos a \cdot \mathrm{ch} b - j\sin a \cdot \mathrm{sh} b \tag{5.1.50}$$

$$\mathrm{tg} z = \frac{\mathrm{tg} a(1 - \mathrm{th}^2 b)}{1 + \mathrm{tg}^2 a\ \mathrm{th}^2 b} + j\,\frac{\mathrm{tg} b(1 + \mathrm{tg}^2 a)}{1 + \mathrm{tg}^2 a \mathrm{th}^2 b} \tag{5.1.51}$$

$$\mathrm{sh} z = \mathrm{sh} a \cdot \cos b + j\,\mathrm{ch} a \cdot \sin b \tag{5.1.52}$$

$$\mathrm{ch} z = \mathrm{ch} a \cdot \cos b + j\,\mathrm{sh} a \cdot \sin b \tag{5.1.53}$$

$$\mathrm{th} z = \frac{\mathrm{th} a(1 + \mathrm{tg}^2 b)}{1 + \mathrm{th}^2 a\ \mathrm{tg}^2 b} + j\,\frac{\mathrm{tg} b(1 - \mathrm{th}^2 a)}{1 + \mathrm{th}^2 a\ \mathrm{tg}^2 b} \tag{5.1.54}$$

$$\sin jb = j\,\mathrm{sh} b \tag{5.1.55}$$

$$\cos jb = \mathrm{ch} b \tag{5.1.56}$$

$$\mathrm{tg} jb = j\,\mathrm{th} b \tag{5.1.57}$$

$$\mathrm{sh} jb = j\sin b \tag{5.1.58}$$

$$\mathrm{ch} jb = \cos b \tag{5.1.59}$$

$$\mathrm{th} jb = j\,\mathrm{tg} b \tag{5.1.60}$$

$\sin^{1} z = \alpha + j\beta$,

$$\alpha = \sin^{-1}\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}[a^2 + b^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}]}\right\},$$

$$\beta = \mathrm{ch}^{-1}\left\{+\sqrt{\frac{1}{2}[a^2 + b^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}]}\right\} \tag{5.1.61}$$

$$\cos^{-1}z = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}[a^2+b^2+1\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}]}\right\}$$

$$\beta = \mathrm{ch}^{-1}\left\{+\sqrt{\frac{1}{2}[a^2+b^2+1\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}]}\right\}$$

(5.1.62)

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tg}^{-1}z = \alpha + j\beta\\ &\alpha = \frac{1}{2}[\mathrm{tg}^{-1}(\frac{a}{1-b}) + \mathrm{tg}^{-1}(\frac{a}{1+b})]\\ &\beta = \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}}\end{aligned}\right\} \quad (5.1.63)$$

$$\mathrm{sh}^{-1}z = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \mathrm{ch}^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}[a^2+b^2+1\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4b^2}]}$$

$$\beta = \sin^{-1}\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}[a^2+b^2+1\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4b^2}]}\right\}$$

(5.1.64)

$$\mathrm{ch}^{-1}z = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \mathrm{ch}^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}[a^2+b^2+1\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}]}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}[a^2+b^2+1\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}]}\right\}$$

(5.1.65)

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{th}^{-1}z = \alpha + j\beta\\ &\alpha = \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{(1+a)^2+b^2}{(1-a)^2+b^2}}\\ &\beta = \frac{1}{2}[\mathrm{tg}^{-1}(\frac{b}{1+a}) + \mathrm{tg}^{-1}(\frac{b}{1-a})]\end{aligned}\right\} \quad (5.1.66)$$

说明：在关于 $\sin^{-1}z$ 的(5.1.61)式中，与 α 有关的等式内大括

号下的正负号需视 a 的正负而定。若 a 为正则取正号，若 a 为负则取负号。理由见例 5.1.24。同样，在(5.1.62) 式和(5.1.65) 式中，对大括号下的正负号也有相同的规定。但是在(5.1.64) 式中大括号下的正负号也有相同的规定。但是在(5.1.64) 式中大括号下的正负号需视 b 的正负而定，若 b 为正则取正号，若 b 为负则取负号。

例 5.1.18　证明(5.1.48) 式。

[证]　将 $z = a + jb$ 表示成指数形式：

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{j\mathrm{tg}^{-1}(\frac{b}{a})}$$

$$= e^{k} e^{j\mathrm{tg}^{-1}(\frac{b}{a})}$$

$$= e^{k + j\mathrm{tg}^{-1}(\frac{b}{a})}$$

其中 $k = \ln\sqrt{a^2 + b^2}$，对上式两边取对数得

$$\ln z = \ln\sqrt{a^2 + b^2} + j\mathrm{tg}^{-1}(\frac{b}{a})$$

例 5.1.19　证明(5.1.59) 式和(5.1.56) 式。

[证]　由双曲余弦函数定义：

$$\mathrm{ch}jb = \frac{1}{2}(e^{jb} + e^{-jb}) = \cos b$$

类似地有

$$\cos jb = \frac{1}{2}[e^{j(jb)} + e^{-j(jb)}]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-b} + e^{b}] = \mathrm{ch}b.$$

例 5.1.20　传输线的输入电压 V_0 为 10 伏，在距输入端 6 公里处测得电压 V_l 数值为 7 伏，且比输入电压位相滞后 34°。设 V_l 与 V_0 满足以下关系：

$$V_l = V_0 e^{-\gamma l}$$

求上述关系式中的传播常数 γ，其中 l 表示距离(公里)。

解 $e^{\gamma l} = \dfrac{V_o}{V_i} = \dfrac{10}{7e^{-j0.593}} = 1.43e^{j0.593}$

$$\therefore \gamma l = \ln[1.43e^{j0.593}] = 0.36 + j0.593$$

$$\therefore \gamma = \frac{1}{6}(0.36 + j0.593) = 0.06 + j0.099$$

例 5.1.21　将四端网络的输入电压调整到$(10 + j0)$伏，这时输出电压为$(3 + j4)$伏，求该四端网络引起的衰减和相移。以$-\alpha$表示衰减(单位为奈贝)，β表示相移，并有以下关系：

$$\frac{\text{输出电压}}{\text{输入电压}} = e^{\alpha + j\beta}$$

解 $e^{\alpha + j\beta} = \dfrac{3 + j4}{10} = 0.3 + j0.4$，利用(5.1.48)式有

$$\therefore \alpha + j\beta = \ln \sqrt{0.09 + 0.16} + j\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= -0.693 + j0.927$$

即衰减为0.693奈贝，相移为0.927弧度或53.1°。

例 5.1.22　传输线上任一点的电压为

$$V_l = V_o \mathrm{ch}\gamma l - I_o Z_o \mathrm{sh}\gamma l$$

对于射频传输线，特性阻抗$Z_o = \sqrt{L/C}$，传播常数$\gamma = j\omega\sqrt{LC}$，这里$\omega$、$L$和$C$分别表示角频率、分布电感和分布电容。试求$V_l$的实部和虚部的表示式。

解　利用(5.1.58)式和(5.1.59)式有

$$V_l = V_o \mathrm{ch}(j\omega\sqrt{LC}l) - I_0\sqrt{L/C}\,\mathrm{sh}(j\omega\sqrt{LC}l)$$

$$= V_o \cos(\omega\sqrt{LC}l) - jI_0\sqrt{L/C}\sin(\omega\sqrt{LC}l)$$

V_l的实部和虚部已可明显看出。

例 5.1.23　证明(5.1.49)式。

[证]　$\sin z = \sin(a + jb)$

$$= \sin a \cdot \cos jb + \cos a \cdot \sin jb$$

$$= \sin a \cdot \mathrm{ch}b + j\cos a \cdot \mathrm{sh}b$$

上面利用了(5.1.55)式和(5.1.56)式。

例 5.1.24　证明(5.1.61)式。

[证]　令 $\sin^{-1}z$ 的实部和虚部分别为 α 和 β, 于是有

$$\sin(\alpha + j\beta) = z = a + jb$$

由(5.1.49)式可知

$$a = \sin\alpha \cdot \mathrm{ch}\beta \text{ 和 } b = \cos\alpha \cdot \mathrm{sh}\beta,$$

$$\therefore \sin^2\alpha = \frac{a^2}{\mathrm{ch}^2\beta} \text{ 和 } \cos^2\alpha = \frac{b^2}{\mathrm{sh}^2\beta},$$

$$\therefore \frac{a^2}{\mathrm{ch}^2\beta} + \frac{b^2}{\mathrm{sh}^2\beta} = 1, \text{将 } \mathrm{sh}^2\beta = \mathrm{ch}^2\beta - 1 \text{ 代入得}$$

$$a^2(\mathrm{ch}^2\beta - 1) + b^2\mathrm{ch}^2\beta = (\mathrm{ch}^2\beta - 1)\mathrm{ch}^2\beta,$$

或　　$$\mathrm{ch}^4\beta - (a^2 + b^2 + 1)\mathrm{ch}^2\beta + a^2 = 0,$$

解方程得

$$\mathrm{ch}^2\beta = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}],$$

$$\beta = \mathrm{ch}^{-1}\left\{+\sqrt{\frac{1}{2}[a^2 + b^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}]}\right\}$$

上式最外边的根号前面取正号是考虑到 $\mathrm{ch}\beta$ 总为正。用同样方法可求出:

$$\alpha = \sin^{-1}\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}[a^2 + b^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2}]}\right\}$$

上式最外边的根号前面取正号还是负号需视 a 的正负而定。因为 $a = \sin\alpha\mathrm{ch}\beta$, 而 $\mathrm{ch}\beta$ 总为正, 所以若 a 为正, 则 $\sin\alpha$ 必为正; 若 a 为负, 则 $\sin\alpha$ 亦为负。

例 5.1.25　当通信电缆的接收端开路时, 在距接收端 10 公里处测得输入阻抗为 $(141 - j395)\Omega$。当接收端短路时, 在同一地点测得输入阻抗为 $(377 - j82)\Omega$。已知工作角频率为 5000 弧度/秒。试计算这电缆每公里的分布参数。

说明: 当接收端短路时, 距接收端 l 处的输入阻抗为

$$Z_{s.c} = Z_o \mathrm{th}\gamma l,$$

其中 Z_o 为特性阻抗，γ 为传播常数。当接收端开路时，距接收端 l 处的输入阻抗为

$$Z_{o.c} = Z_o \mathrm{ch}\gamma l$$

所以

$$Z_o = \sqrt{Z_{s.c} Z_{o.c}}$$

$$\gamma l = \mathrm{th}^{-1}\sqrt{Z_{s.c}/Z_{o.c}}$$

解 已知

$$Z_{o.c} = |4| - j395 = 418\angle -70.3^\circ,$$

$$Z_{s.c} = 377 - j82 = 386\angle -12.3^\circ,$$

所以特性阻抗为

$$Z_o = \sqrt{(418\angle -70.3^\circ)(386\angle -12.3^\circ)} = 403\angle -41.3^\circ$$

且有

$$\mathrm{th}\gamma l = \sqrt{\frac{386\angle -12.3^\circ}{418\angle -70.3^\circ}} = 0.962\angle 29^\circ$$

$$= 0.841 + j0.468$$

若令 $\gamma = \alpha + j\beta$，根据(5.1.66)式的第二式有

$$\alpha l = \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{(1+0.841)^2 + (0.468)^2}{(1-0.841)^2 + (0.468)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3.847 = 0.675$$

$$\therefore \alpha = 0.0675.$$

再由(5.1.66)式的第三式有

$$\beta l = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0.468}{1+0.841}\right) + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0.468}{1-0.841}\right)\right],$$

由此可得 $\beta = 0.075$(弧度)，所以传播常数为

$$\gamma = 0.0675 + j0.075 = 0.1\angle 48.5^\circ$$

电缆每公里长度的分布参数是串联电阻 R、串联电感 L、并联电容

C 和并联电导 G，它们与 Z_0 和 γ 的关系为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad 和 \ \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

由以上二式解出

$$R + j\omega L = 40 + j5.05, G + j\omega C = (1.04 + j248)10^{-6}$$

所以该电缆的全部分布参数为

$$R = 40(\Omega), L = \frac{5.05}{5000} = 1.01(mH),$$

$$G = 1.04(\mu\Omega^{-1}), C = \frac{248}{5000} = 0.0496(\mu F)。$$

§5.2 复变函数

5.2.1 复变函数的定义及多值性

上一节讨论了复数的性质和初等运算，并未涉及变量问题。现在，我们以 x 和 y 分别表示实变数，称 $z = x + jy$ 为复变数。若 x 和 y 的数值在一定范围内给定，则 z 也就确定了。z 的不同的值对应着 x-y 平面中不同的点，这个平面简称为 z 平面。在信息技术书籍中常用符号 $s = \sigma + j\omega$ 表示复变数，这里 σ 和 ω 为实变数。

如果有另一个复变数 w，对于 z 可取的每一个值，w 都有一个或多个值与之对应，我们称 w 是 z 的函数，记为 $w = f(z)$，简称复变函数。令 u 和 v 表示 w 的实部和虚部：

$$w = u + jv = u(x, y) + jv(x, y), \tag{5.2.1}$$

这里 u 和 v 是实变数 x 和 y 的实函数。

例 5.2.1　求 $w = z^2$ 和 $w = z^*$ 的实部和虚部。

解　对于 $w = z^2$ 有

$$w = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy,$$

所以　$u(x,y)=x^2-y^2, v(x,y)=2xy.$

对于 $w=z^*$ 有

$$w=x-jy,$$

所以　$u(x,y)=x, v(x,y)=-y.$

上例中的两个函数 $w=f(z)$ 是在整个 z 平面都成立的。w 和 z 的函数关系也可以只在 z 平面上的某个区域 D 内成立，D 称为 $w=f(z)$ 的定义域。如果对于区域 D 内的每一个 z 值仅对应存在一个 w 值，则称 w 是 z 的单值函数。如果一个 z 值对应不止一个 w 值，则称 w 是 z 的多值函数。例如 $w=z^2$，对于 z 的每一个值只存在一个 w 值，所以 w 是 z 的单值函数。又如 $w=\sqrt{z}$，对于 z 的每一个值存在两个 w 值，所以这是一个双值函数。在后文中如未特别指明，则所讨论的函数都是指单值函数。下面对多值函数作简单介绍。

我们可以把多值函数看作是由若干单值函数构成的，其中每一个单值函数称为多值函数的一个分枝（或简称枝）。通常把一个特定的分枝称为多值函数的主枝，与这个主枝相应的函数值称为主值。仍以函数 $w=\sqrt{z}$ 为例。假定在 z 平面上 z 自 A 点起始绕原点 O 逆时针移动，并画出一个闭合曲线（图 5.2.1）。在 A 点，$z=re^{j\theta_0}$，相应的函数值是 $w=\sqrt{r}e^{j\theta_0/2}$。当 z 沿闭合曲线绕一周回到 A 点时，辐角成为 $\theta=\theta_0+2\pi$，函数值成为

$$w=\sqrt{r}e^{j(\theta_0+2\pi)/2}=-\sqrt{r}e^{j\theta_0/2}$$

可见并未回到 w 的起始值。但是如果再转一周回到 A 点，即 $\theta=\theta_0+4\pi$，则函数 w 返回它的起始值：

$$w=\sqrt{r}e^{j(\theta_0+4\pi)/2}=\sqrt{r}e^{j\theta_0/2}$$

我们说，$0\leqslant\theta<2\pi$ 对应着多值函数 $\sqrt{z}$ 的一个分枝（主枝），而 $2\pi\leqslant\theta<4\pi$ 对应着该函数的另一分枝。

显然，多值函数的每一分枝都是单值的。为使多值函数成为单值函数，我们可以人为地自原点 O 出发作一任意割线，如图

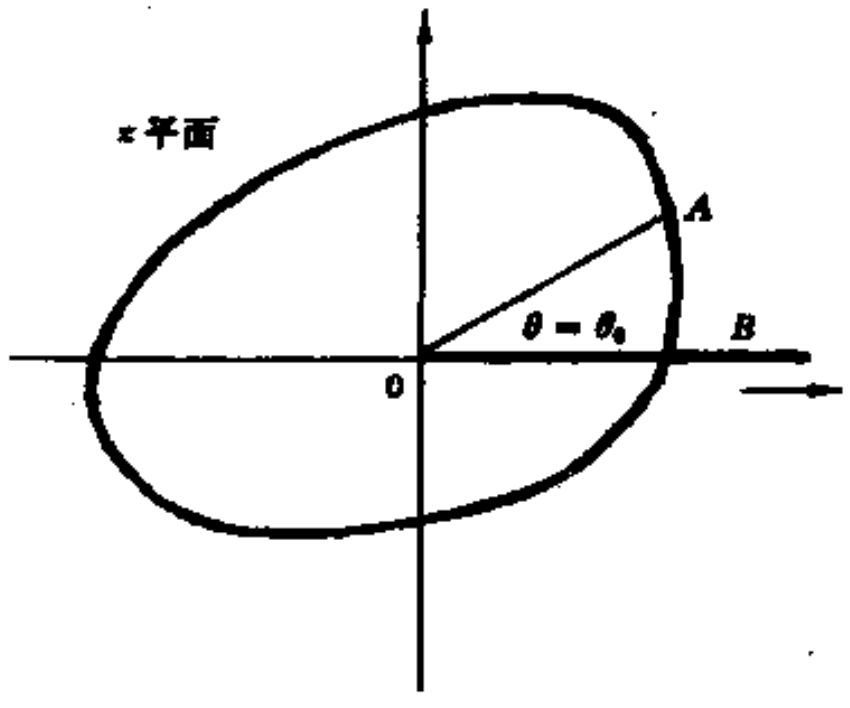


图 5.2.1　关于多值函数 $w=\sqrt{z}$ 的说明

5.2.1 中的半射线 OB(B 点在无穷远),它称为分枝割线或枝线。O 点称为枝点。由于沿着不包含原点 O 的任意闭合曲线变动一周时,函数$\sqrt{z}$ 的值并不改变,所以 $z=0$ 点是该函数的唯一的有限枝点。一般地,在 z 平面上使z 绕某点P 变动一周回到起始点时,多值函数 w 由一个分枝变到另一分枝,则称 P 点为 w 的一个枝点。

例 5.2.2　确定多值函数 $w=\sqrt[5]{z}$ 所包含的全部分枝。

解　当 $z=z_0=r_0e^{j\theta_0}$ 时有 $w=w_0=\sqrt[5]{r_0}e^{j\theta_0/5}$,自 z_0 点起始使 z 逆时针方向绕原点变动一周后,θ 值由θ_0 增至 $\theta_0+2\pi$,相应的 w 值为

$$w=\sqrt[5]{r_0}e^{j(\theta_0+2\pi)/5}=(\sqrt[5]{r_0}e^{j\theta_0/5})e^{j2\pi/5}=w_0e^{j2\pi/5}.$$

类似地,当 z 变动 2、3、4、5 周后,相应的 w 值分别成为

$$w_0e^{j4\pi/5},\ w_0e^{j6\pi/5},\ w_0e^{j8\pi/5},\ w_0e^{j10\pi/5}=w_0,$$

可见,z 绕原点变动5周后,相应的 w 回到起点始值w_0。所以 $w=\sqrt[5]{z}$ 是z 的 5 值函数,它可一般地表示成

$$w=\sqrt[5]{r}e^{j(\theta+2k\pi)/5},(k=0,1,2,3,4)。\qquad(5.2.2)$$

对辐角 θ 的取值区间加以适当规定即可得到 w 所包含的 5 个分

枝，即5个单值函数。例如，规定第一个区间为$0 \leqslant \theta < 2\pi$，得到第一个分枝(主枝)：

$$w = \sqrt[5]{r}e^{j\theta/5}, (0 \leqslant \theta < 2\pi) \tag{5.2.3}$$

第2、3、4、5分枝的函数形式与上式相同，只是θ值规定在以下不同的区间：

$$2\pi \leqslant \theta < 4\pi, \cdots, 8\pi \leqslant \theta < 10\pi$$

例 5.2.3　证明①$z = \pm j$是多值函数$w = \sqrt{z^2 + 1}$的两个枝点；② 使z绕这两个枝点变动一周并不发生分枝的变化。然后给出一种可能的分枝割线。

证　①$w = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z - j)(z + j)}$，

设$z - j = r_1 e^{j\theta_1}$，$z + j = r_2 e^{j\theta_2}$，则$w = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{j\theta_1/2} e^{j\theta_2/2}$。

假定z变动的起始点对应于$\theta_1 = \alpha$和$\theta_2 = \beta$，则w的起始值为

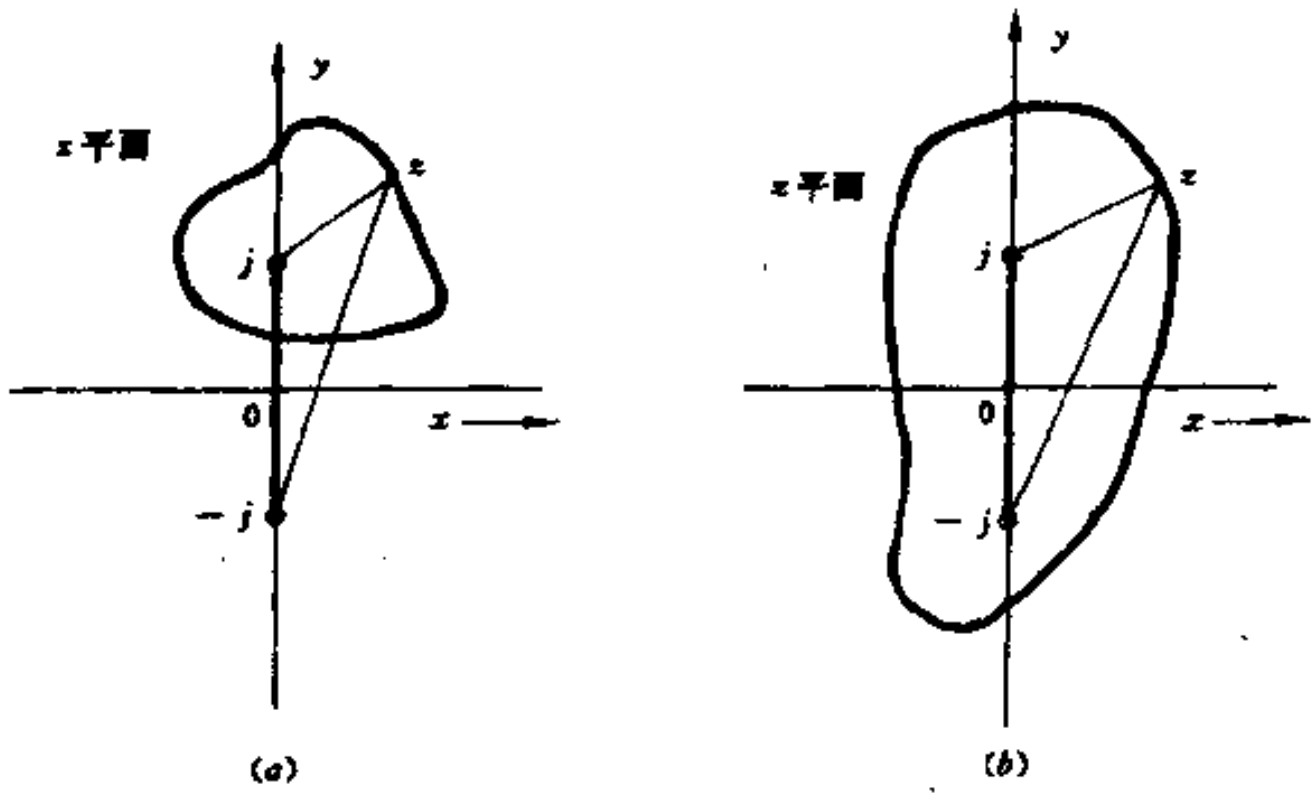


图 5.2.2　对例 5.2.3 的说明

$$w = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{j\alpha/2} e^{j\beta/2}$$

当z绕$z = j$点逆时针方向变动一周(但不包围$z = -j$点，见图

5.2.2(a)),θ_1 增加到 $\alpha + 2\pi$,但 θ_2 并未改变,即 $\theta_2 = \beta$,故有

$$w = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{j(\alpha+2\pi)/2} e^{j\beta/2}$$

$$= -\sqrt{r_1 r_2}\, e^{j/2} e^{j\beta/2}$$

可见 w 并未回到起始值,亦即发生了分枝的改变,所以 $z = j$ 点是 w 的一个枝点。

同理可证,$z = -j$ 是 w 的另一个枝点。

② 如果 z 变动一周包围两个枝点 $z = \pm j$(图5.2.2(b)),则 θ_1 由 α 增至 $\alpha + 2\pi$,而 θ_2 也由 β 增至 $\beta + 2\pi$,故有

$$w = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{j(\alpha+2\pi)/2} e^{j(\beta+2\pi)/2}$$

$$= \sqrt{r_1 r_2}\, e^{j\alpha/2} e^{j\beta/2}$$

可见 w 回到起始值,并未发生分枝的变化。

在图5.2.2中,连接 j 点和 $-j$ 点的粗实线是一种可能的分枝割线,因为只要当 z 变动时不穿插这条割线就可保证函数的单值性。

例5.2.4 ① 若 $e^w = z$,定义 z 的对数函数为 $w = \ln z$,试确定 w 的实部和虚部;② 计算 $w = \ln(1-j)$,并给出其主值(即给定 z 值所对应的主枝函数值);③ 证明 $z = 0$ 点是 $w = \ln z$ 的一个枝点。

解 ① 令 $w = u + jv$, $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$,且有

$$z = e^w = e^u e^{jv} = e^u(\cos v + j\sin v)$$

令上式实部和虚部分别相等得

$$e^u \cos v = r\cos\theta,$$

$$e^u \sin v = r\sin\theta.$$

将以上二式平方后相加得

$$e^{2u} = r^2, e^u = r, u = \ln r。$$

代回原式得

$$r\cos v = r\cos\theta, r\sin v = r\sin\theta,$$

由此可知

$$v = \theta + 2k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

所以

$$w = \ln z = \ln r + j(\theta + 2k\pi), (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{5.2.4}$$

② 首先将 $1 - j$ 写为指数形式：

$$1 - j = \sqrt{2}e^{j(7\pi/4 + 2k\pi)}$$

于是有

$$w = \ln(1 - j) = \frac{1}{2}\ln 2 + j(7\pi/4 + 2k\pi)$$

令 $k = 0$ 即得 w 的主值：$\frac{1}{2}\ln 2 + j7\pi/4$。

③ 在 z 平面上选 z_0 点($z_0 \neq 0$)作为起始点，相应的模和辐角为 r_0 和 θ_0，于是有 $\ln z_0 = \ln r_0 + j\theta_0$，使 z 由 z_0 点出发绕原点逆时针变动一周回到 z_0 点时有 $r = r_0, \theta = \theta_0 + 2\pi$，从而

$$\ln z_0 = \ln r_0 + j(\theta_0 + 2\pi),$$

亦即进入该函数的另一分枝，所以 $z = 0$ 点是该函数的一个枝点。

说明 在上例中，如果使 z 绕原点再变动一周、二周、三周、……，将达到 w 的新的不同的各分枝，永远不能回到起始的分枝，所以 w 具有无限多个分枝(试与例 5.2.2 比较)。我们说，$w = \ln z$ 是一个无限多值函数。在(5.2.4)式中令 $k = 0$，并限定 θ 值变化范围为 $0 \leqslant \theta < 2\pi$ 或 $-\pi \leqslant \theta < \pi$，我们得到 $w = \ln z$ 的主枝：

$$\ln z = \ln r + j\theta, (0 \leqslant \theta < 2\pi \text{ 或 } -\pi \leqslant \theta < \pi) \tag{5.2.5}$$

这样，当 z 取正实值时($\theta = 0$)，$\ln z$ 为实数。后面将遇到的应用问题中大多只需要考虑 $\ln z$ 的主枝。

5.2.2 极限、连续性、可导性和解析性

对函数求导在实变函数中占有重要地位，对复变函数也是如此。二者的导数都是用函数的极限来定义的。所以下面将首先讨论

复变函数的极限，然后讨论其连续性、可导性和解析性。由于在工程技术的实际问题中遇到的复变函数几乎都可表示成

$$w = f(z), \quad z = x + jy \tag{5.2.6}$$

的形式，所以今后我们主要讨论(5.2.6)式定义的独立变量为 $z = x + jy$ 的函数，而很少讨论像 $f(z) = |z|$、$f(z) = z^*$、$f(z) = \mathrm{Re}(z)$ 一类的函数。

1. 极限 设 $z = z_0$ 是单值复变函数 $w = f(z)$ 的定义域 D 内的一点。如果当 z 趋向于 z_0 时，$f(z)$ 趋向于复值常数 L，则称 L 是该函数的极限，记为 $f(z) \to L$(当 $z \to z_0$ 时)或

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \tag{5.2.7}$$

关于极限的较严格的表述是：如果对任意小的正数 ε 都可找到某一正数 δ(通常与 ε 有关)，使得对任意满足 $0 < |z - z_0| < \delta$ 的复数 z(z_0 本身可能除外)都有 $|f(z) - L| < \varepsilon$，则 L 称为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，即(5.2.7)式。这样的表述简称“$\varepsilon - \delta$”表述。

如果复变函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 点有极限，则可证明其极限是唯一的，并且这极限与 z 趋于 z_0 的方式无关，即不论在 z 平面上 z 沿任何途径趋于 z_0 都应得到同一极限。

我们也可以把复变函数的实部和虚部拆开来讨论它的极限。设 $z = x + jy$，$z_0 = x_0 + jy_0$。如果复变函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 在 $x \to x_0$ 和 $y \to y_0$ 时分别具有极限 a 和 b(实值常数)，则可证明，$a + jb = L$ 必定是 $f(z)$ 在 z 趋于 z_0 时的极限。

复变函数极限的四则运算规则与实变函数中相应的规则是类似的，即若 $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$，$\lim_{z \to z_0} g(z) = M$，则

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = L \pm M; \tag{5.2.8}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = L \cdot M; \tag{5.2.9}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)/g(z) = L/M, \quad (M \neq 0) \tag{5.2.10}$$

上面这些规则对于复变函数仍是需要证明的，此处从略。

例 5.2.5　① 若 $f(z) = z^2$，证明 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = z_0^2$。

② 试求 $f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$ 当 $z \to z_0$ 时的极限。

解　① 根据极限的定义，应该证明，给定任意小的正数 ϵ，可以找到正数 δ，使得对任意满足 $0 < |z - z_0| < \delta$ 的复变量 z 都有 $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$，利用(5.1.43)和(5.1.45)式容易得到以下关系：

$$\begin{aligned} |z^2 - z_0^2| &= |z - z_0| \cdot |z + z_0| \\ &< \delta |z - z_0 + 2z_0| \\ &< \delta(|z - z_0| + |2z_0|) \\ &< \delta(\delta + 2|z_0|) \end{aligned}$$

若令 $\delta(\delta + 2|z_0|) = \epsilon$，则有

$$\delta = \sqrt{|z_0|^2 + \epsilon} - |z_0|$$

可见，当给定 ϵ，就可找到上式给出的正数 δ，满足当 $|z - z_0| < \delta$ 时有 $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$。所以 z_0^2 是当 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 的极限。

② 这个问题与问题 ① 实际上并无区别，因为在这两种情况下，我们都不考虑 $z = z_0$ 点本身，所以仍有 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = z_0^2$。值得指出的是，在问题 ② 中 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 点的值是 $f(z_0) = 0$。所以 $f(z)$ 在 $z \to z_0$ 时的极限与 $f(z)$ 在 z_0 点的函数值不一定相等。

例 5.2.6　利用(5.2.8)至(5.2.10)式的运算规则计算

① $f(z) = z^2 - 5z + 10$ 当 $z \to 1 + j$ 时的极限；

② $f(z) = (2z + 3)(z - 1)/(z^2 - 2z + 4)$ 当 $z \to -2j$ 时的极限。

解　①
$$\begin{aligned} \lim_{z \to 1+j} f(z) &= \lim_{z \to 1+j} z^2 + \lim_{z \to 1+j} (-5z) + 10 \\ &= [\lim_{z \to 1+j} z]^2 + (-5) \lim_{z \to 1+j} z + 10 \\ &= (1 + j)^2 - 5(1 + j) + 10 = 5 - j3. \end{aligned}$$

$$② \lim_{z\to -2j} f(z) = \frac{[\lim_{z\to -2j}(2z+3)]\cdot[\lim_{z\to -2j}(z-1)]}{\lim_{z\to -2j}(z^2-2z+4)}$$

$$= \frac{(3-4j)(-2j-1)}{4j} = -\frac{1}{2} + j\frac{11}{4}$$

例 5.2.7　证明 $f(z) = z^*/z$ 当 $z \to z_0 = 0$ 时的极限不存在。

证　如果 $f(z)$ 的极限存在，它应该与 z 趋于 $z_0 = 0$ 点的方式无关。首先设 z 沿 x 轴趋于 $z_0 = 0$ 点，则 $y = 0$，$z = x + jy = x$，$z^* = x - jy = x$，故有

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^*}{z} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

再设 z 沿 y 轴趋于 $z_0 = 0$ 点，则 $x = 0$，$z = jy$，$z^* = -jy$，故有

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^*}{z} = \lim_{y\to 0}\frac{-jy}{jy} = -1$$

可见以上两种趋于 $z_0 = 0$ 点的方式给出不同结果，所以 $f(z)$ 当 $z \to 0$ 时的极限不存在。

2. 连续性　设 $z = z_0$ 是复变函数 $f(z)$ 的定义域 D 内的一点。当 $z \to z_0$ 时，如果 $f(z)$ 的极限就等于函数在该点的值 $f(z_0)$，则称函数 $f(z)$ 在 z_0 点具有连续性。在例 5.2.5 的问题 ① 中给出的函数 $f(z) = z^2$ 在 z_0 点具有连续性，但问题 ② 的函数在 z_0 点是不连续的。函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 点具有连续性，确切说应满足以下三个条件：(1) $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ 必须存在；(2) $f(z_0)$ 必须存在，即 $f(z)$ 在 z_0 点有定义；(3) $L = f(z_0)$。

函数连续性的定义也可用“$\varepsilon - \delta$”术语表达如下：对于任意给定的正数 ε，总可找到一个正数 δ，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时（δ 与 ε 和 z_0 有关）满足

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 中每一点都连续，则称函数 $f(z)$ 在

区域 D 中连续。不难证明，复变函数的连续性具有以下一些性质：

(1) 若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $z = z_0$ 点连续，则 $f(z) \pm g(z)$，$f(z) \cdot g(z)$ 和 $f(z)/g(z)[g(z) \neq 0]$ 在 $z = z_0$ 点也具有连续性。区域连续性也具有这些性质。

(2) 一个连续函数的连续函数，即复合函数，仍具有连续性。就是说，如果 $f(g)$ 在 $g = g_0$ 是连续的，而 $g(z)$ 在 $z = z_0$ 点是连续的，且 $g(z_0) = g_0$，则函数 $f[g(z)]$ 作为 z 的函数在 $z = z_0$ 点也是连续的。

(3) 如果 $f(z)$ 在区域 D 中连续，则它的实部函数 $\mathrm{Re}[f(z)]$、虚部函数 $\mathrm{Im}[f(z)]$ 和模函数 $|f(z)|$ 在该区域中也具有连续性。

(4) 如果 $f(z)$ 在一个封闭区域上(包括边界)具有连续性，则 $f(z)$ 必定是有界的，就是说，可以找到一个常数 M，使得 $|f(z)| < M$ 对区域上任意 z 点都成立。此外，$|f(z)|$ 在这区域上必定具有最大值和最小值。

(5) 在关于函数连续性定义的“$\epsilon - \delta$”表述中，如果对于每一给定的正数 ϵ，总可找到一个正数 δ(它只与 ϵ 有关而与 z_0 无关，即对所有不同的 z_0 点有相同的 δ 值)，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时满足 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$，则称 $f(z)$ 在该区域中一致连续。

例 5.2.8 讨论 z 取何值时函数 $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$ 和 $f(z) = \mathrm{csc}z$ 具有连续性。

解 ① $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1} = \dfrac{z}{(z + j)(z - j)}$，当 $z = \pm j$ 时上式分母为零，所以在除 $z = \pm j$ 以外的所有 z 点 $f(z)$ 都是连续的。

② $f(z) = \mathrm{csc}z = \dfrac{1}{\sin z}$，如果 $\sin z = 0$，则有

$$\sin z = (e^{jz} - e^{-jz})/2j = 0, e^{jz} = e^{-jz},$$

$$e^{j2z} = 1 = e^{j2k\pi}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

故 $j2z = j2k\pi$，$z = k\pi$，即当 $z = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$ 时，函

数 $\sin z = 0$。所以除上述这些点以外，函数 $f(z) = \csc z$ 处处具有连续性。

例 5.2.9　证明 $f(z) = z^2$ 在区域 $|z| < 1$ 内具有一致连续性。

证　按照一致连续的定义，应该证明对任意给定的 $\varepsilon > 0$，可以找到一个 $\delta > 0$，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时有 $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$。这里 δ 只与 ε 有关，而与该区域内具体的点 z_0 无关。现设 z 和 z_0 是区域 $|z| < 1$ 内的任意点，则有

$$|z^2 - z_0^2| = |z + z_0| \cdot |z - z_0| \leqslant (|z| + |z_0|)|z - z_0| < 2|z - z_0|。$$

当 $|z - z_0| < \delta$，由上面结果可知：$|z^2 - z_0^2| < 2\delta$，如果选取 $\delta = \varepsilon/2$，就有：当 $|z - z_0| < \delta$ 使 $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$，并且 δ 只与 ε 有关而与 z_0 无关。所以 $f(z) = z^2$ 在该区域具有一致连续性。

3. 可导性　设 $w = f(z)$ 是 z 平面上某个区域 D 内的单值函数，并存在下述极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \qquad (5.2.11)$$

该极限与复变量 Δz 趋于零的方式无关，则称 $f(z)$ 在 z 点具有可导性。极限 $f'(z)$ 称为复变函数 $f(z)$ 的导数，它也可表示成 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}f(z)/\mathrm{d}z$。

由定义式(5.2.11)可以看出，如果 $f(z)$ 在 z 点具有可导性，则必定在 z 点具有连续性，但反过来说却不一定正确。

复变函数的导数定义(5.2.11式)与实变函数的导数定义在形式上是相同的。与此相联系的是，复变函数的各种求导规则在形式上也与实变函数的相应求导规则相同，尽管它们仍是需要证明的。应该注意的是，在对实变函数 $f(x)$ 求导定义中，$\Delta x \to 0$ 或 $x \to x_0$ 只能沿着一个路径(实轴)；在复变函数情况下，$\Delta z \to 0$ 或 $z \to z_0$ 可以有不同的路径。当 z 不论沿什么路径趋于 z_0 时，极限

(5.2.11)式都存在才行。可见复变函数的可导条件是相当严格的。这就决定了复变函数及其导数有区别于实变函数的独特性质。在工程技术问题中,最关心的是导数 $f'(z)$ 是否有限,因为除了像 $f(z)=|z|$, $f(z)=\mathrm{Re}z$ 和 $f(z)=z^*$ 等少数函数外(参看例5.2.10),"与方式无关"的条件大多是满足的。

例 5.2.10　证明 $f(z)=z^*$ 在 z 平面上任何点都不具有可导性。

证　由定义(5.2.11)式有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^*-z^*}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\Delta z)^*}{\Delta z},$$

如果 Δz 沿实轴趋于零,则 $\Delta z=(\Delta z)^*=\Delta x$,于是有 $f'(z)=1$;如果 Δz 沿虚轴趋于零,则 $\Delta z=j\Delta y=-(\Delta z)^*$,于是 $f'(z)=-1$。可见 $f'(z)$ 与 Δz 趋于零的方式有关,不满足可导性条件,亦即 $f(z)=z^*$ 在任意 z 点都不可导。

例 5.2.11　利用导数定义(5.2.11)式确定 $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ 在任意点 z 的导数 $f'(z)$,设 $z\neq 1$。

解

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[1+(z+\Delta z)][1-(z+\Delta z)]^{-1}-(1+z)(1-z)^{-1}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)}=\frac{2}{(1-z)^2}$$

上述极限与 Δz 趋于零的方式无关。

例 5.2.12　利用导数定义(5.2.11)式求 $f(z)=z^n$ 的导数。设 n 为正整数。

解 $f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[z^n+nz^{n-1}\Delta z+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots+(\Delta z)^n]-z^n}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left[nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} \Delta z + \cdots + (\Delta z)^{n-1} \right]$$

$$= nz^{n-1}$$

可见上述求导公式与实变函数中的$(x^n)' = nx^{n-1}$具有相同的形式。其他常用的复变函数求导公式也与实变函数对应的求导公式具有相同形式。

4.**解析性** 设复变函数$f(z)$定义于区域D，z_0是区域D内的一点，如果在$z = z_0$的一个充分小的邻域$|z - z_0| < \delta$内，$f(z)$处处具有可导性(包括z_0点本身)，则称$f(z)$在$z = z_0$点具有解析性。如果$f(z)$在定义域D内所有点都具有解析性，则称$f(z)$在区域D内具有解析性，或说$f(z)$是区域D内的解析函数(又称正则函数或全纯函数)。

显然，如果$f(z)$在z点具有解析性，则它必定在z点具有可导性。但反过来说就不一定正确，$f(z)$在z点可导并不一定在z点解析。然而，如果单值函数$f(z)$在整个定义域D内具有可导性，那么它在整个区域D内必定具有解析性。

如果$f(z)$和$g(z)$都是区域D内的解析函数，则由函数的和、差、积、商的导数性质容易证明，$f(z) \pm g(z)$、$f(z) \cdot g(z)$、$f(z)/g(z)[g(z) \neq 0]$也是区域D内的解析函数，但在商函数的情形下需除去使$g(z) = 0$的那些点。此外，复合函数$f[g(z)]$也是区域D内的解析函数。

由上述解析性定义可以看出，解析函数是具有严格限制的一类复变函数。后面将看到，这类函数具有一些有用的性质。我们在实际问题中遇到的复变函数常常就是解析函数(例如，参见§6.3:4.2)。一个解析函数$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$的性质固然可以通过对它的两个等价的双变量实变函数$u(x, y)$和$v(x, y)$来分别研究，但由于$f(z)$的解析性带来的一系列有用性质，使得在许多情况下直接研究$f(z)$本身比分别研究它的两个等价实

变函数更有效、更严谨,因而获得广泛应用。

例 5.2.13　讨论下列各函数的解析性:

①$f(z)=z^n$(n 为正整数);②$f(z)=1/z$;

③$f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$;　　④$f(z)=\dfrac{z^3+2z+1}{z^3+1}$

解　① 由例 5.2.12,$f(z)=z^2$ 在整个 z 平面内都是单值可导的,所以它在整个 z 平面内都具有解析性。由此可知,任何 z 的多项式函数

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$$

在整个 z 平面内都是解析的。

② 函数 $f(z)=1/z$ 的导数为 $f'(z)=-1/z^2$,但不包括 $z=0$ 点,所以函数在除去 $z=0$ 点的整个 z 平面内是解析的。

③ 由例 5.2.11 可知,除 $z=1$ 点外,$f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ 处处可导,所以函数在 $z=1$ 点不具有解析性,但在其他所有的点都是解析的。

④ 若 $z^3+1\neq 0$,则 $f(z)$ 的导数为

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^3+2z+1}{z^3+1}\right]\\&=\frac{(z^3+1)(3z^2+2)-(z^3+2z+1)(3z^2)}{(z^3+1)^2}\\&=\frac{2-4z^3}{(z^3+1)^2}\end{aligned}$$

所以除了使 $z^3+1=0$ 的那些点外,函数在整个 z 平面内具有解析性,这些点正是 -1 的三个立方根:$e^{j(\pi+2k\pi)}(k=0,1,2)$,即 $e^{j\frac{\pi}{3}}$、$e^{j\pi}$ 和 $e^{j\frac{5\pi}{3}}$。一般地说,由多项式 $P(z)$ 和多项式 $Q(z)$ 构成的任何分式函数 $P(z)/Q(z)$,除去使 $Q(z)=0$ 的那些点外都是在整个 z 平面内解析的。

例 5.2.14　利用导数定义(5.2.11)式计算 $f(z)=z\mathrm{Re}[z]$

在 $z=0$ 点的导数，并讨论 $f(z)$ 的解析性。

解 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z\mathrm{Re}|\Delta z|}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\mathrm{Re}|\Delta z|=0$。所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 点是可导的，其导数为零。为了研究 $f(z)$ 的解析性，现考察 $f(z)$ 在 $z=0$ 点以外的区域是否具有可导性。由(5.2.11)式有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}|z+\Delta z|-z\mathrm{Re}|z|}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\mathrm{Re}|z|+\mathrm{Re}|\Delta z|+\frac{z\mathrm{Re}|\Delta z|}{\Delta z}\right)$$

如果 Δz 沿实轴趋于零，则 $\Delta z=\mathrm{Re}|\Delta z|=\Delta x$，故

$$f'(z)=\mathrm{Re}|z|+z;$$

如果 Δz 沿虚轴趋于零，则 $\Delta z=j\Delta y$，$\mathrm{Re}|\Delta z|=0$，故

$$f'(z)=\mathrm{Re}|z|$$

可见，Δz 沿不同路径趋于零时得到不同的导数，即在除 $z=0$ 点外的任何点，$f(z)$ 不存在唯一的导数。即使在 $z=0$ 点附近的充分小的邻域内，$f(z)$ 也是不可导的。所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 点不具有解析性，尽管它在 $z=0$ 点具有可导性。

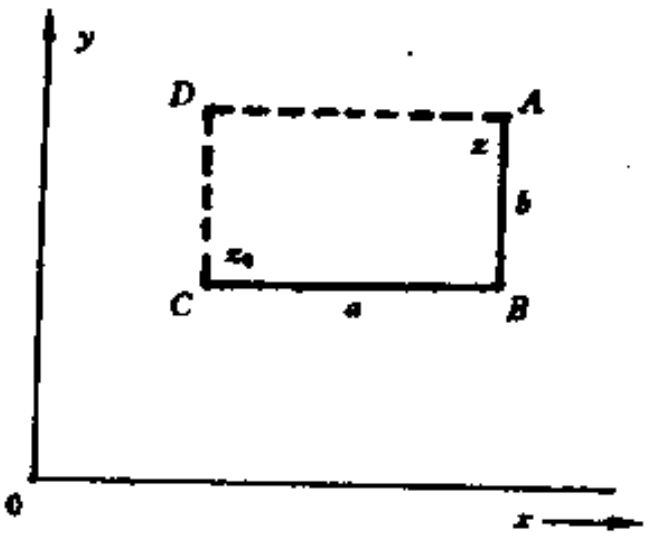


图 5.2.3

5.2.3 柯西 — 黎曼条件

上节介绍了复变函数的导数定义和解析函数的定义。由此出发，本节将给出解析函数的一个重要特性，即

函数 $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ 在区域 D 内具有解析性的必要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在区域 D 内满足下述柯西－黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.2.12}$$

并且,如果方程(5.2.12)中各偏导数在区域 D 内是连续的,则上述柯西 - 黎曼方程也是 $f(z)$ 在区域 D 内具有解析性的充分条件。

解析函数的上述条件称为柯西 - 黎曼条件。上节我们曾用导数的极限定义(5.2.11)式来判别一个复变函数的解析性,现在柯西 - 黎曼条件给我们提供了判别解析函数的另一个更有效的方法。方程(5.2.12)告诉我们,解析函数的实部和虚部之间存在着密切的内在联系,后面将会看到,解析函数在工程和物理中的许多重要应用都与柯西 - 黎曼方程(5.2.12)有关。下面我们只来证明条件的必要性。

我们已经知道,若 $f(z)$ 在区域 D 内的某点 z_0 具有可导性,就要求 z 不论以什么路径趋于 z_0 时都应得到同一个导数值 $f'(z_0)$。现在考虑图5.2.3所示的两个路径:① 设 z 沿路径 ABC 趋于 z_0,其中 BA 平行于 y 轴,长度为 b;CB 平行于 x 轴,长度为 a。先保持 a 不变,使 $b\to 0$,然后再令 $a\to 0$。② 设 z 沿路径 ADC 趋于 z_0,先令 $a\to 0$,再令 $b\to 0$。

对于路径 ABC 有

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

或

$$f'(z_0)=\lim_{a\to 0}\left\{\lim_{b\to 0}\frac{[u(x_0+a,y_0+b)+jv(x_0+a,y_0+b)]}{a+jb}-\frac{[u(x_0,y_0)+jv(x_0,y_0)]}{a+jb}\right\}$$

如果 $f(z)$ 在 z_0 点是可导的,则 $f(z)$ 必定在 z_0 点连续,因而 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 z_0 点也连续。所以

$$f'(z_0)=\lim_{a\to 0}\left\{\frac{[u(x_0+a,y_0)-u(x_0,y_0)]}{a}+\right.$$

$$\frac{j[v(x_0+a,y_0)-v(x_0,y_0)]}{a}\Bigg\}$$

$$=\lim_{a\to 0}\left\{\frac{u(x_0+a,y_0)-u(x_0,y_0)}{a}\right\}+$$

$$j\lim_{a\to 0}\left\{\frac{v(x_0+a,y_0)-v(x_0,y_0)}{a}\right\}$$

$$=\left[\frac{\partial u}{\partial z}+j\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{z=z_0} \tag{5.2.13}$$

因为 $f(z)$ 在 z_0 点是可导的，故上面最后两个极限是存在的。

对于路径 ADC，可以类似地写出

$$f(z_0)=\lim_{b\to 0}\left\{\lim_{a\to 0}\frac{[u(x_0+a,y_0+b)+jv(x_0+a,y_0+b)]-[u(x_0,y_0)+jv(x_0,y_0)]}{a+jb}\right\}$$

$$=\lim_{b\to 0}\left\{\frac{u(x_0,y_0+b)-u(x_0,y_0)}{jb}\right\}+$$

$$\lim_{b\to 0}\left\{\frac{v(x_0,y_0+b)-v(x_0,y_0)}{b}\right\}$$

$$=\left[-j\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]z=z_0 \tag{5.2.14}$$

如果 $f(z)$ 在 z_0 点是可导的，那么(5.2.13)和(5.2.14)式给出的 $f'(z_0)$ 应相等：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}=-j\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\qquad(\text{在 } z_0 \text{ 点}),$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\qquad(\text{在 } z_0 \text{ 点})。$$

由于 z_0 点是任意取的，所以上述方程对于区域 D 内的任意 z 点都成立。这就证明了区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 必满足柯西－黎曼方程(5.2.12)。

例 5.2.15　利用柯西－黎曼条件判别例 5.2.9 中给出的函

数 $f(z)=z^2$ 和例5.2.10中给出的函数 $f(z)=z^*$ 的解析性;如果具有解析性,那么求出其导数。

解 ①$f(z)=z^2=(x+jy)^2=x^2-y^2+j2xy$,所以 $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

可见满足柯西－黎曼方程(5.2.12),$f(z)$ 在 z 平面内具有解析性。此外,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}\left(=-j\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$=2x+j2y=2z$$

②$z^*=x-jy$,所以 $u=x$, $v=-y$,且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y},$$

可见不满足柯西－黎曼条件,故 $f(z)=z^*$ 不是解析函数。

例 5.2.16　判别 $f(z)=\sin z$ 是否解析函数。

解　$\sin z=\sin(x+jy)$,参照(5.1.49)式有

$$\sin z=\sin x\cdot\mathrm{ch}y+j\cos x\cdot\mathrm{sh}y,$$

所以　$u(x,y)=\sin x\cdot\mathrm{ch}y$, $v(x,y)=\cos x\cdot\mathrm{sh}y$,且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cdot\mathrm{ch}y=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\cdot\mathrm{sh}y=-\frac{\partial u}{\partial y},$$ 可见满足柯西－黎曼条件,

$f(z)=\sin z$ 是解析函数。

5.2.4　调和函数

在柯西－黎曼方程(5.2.12)中出现了四个一阶偏导数,如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在区域 D 内还存在二阶偏导数,并有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\quad 和\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},$$

则 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 还满足下述的拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{5.2.15}$$

这只要将(5.2.12)式中的两个方程分别对 x 和 y 求导：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$

然后相加即得(5.2.15)式中的第一个方程，对第二个方程也可类似地证明。这样，我们看到，一个解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部自然地就是二维拉普拉斯的解，这一点在解决工程和物理学中的二维势问题上具有重要意义(见下节)。

凡是在定义域 D 内满足拉普拉斯方程(5.2.15)的实变函数都称为区域 D 内的调和函数。一个解析函数 $f(z)$ 的实部函数 $u(x,y)$ 和虚部函数 $v(x,y)$ 显然都是调和函数。但是，由定义在区域 D 内的任意两个调和函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 所构成的复变函数 $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ 却不一定是解析函数，因为一个解析函数的实部函数 $u(x,y)$ 和虚部函数 $v(x,y)$ 之间还必须存在一定的联系，这种联系体现在柯西－黎曼方程(5.2.12)中。根据这个方程，若已知一个解析函数的实部函数 $u(x,y)$，则可以求得它的虚部函数 $v(x,y)$，反之亦然。通常称解析函数的实部和虚部为共轭调和函数。

共轭调和函数有一个有用的性质——正交性。设 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是一对共轭调和函数。令

$$u(x,y)=\alpha,\ v(x,y)=\beta, \tag{5.2.16}$$

其中 α 和 β 是任意常数，(5.2.16)式表示平面上的两个曲线族。正交性是指这两个曲线族是正交的，即一个曲线族中的每条曲线与另一个曲线族中的每条曲线在交点处互相垂直，它们在交点处斜率的乘积等于 -1。图 5.2.4 中，画出两族曲线中各一条曲线，即 $u(x,y)=\alpha_1$ 和 $v(x,y)=\beta_1$，这里 α_1 和 β_1 是给定的数值。现在

来证明上述正交性。首先将 $u(x,y)=\alpha_1$ 两端对 x 求导得

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

于是曲线 $u(x,y)=\alpha_1$ 的斜率是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial u}{\partial y}$$

同理可得 $v(x,y)=\beta_1$ 的斜率：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial v}{\partial y}.$$

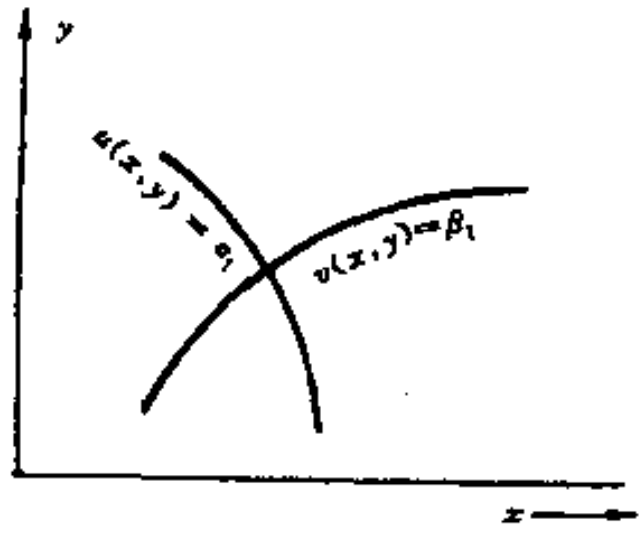


图 5.2.4

利用柯西－黎曼方程(5.2.12)，上面两个斜率的乘积成为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-1$$

所以两条曲线是正交的。由于常数 α_1 和 β_1 是任意选定的，所以两族曲线是彼此正交的。

例 5.2.17　证明 $u(x,y)=x^3+y^3-3x^2y-3xy^2+2xy$ 是调和函数，并求出它的共轭调和函数 $v(x,y)$。

解
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3-3x^2y-3xy^2+2xy)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}[3x^2-6xy-3y^2+2y]\\&=6x-6y,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y-6x,$$

以上二式相加得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

所以 $u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程(5.2.15)，它是调和函数。为求出

它的共轭调和函数 $v(x,y)$ 利用柯西－黎曼方程有

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-6xy-3y^2+2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2-3x^2-6xy+2x)$$

将上面第一个方程对 y 积分得

$$v(x,y)=3x^2y-3xy^2-y^3+y^2+c(x)$$

这里 $c(x)$ 是 x 的任意函数，待定。将上式对 x 求导得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy-3y^2+c'(x)$$

比较这个方程与前面关于$\frac{\partial v}{\partial x}$ 的方程可知

$$c'(x)=3x^2-2x, c(x)=x^3-x^2+c,$$

其中 c 为任意常数。最后得到

$$v(x,y)=3x^2y-3xy^2-y^3+y^2+x^3-x^2+c$$

5.2.5 静电场问题

由上节讨论可知，一个解析函数的实部和虚部是一对共轭调和函数，它们都是二维拉普拉斯方程的解，它们对应的两族曲线互相正交，解析函数的这些性质有重要的实际意义，因为在工程和物理学中有不少问题与求解拉普拉斯方程有关。本节介绍如何利用解析函数的性质去研究这类问题。这里将要讨论的只是较简单的问题，对于稍复杂的问题可用 §5.3 的保角映射方法去处理。

本节讨论平面静电场问题。如果三维静电场只在 x-y 平面中场强有变化，在垂直于 x-y 平面的方向上没有变化，就可以当作平面静电场来研究。电场强度 $\vec{E}$ 和电势 ϕ(或称电位) 都只是坐标 x 和 y 的函数：

$$\vec{E}=\vec{E}(x,y),\quad \phi=\phi(x,y)$$

电势 ϕ 的负梯度就是电场 $\vec{E}$：

$$\vec{E} = -\,grad\phi = -\,\nabla\phi,$$

或

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{5.2.17}$$

电场 E 的复数表示是

$$E = E_x + jE_y = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - j\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{5.2.18}$$

如果在某区域 D 内不存在电荷，则该区域中电场的散度为零：

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \tag{5.2.19}$$

由方程(5.2.19) 和(5.2.17) 式得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{5.2.20}$$

所以电势 ϕ 满足拉普拉斯方程，它是区域 D 内的调和函数。由上节知道，必然存在与 ϕ 共轭的另一个调和函数 Ψ，以 ϕ 为实部，以 Ψ 为虚部，就可构成区域 D 内的一个解析函数：

$$\Omega(z) = \phi(x,y) + j\Psi(x,y), \tag{5.2.21a}$$

$\Omega(z)$ 称为复电势。同样，如果以 Ψ 为实部，以 ϕ 为虚部，也可构成一个解析函数：

$$f(z) = \Psi(x,y) + j\phi(x,y) \tag{5.2.21b}$$

$\Omega(z)$ 与 $f(z)$ 的关系为

$$\Omega(z) = j[f(z)]^*$$

由(5.2.18) 式，利用柯西－黎曼方程(5.2.12) 以及导数与独立变量趋于零的方式无关的性质，可将电场 E 用复电势 $\Omega(z)$ 表示成

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} - j\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi - j\Psi)\right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\Omega(z)]' \tag{5.2.22}$$

由上节关于(5.2.16)式的讨论可知,两个共轭调和函数 ϕ 和 Ψ 构成的两个曲线族

$$\phi(x,y) = \alpha \text{ 和 } \Psi(x,y) = \beta \tag{5.2.23}$$

是彼此正交的。若前者是静电场的等势线(或电力线),则后者是静电场的电力线(或等势线)。这样,在研究平面静电场问题时,可以把电势函数和电通函数分别看作一个解析函数的实部和虚部,从而统一地研究这个解析函数的性质。确定了这个解析函数就可确定等势线和电力线。

为研究等势线和电力线,有时使用极坐标系比直角坐标系更方便。在极坐标系中,柯西 - 黎曼方程成为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta} & (5.2.24a) \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} & (5.2.24b) \end{cases}$$

与方程(5.2.20)对应的极坐标系中的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{5.2.25}$$

极坐标系中的电场分量为

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tag{5.2.26}$$

例 5.2.18　试求均匀带电的无限长直导线产生的复电势 $\Omega(z)$,设导线穿过 $z = 0$ 点,并与 z 平面垂直,线电荷密度为 q。若导线穿过 $z = a$ 点,则复电势为何?

解　我们只需考虑 $z = 0$ 点的点电荷 q 在 z 平面产生的平面静电场,因为平行于 z 平面的平面电场都是相同的。电场的方向是由原点发出的射线,它只有径向分量 E_r(常数),没有切向分量(图 5.2.5)。以 $z = 0$ 点为圆心作一个封闭圆周 C,电场强度的法向分

量 $E_n = E_r$，由高斯定理有

$$\oint_C E_n \mathrm{d}s = 4\pi q,$$

又

$$\oint_C E_n \mathrm{d}s = Er\oint_C \mathrm{d}s$$
$$= 2\pi r E_r,$$

故

$$E_r = \frac{2q}{r}$$

由上式和(5.2.26)式有

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{2q}{r},$$
$$\phi = -2q\ln r$$

上面略去了积分常数。由(5.1.48)式可知，上式是复变函数

$$\Omega(z) = -2q\ln z \tag{5.2.27}$$

的实部，所以(5.2.27)式就是所要求的复电势。如果导线穿过 $z = a$ 点，复电势应为

$$\Omega(z) = -2q\ln(z-a)$$

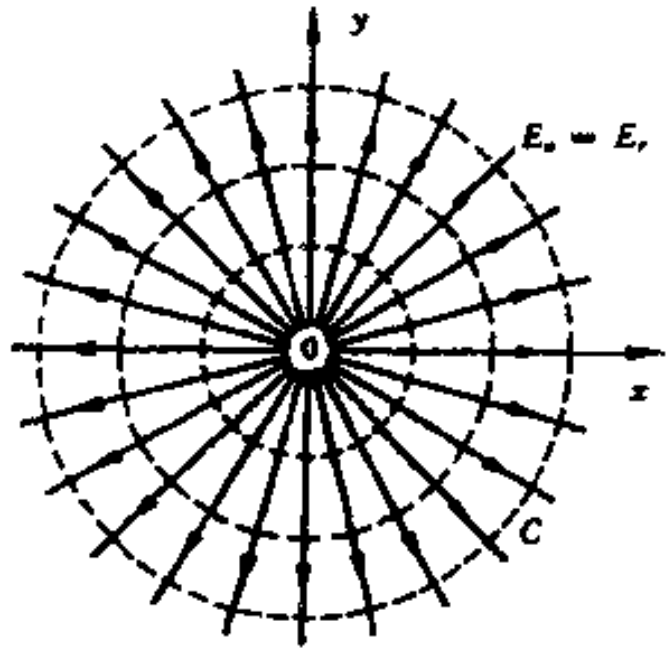


图 5.2.5

例 5.2.19　试求两根无限长带电直导线产生的电势 ϕ，其中一根垂直穿过点 $z_0 = a + jb$，线电荷密度为 q；另一根垂直穿过点 $z_0^* = a - jb$，线电荷密度为 $-q$(图 5.2.6)。

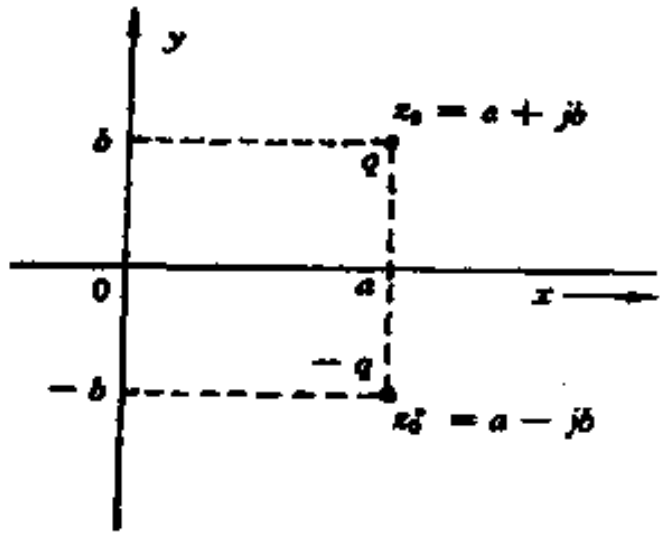


图 5.2.6

解　每一根导线的线电荷产生的复电势叠加起来就是总的复电势。应用上例

的结果可得

$$\Omega(z) = -2q\ln(z - z_0) + 2q\ln(z - z_0^*)$$

$$= 2q\ln\left(\frac{z - z_0^*}{z - z_0}\right)$$

上式的实部就是所要求的电势 ϕ：

$$\phi = 2q\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{z - z_0^*}{z - z_0}\right)\right]$$

例5.2.20 已知电势函数为 $\phi(x, y) = 2xy$，试由(5.2.21b)式求复电势 $f(z)$，并作出它的电力线和等势线。

解 按(5.2.21b)式，柯西－黎曼方程为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

已知 $\phi(x, y) = 2xy$，故得

$$① \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2x, \quad ② \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -2y$$

对方程 ① 积分得

$$\Psi = x^2 + F(y),$$

其中 $F(y)$ 待定。将上式代入方程 ② 有

$$\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y} = -2y$$

$$F(y) = -y^2$$

所以电通函数为 $\Psi = x^2 - y^2$。由(5.2.21b)式，复电势为

$$\Omega(z) = \Psi(x, y) + j\phi(x, y)$$

$$= x^2 - y^2 + j2xy$$

$$= (x + jy)^2 = z^2$$

电力线方程和等势线方程分别为

$$\Psi(x, y) = \alpha \text{ 和 } \phi(x, y) = \beta,$$

或写为

$$x^2 - y^2 = \alpha,$$

$$2xy = \beta$$

上面第一个方程是等轴双曲线，表示电力线，第二个方程是反比曲线，表示等势线(图5.2.7)。电力线和等势线互相正交。这是由两个互相垂直的带电导体平面产生的静电场，x 轴和 y 轴是这两个导体平面的截口。

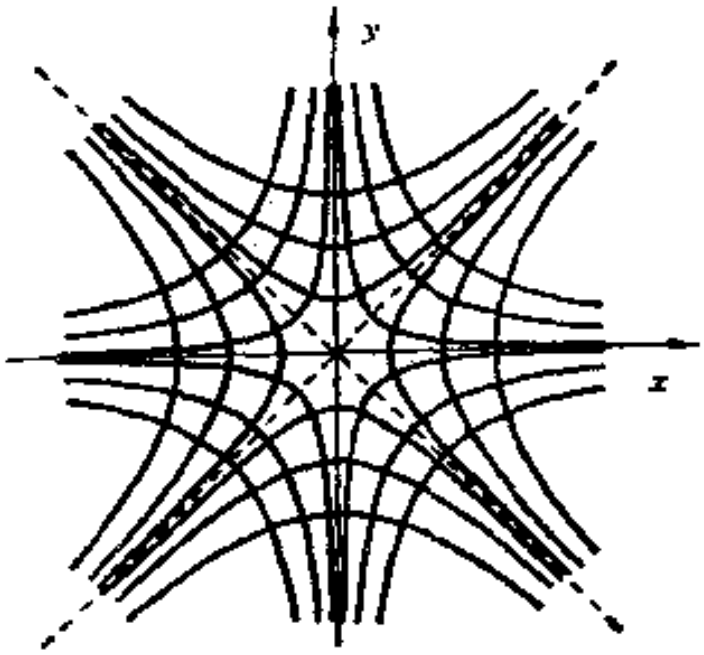


图 5.2.7

§5.3 保角映射

5.3.1 什么是保角映射

1.映射的概念

为了说明映射的概念，首先举一个简单的例子，考虑电感 L 和电阻 R 的串联阻抗：

$$Z = Z_R + jZ_I = R + j\omega L$$

我们可以这样把阻抗 Z 表示在复平面上，以横轴表示 Z 的实部 $Z_R = R$，以纵轴表示 Z 的虚部 $Z_I = \omega L$。对于给定的 R 值，当频率 ω 变化时就可画出图5.3.1中的直线 PQ，它是复数 Z 末端所描出的轨迹(称为阻抗轨迹)在轨迹直线上标出不同频率的点，从原点到某一频率点的矢量就表示相应的阻抗 Z。这是电工学中常用

的方法。若推广到复频率，则 $Z = R + Ls$（参看表3.2），即 $Z_R = R + L\sigma$，$Z_I = L\omega$。

为了表示 Z 和 s 的关系，可以用两个互相联系的复平面，即 Z 平面和 S 平面，如图5.3.2所示，S 平面中的每一点（如 P 点）与 Z 平面中的每一点（如 P' 点）相对应。S 平面中的每一条线（如 PA 或 PB）也与 Z 平面中的线（如 $P'A'$ 或 $P'B'$）相对应。从 S 平面到 Z 平面就是一个简单的变换过程，或称映射。把 S 平面中的点移动 R 并把坐标比例放大 L 倍，就得到 Z 平面中的相应点。S 平面中的零点 $s_0 = -R/L$ 变换到 Z 平面中就是原点 $Z = 0$。Z 平面中的 $Z = 0$ 点称为 S 平面中的 s_0 点的映像。同样，S 平面中的连续曲线，映射到 Z 平面也是连续曲线。这种复平面的变换方法对于这个简单例子，并看不出有什么用处，但对于分析复杂的网络问题（以及静电场等问题）却是一个有用的工具，所以有必要对复变函数的映射问题进一步做一般性的讨论。

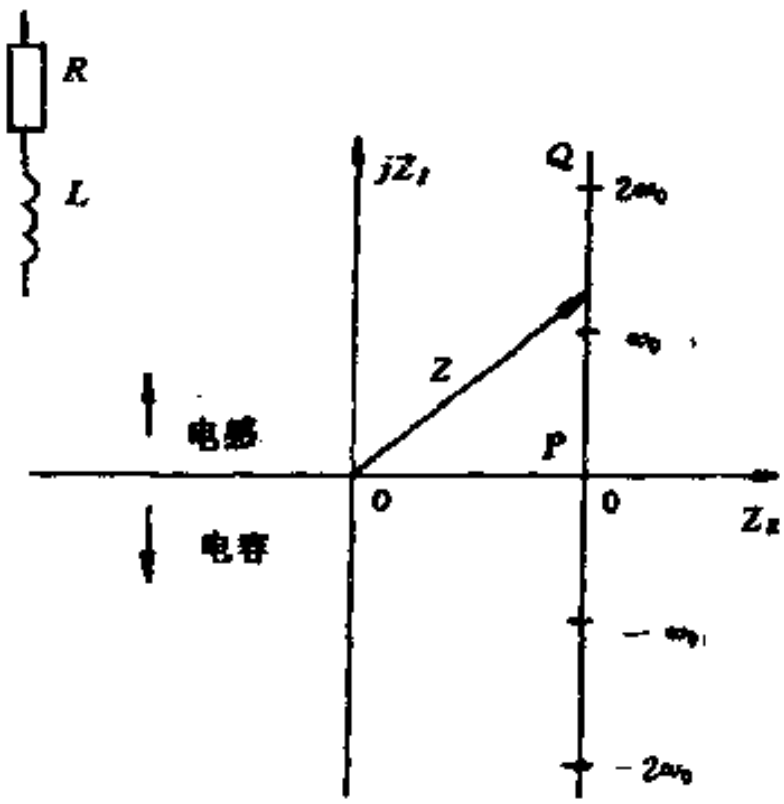


图 5.3.1　阻抗轨迹

为加深对映射概念的理解，我们再举一个数值例子。考虑复变函数 $w = f(z) = z^{-1}$，我们有

$$z = x + jy,\ w = u(x, y) + jv(x, y),$$

$$u = u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v = v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

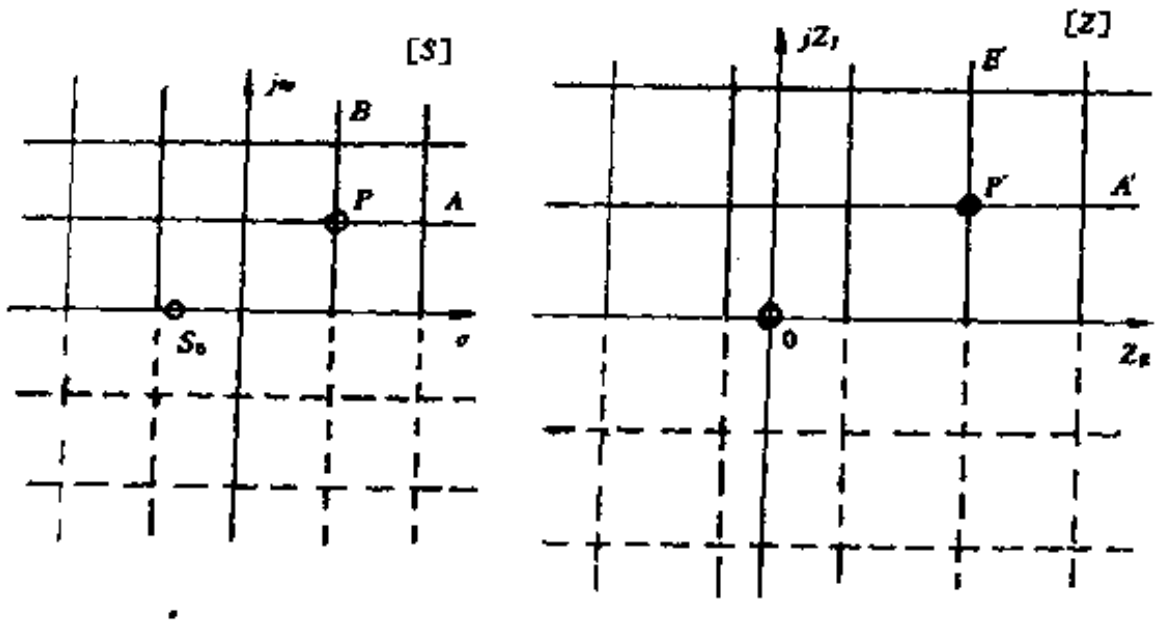


图 5.3.2　S 平面与 Z 平面的关系(串联 RL 电路)

给定几个具体的点：

当 $z_1 = x_1 + jy_1 = 1 + j2$ 时，

$$w_1 = f(z_1) = u_1 + jv_1 = \frac{1}{5} + j\left(-\frac{2}{5}\right),$$

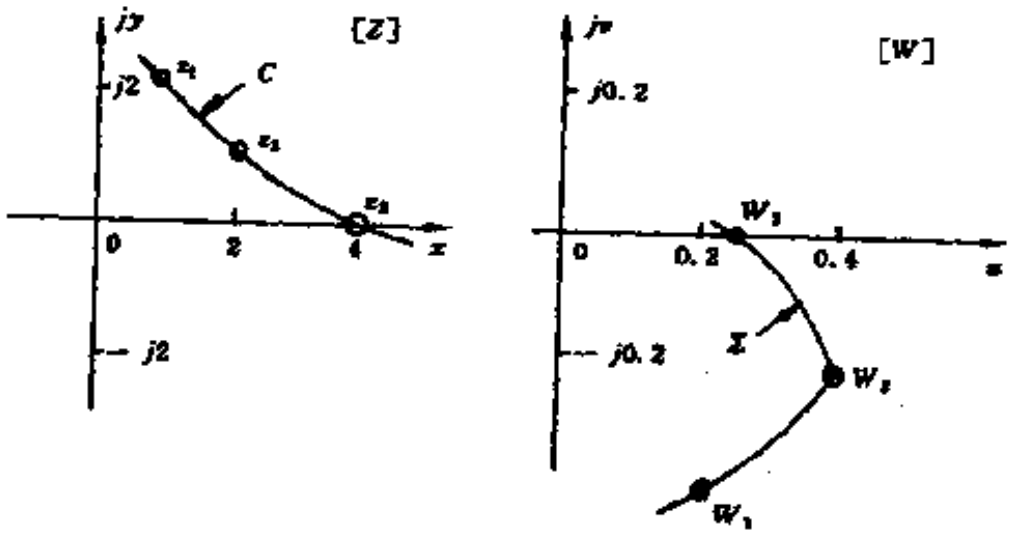


图 5.3.3　说明映像的例子

当 $z_2 = 2 + j1$ 时，$w_2 = f(z_2) = \frac{2}{5} + j(-\frac{1}{5})$，

当 $z_3 = 4 + j0$ 时，$w_3 = \frac{1}{4} + j0$.

把 z_1、z_2、z_3，表示在 Z 平面上，把 w_1，w_2，w_3 表示在 W 平面上，如图 5.3.3 所示。w_1、w_2、w_3 就分别称为 z_1，z_2，z_3 的映像(由复变函数 $w = z^{-1}$ 所确定的映像)，若给定 Z 平面的一条连续曲线(如图 5.3.3 中的曲线 C)，也可以找到它在 W 平面的映像(图 5.3.3 中的曲线 Σ)。曲线 Σ 上的每一点都是曲线 C 上对应点的映像。所以一般地我们可以认为，复变数 z 的函数 $w = f(z)$ 定义 z 的一种映像，不同的函数 $w = f(z)$ 给出的映像也不同。

2. 保角映射的条件

在工程应用中，最重要的是所谓保角映射。什么是保角映射呢?这是指 Z 平面上过某点 z 的任何两条曲线的交角(大小和方向) 经过 $w = f(z)$ 的变换映射到 W 平面以后，过映像点 w 的两条映像曲线仍保持原来的交角(大小和方向)。是不是任何复变函数 $w = f(z)$ 构成的映射关系都具有保角性呢?不是的，必须对 $w = f(z)$ 附加两个条件才行：

(1) $f(z)$ 必须是单值解析函数。这是指 $f(z)$ 除了它自己的奇点以外处处是单值解析的。例如，$f(z) = k/(z - a)$ 除了它的极点 $z = a$ 以外处处是单值解析的。

(2) 除了在 Z 平面上 $f(z)$ 的孤立奇点以外必须满足 $f'(z) \neq 0$。例如，$f(z) = kz^3$，$f'(z) = 3kz^2$，在 $z = 0$ 点不满足 $f'(z) \neq 0$，除 $z = 0$ 点外均满足 $f'(z) \neq 0$。又如 $f(z) = k$(常数)，对 z 的任何值均有 $f'(z) = 0$，所以 $f(z) = k$ 就不能构成保角变换。

为什么 $w = f(z)$ 满足以上两个条件就是一个保角变换呢?我们在 §5.2.2 和 §5.2.3 讨论了复变函数的可导条件(柯西 - 黎曼条件)，已经知道，若 $w = f(z)$ 是单值解析函数，那么某一点的导数 $f'(z) = \mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 与变量 $\mathrm{d}z$ 在这一点的方向无关，而

$dw/dz = f'(z)$ 仍是一个复变函数，它可表示为

$$f'(z) = R(z)e^{j\phi(z)} = Re^{j\phi}$$

或写为

$$dw = Re^{j\phi}dz$$

就是说，dw 的模是 dz 模的 R 倍，dw 的辐角是 dz 的辐角(Arg dz)加上 ϕ 角(图 5.3.4)。所以，在 W 平面上 $f(z)$ 为解析的区域内，任意一点 w 附近的无限小区域应该与 Z 平面上对应点 z 附近的无限小区域相似，只不过它被放大 R 倍，并转动 ϕ 角(见图 5.3.4 中的无限小正方形)。于是我们看出，如果在 Z 平面内有两条曲线相交于 z 点，其交角为某一给定角度，这两条曲线映射到 W 平面以后相交于映像点 w，并且其交角仍为原来的给定角度，因为 W 平面内的这两条映像曲线都转动了 ϕ 角，其夹角保持不变。所以满足前述二条件的 $w = f(z)$ 构成的映射是保角映射。

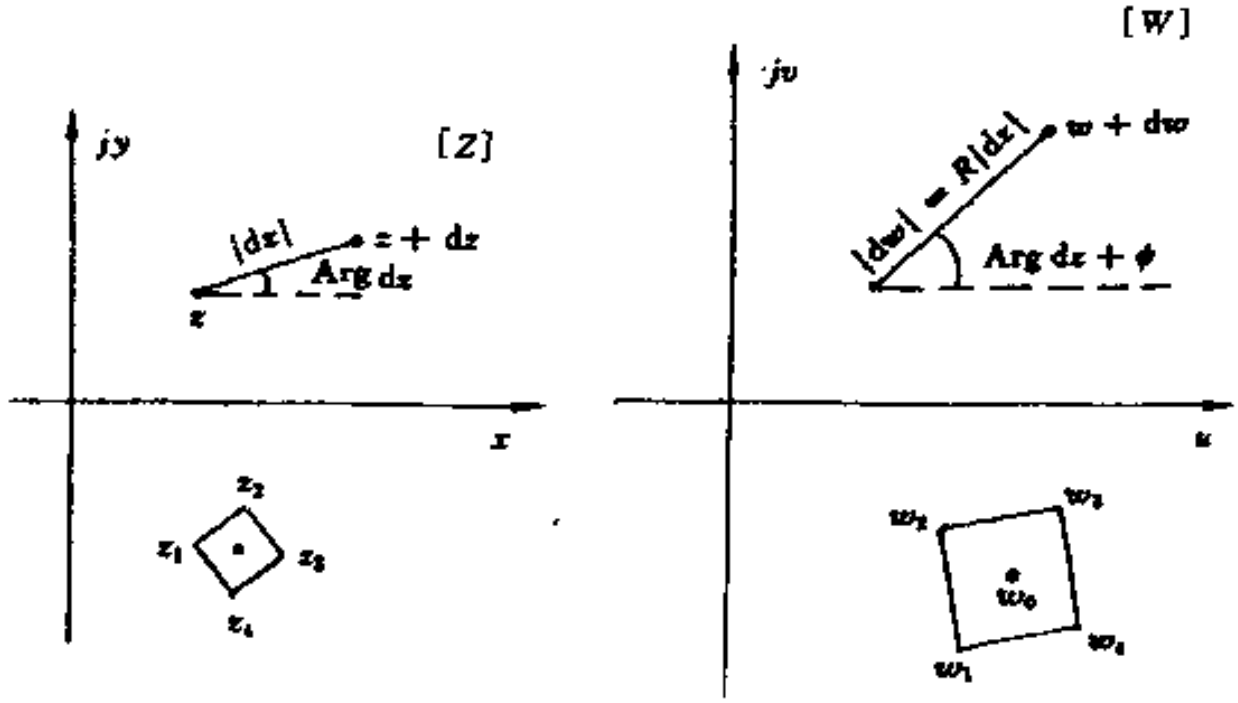


图 5.3.4　无限小线段和无限小正方形的保角映射

我们注意到，上面是对无限小区域进行讨论的。Z 平面上围绕 z_0 点的无限小正方形在 W 平面上的映像也是无限小正方形(故

亦称共形映射)。如围绕 z_0 点的正方形每边长不是无限小,那么它在 W 平面的映像就不一定恰好是正方形。因为除线性变换 $w = az + b$ 外,一般来说,$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = f'(z)$ 的模 $R(z)$ 和辐角 $\phi(z)$ 的数值并非常数,而是随 z 值而变的。但是就每一点来说保角性是不变的。

在信息传输问题中,传输函数 $H(s)$ 作为复变数 s 的函数,若构成一个保角变换,也需满足前述二条件。若在 S 平面上某点 s_0 有

$$\left|\frac{\mathrm{d}H(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_0} = \infty \quad 或 \quad \left|\frac{\mathrm{d}H(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_0} = 0$$

那么在这 s_0 点就不具有保角性。就是说,在 $\mathrm{d}H(s)/\mathrm{d}s$ 的零点和极点处不具有保角性。例如,对于 LC 并联谐振回路,表示并联导纳的传输函数是(参见表 3.2)

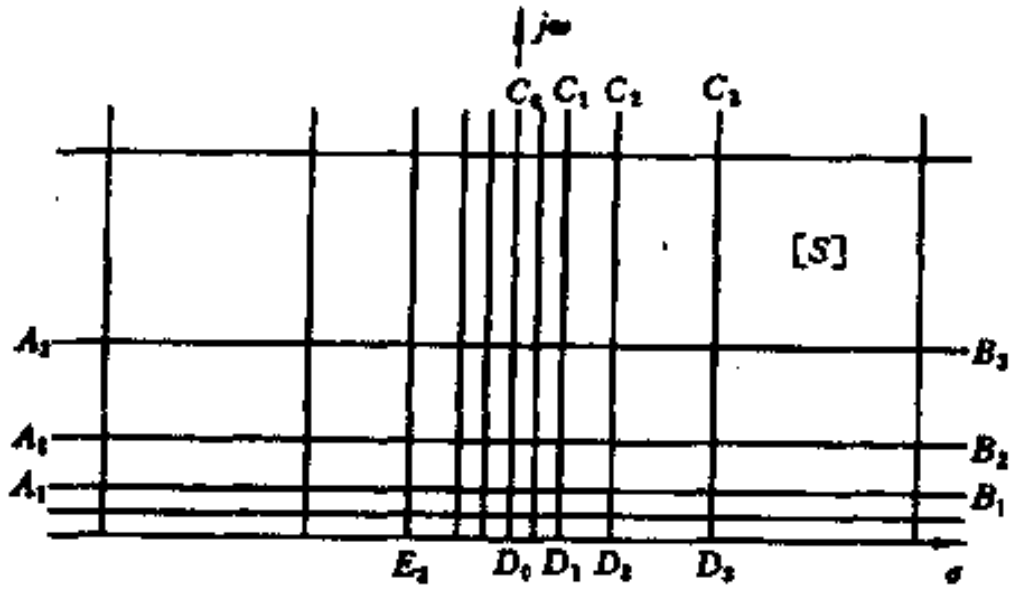
$$H(s) = Cs + \frac{1}{Ls},$$

其导数为

$$\frac{\mathrm{d}H(s)}{\mathrm{d}s} = C - \frac{1}{Ls^2}$$

所以,$\mathrm{d}H(s)/\mathrm{d}s$ 的零点在 $s = \pm (LC)^{-1/2} = \pm\ \omega_0$(谐振频率),表示在图 5.3.5 中 S 平面上的 E_2 点和 D_2 点,它们在 H 平面的映像点分别是 E'_2 点和 D'_2 点:S 平面中的等 σ 值线 C_0D_0、C_1D_1、C_2D_2、C_3D_3、… 和等 ω 值线 A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3、… 在 H 平面中的映像分别是 $C_0'D_0'$、$C_1'D_1'$、$C_2'D_2'$、$C_3'D_3'$… 以及 $A_1'B_1'$、$A_2'B_2'$、$A_3'B_3'$…。我们看到,尽管映像曲线的形状与原来不同了,但是各点仍具有保角性。两族曲线的交角保持 90°(正交性),唯独 $\mathrm{d}H(s)/\mathrm{d}s$ 的零点 E_2 和 D_2 的映像点 E_2' 和 D_2' 失去了保角性,两族曲线在那里发生了"畸变"。

最后,应该指出,这里对保角映射的讨论是不严格的。例如,为什么一个点的映像是一个点,一条连续曲线的映像仍是一条连



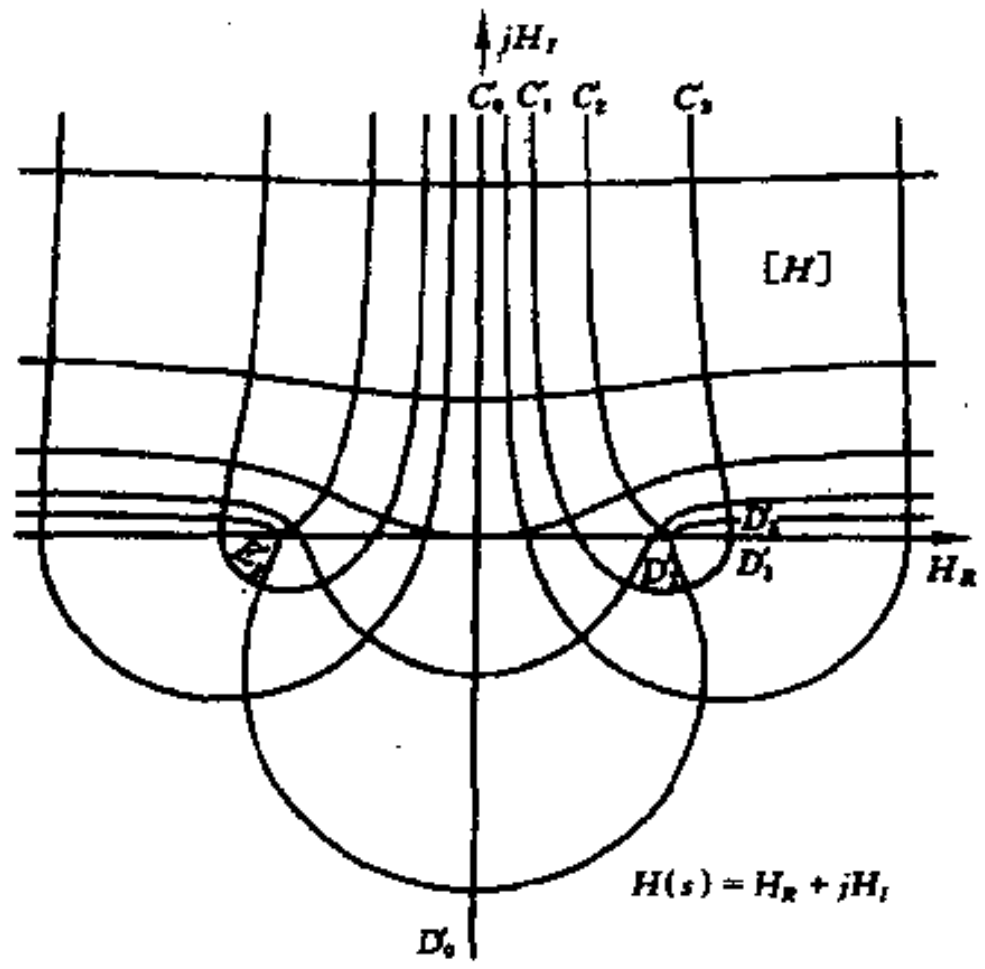


图 5.3.5　保角映射的例子(并联 LC 回路)

续曲线,等等,都是需要严格证明的。这里也没有涉及多值问题(黎曼曲面)、边界对应问题等。对这些问题有兴趣的读者可以参考有

关纯数学书籍。下面介绍在电路分析中有用的分式线性映射。

5.3.2 分式线性映射

分式线性映射是由复变函数

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0) \tag{5.3.1}$$

确定的映射关系。上式中若 $ad - bc = 0$, 则 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, 于是 $w =$ 常数, 不符合保角映射的条件(2)。要求 $c \neq 0$ 是为保证上式取分式形式。分式线性映射亦称双线性映射, 因为(5.3.1) 式的分子和分母都是线性函数。这种映射关系可以看作是下述最基本的映射关系的总和。

1.平移

坐标平移映射由

$$w = z + k \tag{5.3.2}$$

确定(图 5.3.6), 其中 $k = a + jb$ 为复常数, 图中旧原点 $z = 0$ 被平移到 $w = a + jb$ 点, W 平面中的 C_1' 和 D_1' 是 Z 平面中 C_1 和 D_1 的映像, 显然通过平移变换, 圆和直线的映像仍是圆和直线。

2.反演

由 $$w = \frac{1}{z} \tag{5.3.3}$$

确定的映射关系称为反演映射。设 $z = Re^{j\theta}$, 则 $w = \frac{1}{R}e^{-j\theta}$, 参照图 5.3.7 可以看出, Z 平面上的圆 C_i 在 W 平面的映像仍是一个圆 C_i', 但 C_i 的内部映射到 C_i' 的外部, C_i 的外部映射到 C_i' 的内部。还可看出, Z 平面的原点在 W 平面的映像是无限远处的想象边界 $\mathscr{L}'$, 而 Z 平面的想象边界 d 在 W 平面的映像是原点 $w = 0$; Z 平面的直线 D_1(包括 $z = \infty$ 点) 在 W 平面的映像是过原点 $w = 0$ 的圆。这个论断需要说明一下, 比如设 D_1 直线代表 $x = 1$ 或 $z =$

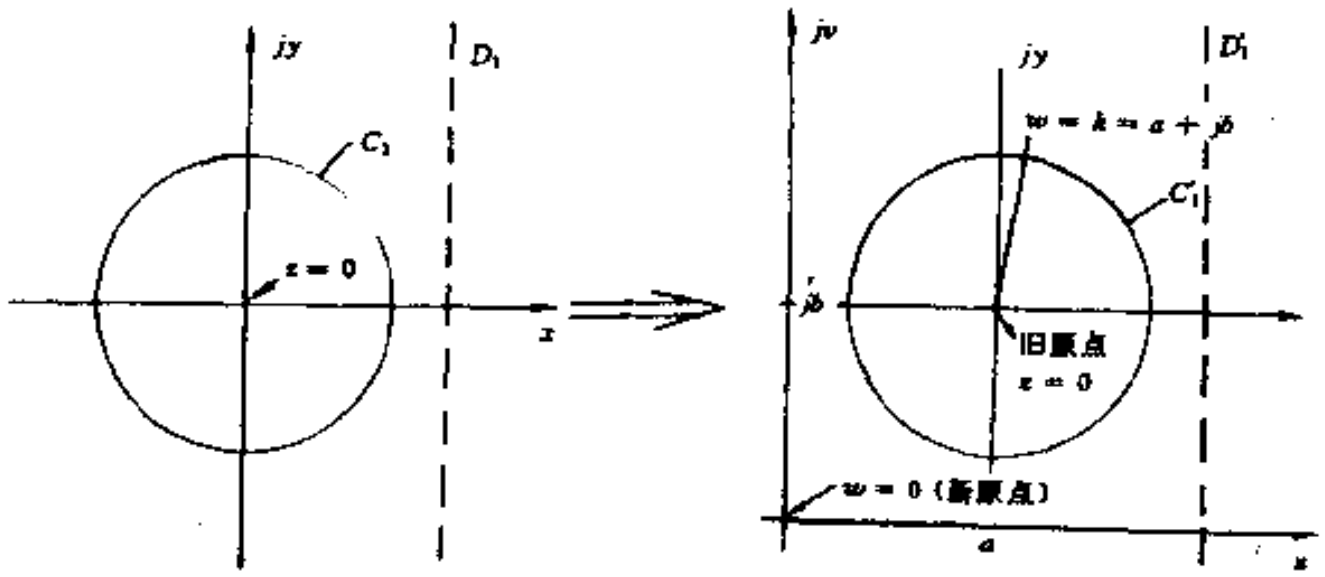
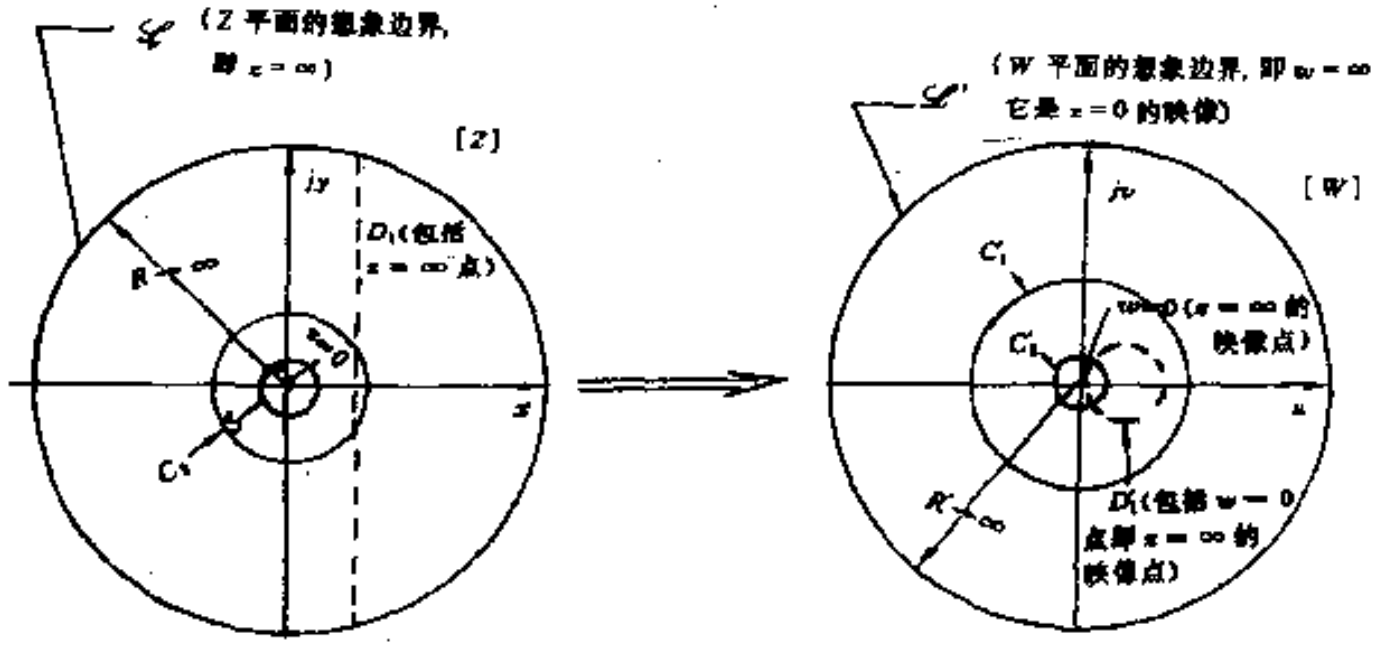


图 5.3.6　平移映射



对应关系：[原点 $z = 0$] $\longleftrightarrow$ [无限远点 $w = \infty$]

[无限远点 $z = \infty$] $\longleftrightarrow$ [原点 $w = 0$]

[半径为 R_i 的圆 C_i] $\overset{i = 1,2}{\longleftrightarrow}$ [半径为 $1/R_i$ 的圆 C_i']

[圆 C_i 的内部(外部)] $\overset{i = 1,2}{\longleftrightarrow}$ [圆 C_i' 的外部(内部)]

[直线 D_1(包括 $z = \infty$ 点)] $\longleftrightarrow$ [圆 D_1'(包括 $w = 0$ 点)]

图 5.3.7　反演映射的说明

$1 + jy$，于是有

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + jy} = \frac{1}{1 + y^2} - j\frac{y}{1 + y^2} = u + jv,$$

解实部方程和虚部方程可得

$$u^2 - u + v^2 = 0 \text{ 或 } (u - 0.5)^2 + v^2 = (0.5)^2,$$

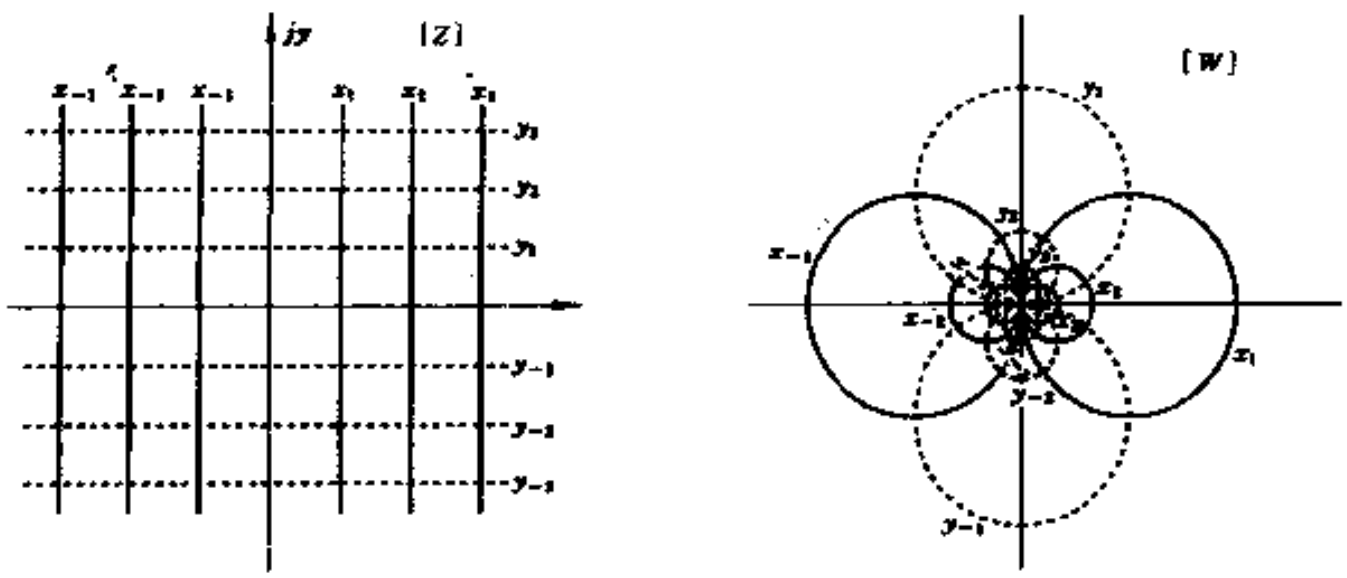


图 5.3.8　反演映射的保角性(正交性)

这就是圆 D_1' 的方程，其圆心在(0.5,0)，半径为 0.5。最后，我们注意到，反演映射具有保角性，从图 5.3.8 可以看出，Z 平面的正交直线映射到 W 平面的圆仍然保持正交性。

3. 旋转和伸缩

这是指由

$$w = kz \tag{5.3.4}$$

确定的映射关系，其中 k 为复常数：$k = re^{j\phi}$。显然 Z 平面上的任意一点 $z = Re^{j\theta}$ 在 W 平面的映像点就是 $w = rRe^{j(\theta+\phi)}$(如图 5.3.9 所示)。所以这个映射关系包括：(1) 将 Z 平面逆时针旋转 ϕ 角；(2) 将模乘以因子 r，$r > 1$ 表示均匀伸长，$\gamma < 1$ 表示均匀缩短。图 5.3.9 是按 $k = re^{j\phi} = \frac{1}{2}e^{j30^\circ}$ 画出的。这个映射关系显然使圆映射为圆，直线映射为直线，故亦称相似变换。

4.**线性映射**

线性映射可以看作分式线性映射的特殊情况，在(5.3.1)式中令 $c = 0$ 和 $d = 1$ 就得到线性映射：

$$w = az + b \tag{5.3.5}$$

它实际上是由两个基本映射关系构成：(1) 旋转和伸缩：$w' = az$，(2) 平移：$w = w' + b$。所以，线性映射的性质也是使圆和直线分别映射成圆和直线，它具有保角性，这从 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = a \neq 0$ 也可看出。

若已知 Z 平面上任意两点 z_1 和 z_2，以及它们经过线性映射后在 W 平面的两个映像点 w_1 和 w_2，那么这个线性映射关系就可完全确定。因为把已知的 z_1、z_2 和 w_1、w_2 代入(5.3.5)式，可得两个方程：

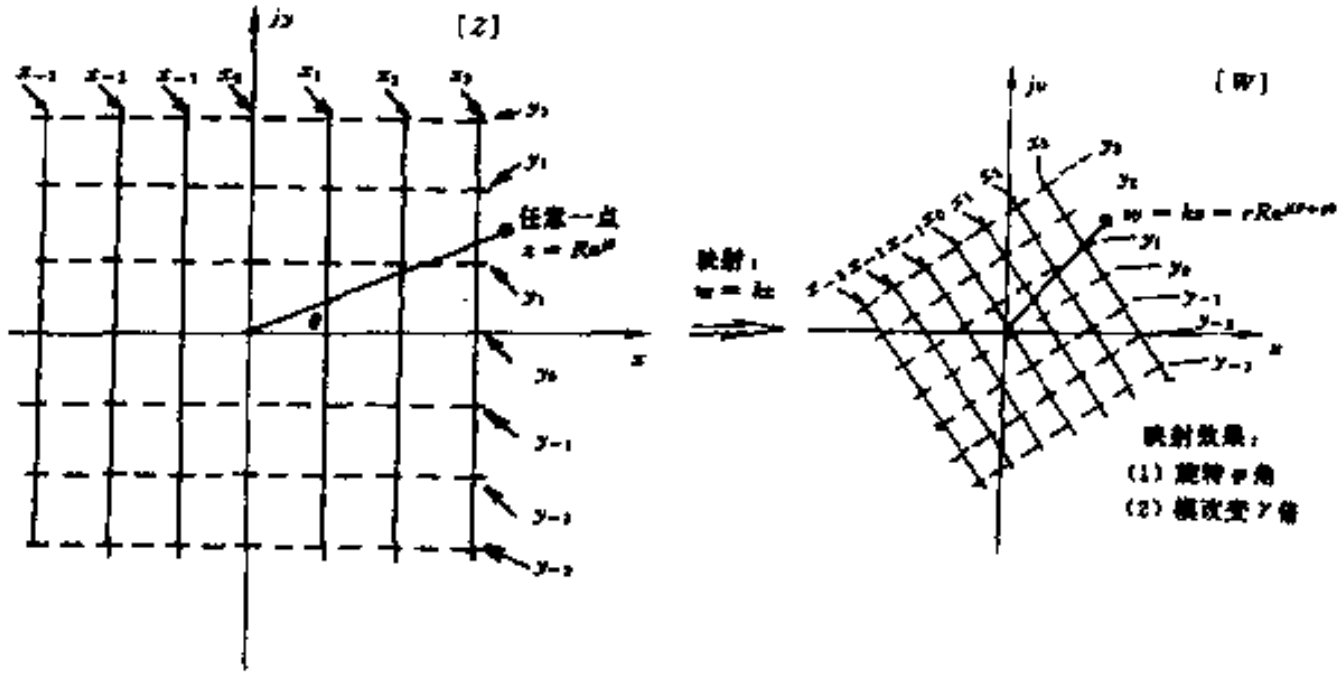


图 5.3.9　旋转和伸缩

$$\begin{cases} z_1 a + b = w_1 \\ z_2 a + b = w_2 \end{cases} \tag{5.3.6}$$

其中 a 和 b 是待求的未知数，解上述方程求出 a、b 就可完全确定线性映射关系 $w = az + b$。

例 5.3.1　已知：$z_1 = 1, z_2 = 1 + j$，其映像点为 $w_1 = -j$，$w_2 = -1$，试求其线性映射关系式。

解　将已知数代入(5.3.6)式可得

$$\begin{cases} a + b = -j \\ (1 + j) \cdot a + b = -1 \end{cases}$$

解出 $a = 1 + j, b = -1 - j2$，故线性映射关系式为

$$w = (1 + j)z - (1 + j2)$$

5. 分式线性映射

把几个基本映射关系结合起来就可以得到(5.3.1)式的分式线性映射：

(1) 平移 $z' = z + k_1$，取 $k_1 = d/c$，有

$$z' = z + k_1 = z + d/c \tag{5.3.7a}$$

(2) 反演 $z'' = 1/z'$，由(5.3.7a)式有

$$z'' = \frac{1}{z'} = \frac{1}{z + d/c} = \frac{c}{cz + d} \tag{5.3.7b}$$

(3) 旋转和伸缩 $w' = k_2 z''$，取 $k_2 = (bc - ad)/c^2$ 且 $ad - bc \neq 0$，利用(5.3.7b)式有

$$w' = k_2 z'' = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{c}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} \tag{5.3.7c}$$

(4) 再平移 $w = w' + k_3$，取 $k_3 = \frac{a}{c}$ 且 $c \neq 0$，由(5.3.7c)式有

$$w = \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{bc - ad}{cz + d} + \frac{acz + ad}{cz + d}\right)$$

$$= \frac{az + b}{cz + d}, c \neq 0, ad - bc \neq 0, \tag{5.3.7d}$$

这最后结果与(5.3.1)式完全一样。分式线性映射的性质也必然取决于上述几个基本映射的性质，常用到的分式线性映射的性质如下：

性质1:在 Z 平面上以 $z=-d/c$ 为圆心的圆,经过分式线性映射(5.3.1)式以后,在 W 平面上的映像是以 $w=a/c$ 为圆心的圆。

这是由分式线性映射中包含反演映射所决定的。由(5.3.7a)式可以看出,Z' 平面的原点 $z'=0$ 对应于 Z 平面的 $z=-d/c$ 点;Z' 平面上以原点 $z'=0$ 为中心的圆,经反演变换 $z''=1/z'$ 后,映射成 Z'' 平面上以原点 $z''=0$ 为中心的圆;又由(5.3.7c)和(5.3.7d)式可以看出,Z'' 平面的原点在 W 平面的映像点是 $w=a/c$。所以,Z 平面上以 $z=-d/c$ 为圆心的圆在 W 平面的映像是圆心为 $w=a/c$ 的圆。

性质2:在 Z 平面上经过点 $z=-d/c$ 的任何圆,经过分式线性映射(5.3.1)式以后,在 W 平面上的映像为直线,而 Z 平面上任何直线在 W 平面的映像是经过点 $w=a/c$ 的圆。

这个性质由(5.3.1)式所包含的四个基本映射关系的性质亦可说明,我们在此不详细叙述了,仅指出,作为(5.3.1)式的特殊情况($a=0,b=1,c=1,d=0$)考虑一下图5.3.7和图5.3.8给出的反演映射,即可明了性质2。

性质3:若已知任意三点 z_1,z_2,z_3 以及它们在 W 平面的映像点 w_1,w_2,w_3,则分式线性映射(5.3.1)式即可唯一地确定。

分式线性映射(5.3.1)式中包含四个参数 a,b,c,d,若 $c\neq 0$,可改写成

$$w=\frac{(a/c)z+b/c}{z+d/c}=\frac{Az+B}{z+D},\quad AD-B\neq 0$$

可见,它仅包含三个基本参数 A、B 和 D。把已知的 z_1、z_2、z_3 和 w_1,w_2,w_3 代入上式可以得到三个方程:

$$z_iA+B+Dw_i=w_iz_i,\quad (i=1,2,3)\qquad (5.3.8)$$

解出 A、B、D 即可完全确定这个分式线性映射关系。

例 5.3.2　已知 $z_1=0,z_2=2,z_3=3$ 和 $w_1=2,w_2=0,$

$w_3 = 1$,求映射关系式。

解　将已知数代入(5.3.8)式,解方程得 $A = 3/2, B = -3, D = -3/2$,故分式线性映射关系式为

$$w = \frac{Az + B}{z + D} = \frac{3z - 6}{2z - 3}$$

下面介绍一个简单而重要的分式线性映射。在(5.3.1)式中,令 $a = 1, b = -1, c = 1, d = 1$ 得

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{5.3.9}$$

由刚才讨论的分式线性映射的性质容易看出:(1)Z 平面中的三点 z_1、z_2、z_3 所决定的直线经(5.3.9)式的映射后,在 W 平面的映像是经过点 w_1, w_2, w_3 的单位圆,如图 5.3.10 所示。z_1, z_2, z_3 和 w_1, w_2, w_3 的数值均标于图中。(2)Z 平面上这条直线右侧的任何点(如图中的 $z_0 = 1$ 点)映射成单位圆内部的点(如图中 $w_0 = 0$ 点)。所以,(5.3.9)式的映射确定了图 5.3.10 中两个画斜线的区域(包括边界)之间的对应。

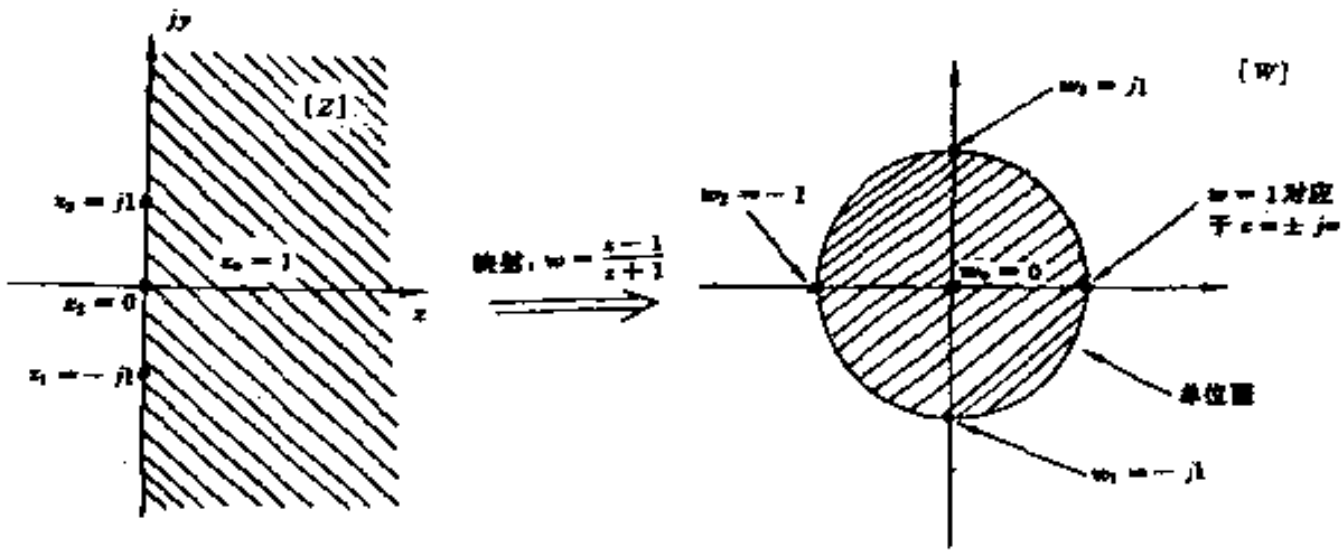


图 5.3.10　映射 $w = (z - 1)/(z + 1)$

5.3.3 阻抗圆图

1.传输线的基本性质

为了解阻抗圆图,我们先简单介绍一下传输线的基本知识。当信号频率较高时(如几百兆赫),要使用平行双线、同轴线等特制的传输线来传送电信号。在信号波长较短而传输线的长度相对地较长(称"长线")的情况下,某一时刻线上各点电压(或电流)的位相差别可以很大,甚至可以沿线分布着若干个波长。这时,电压(或电流)既随时间变化又随距离变化,符合波动规律,称为电压波(或电流波)。在传输线为无限长的理想情况下(或终端匹配情况下),只有向一个方向传输的波(行波)。于是某一时刻线上电压、电流的分布可表示为

$$V = Ae^{-j\beta l},\ I = A'e^{-j\beta l}$$

其中 $\beta = 2\pi/\lambda$ 为相移常数,l 为距终端的距离,A、A' 为电压、电流的最大值(常数)。上述电压与电流之比称为该传输线的特性阻抗 Z_0:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{Ae^{-j\beta l}}{A'e^{-j\beta l}} = \frac{A}{A'} = \text{常数(单位为欧姆)}$$

若终端接任意负载 Z_L(图 5.3.11),就可能既有入射波(行波)又有反射波:

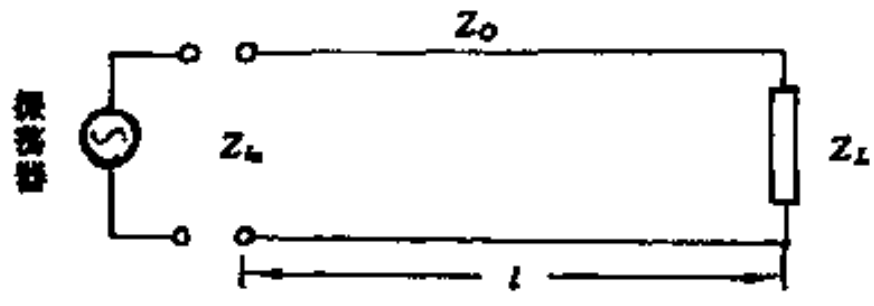


图 5.3.11 传输线

$$V = Ae^{-j\beta l} + Be^{j\beta l}$$

$$I = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-j\beta l} - Be^{j\beta l})$$

这时线上距终端 l 处的输入阻抗为

$$\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{V}{I} \\ &= Z_0 \frac{Ae^{-j\beta l} + Be^{j\beta l}}{Ae^{-j\beta l} - Be^{j\beta l}} \\ &= Z_0 \left[\frac{1 + \dfrac{Be^{j\beta l}}{Ae^{-j\beta l}}}{1 - \dfrac{Be^{j\beta l}}{Ae^{-j\beta l}}} \right] \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

通常引入电压反射系数 Γ 描写反射的强弱，它是沿线各点电压反射波与电压入射波之比：

$$\Gamma = \frac{Be^{j\beta l}}{Ae^{-j\beta l}} = \frac{B}{A}e^{j2\beta l} = \Gamma(0)e^{j2\beta l} \tag{5.3.11}$$

其中 $\Gamma(0) = B/A$ 是 $l = 0$(终端处) 的 Γ 值。把(5.3.11) 式代入(5.3.10) 式有

$$Z = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \text{ 或 } \Gamma = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \tag{5.3.12}$$

若令 $Z = Z_{in}/Z_0$(称为归一化阻抗，无量纲)，上式也可表示成

$$\Gamma = \frac{Z - 1}{Z + 1} \tag{5.3.13}$$

此外，由于有入射波，有反射波，线上就一定有驻波存在(不是纯驻波)。通常引入(电压) 驻波比 S 来描述驻波的大小，它是最大电压值和最小电压值之比。

$$S = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \frac{|A| + |B|}{|A| - |B|} = \frac{1 + \left|\dfrac{B}{A}\right|}{1 - \left|\dfrac{B}{A}\right|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{5.3.14}$$

可见，(电压) 驻波比 S 的大小决定于反射系数 Γ 的绝对值。

(5.3.10) 式至(5.3.14) 式是传输线理论中的重要公式。利用这些公式，可以由输入阻抗或负载阻抗(它是 $l = 0$ 时的输入阻抗) 求反射系数 Γ，或反过来由实验上测出 Γ(实际是测驻波比 S) 求输入阻抗或负载阻抗，还可进行许多其他计算。

2.阻抗圆图的结构

由上面几个公式可看出，Z 和 Γ 都是复数，又都是距离 l 的函数，利用公式进行计算是非常麻烦的。工程上在满足一定精度要求下多采用图解法。这就要考虑怎样建立一个最方便的图，在图上既能表示 Z，又能表示 Γ 以及它们之间的关系。我们知道，复阻抗 Z 的实部表示电阻 R(归一化)，虚部表示电抗 X(归一化)，而反射系数 Γ 也可分为实部 U 和虚部 V，故有

$$Z = R + jX, \Gamma = U + jV, \tag{5.3.15}$$

我们可以把阻抗 Z 表示在直角坐标系中，如图 5.3.12(a) 所示，

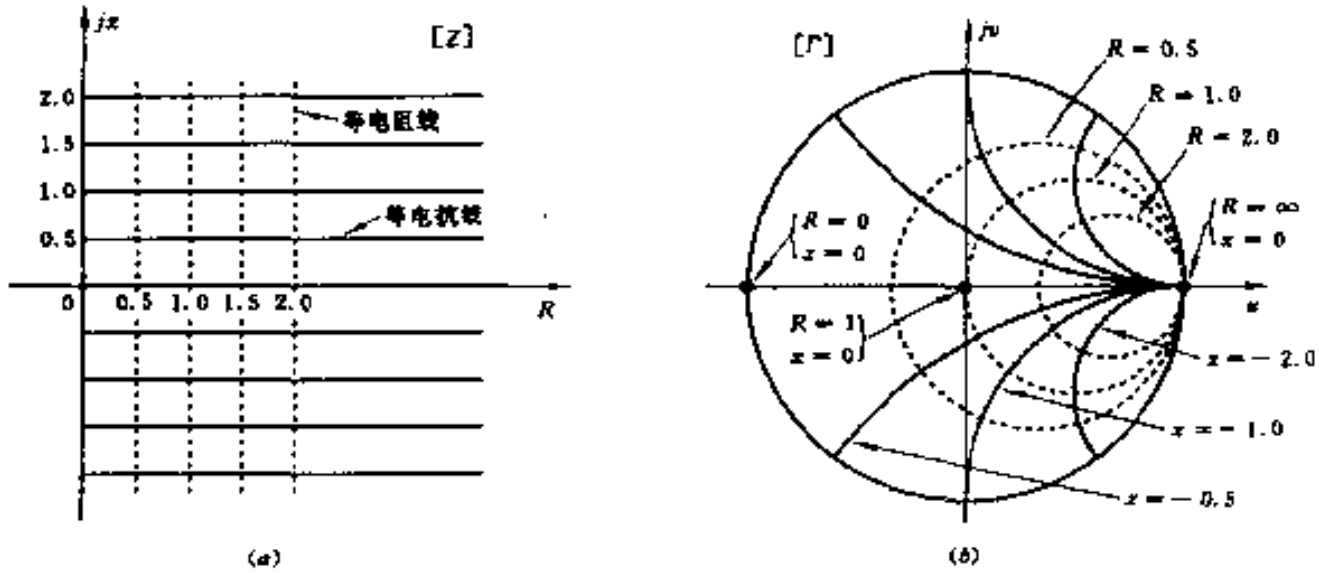


图 5.3.12　利用保角映射建立阻抗圆图

其中虚线表示等电阻线，实线表示等电抗线。对于变化范围很大的阻抗值，这张图就需要画得很大，十分不便。怎么办?保角映射方法给我们提供了另一途径。比较(5.3.13) 式与(5.3.9) 式，发现其形式全同，故 Z 变换到 Γ 可视为一个分式线性映射。所以，我们毫不

迟疑地把图 5.3.12(a) 中 Z 平面的右半平面(不考虑负电阻) 映射到图 5.3.12(b) 中 Γ 平面上的单位圆内部,这样即可在一张有限大小的圆图上同时表示阻抗 Z 和反射系数 Γ(实际上还有驻波比 S),这张图称为阻抗圆图。

由(5.3.13)式的映射关系容易确定,图 5.3.12 中 Z 平面上的 $(R=0, x=0)$ 点在 Γ 平面上的映像点是 $\Gamma=-1$;$(1,0)$ 点的映像是 $\Gamma=0$;$(\infty,0)$ 点的映像是 $\Gamma=+1$;这三点确定了 Γ 平面上的一段实轴,它是 Z 平面正实轴的映像。而 Z 平面中虚轴上的(0, 1), (0,0), (0, −1) 三个点映射成 Γ 平面中单位圆周上的 $\Gamma=j1$, $\Gamma=-1$, $\Gamma=-j1$ 三个点。与 Z 平面虚轴平行的等电阻线映射成经过 $\Gamma=+1$ 点(性质 2) 的圆,并且这些圆与虚轴交成直角(保角性);同样地,Z 平面上的每条等电抗线也必须映射成经过 $\Gamma=+1$ 点(性质 2) 的一些圆,它们和等电阻圆交成直角(保角性)。为准确画出这些等电阻圆和等电抗圆,必须找出它们的圆心坐标和圆半径的一般表示式。这用简单的代数方法即可求出。将(5.3.15) 式代入(5.3.13) 式并分离实部和虚部可得:

$$U=\frac{R^2-1+X^2}{(R+1)^2+X^2},\qquad V=\frac{2X}{(R+1)^2+X^2}$$

由以上二式消去 X 可得下面第一个方程,消去 R 得第二个方程。

$$\left(U-\frac{R}{1+R}\right)^2+V^2=\left(\frac{1}{1+R}\right)^2,$$

$$(U-1)^2+\left(V-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$$

这两个方程显然都是圆方程,第一个方程表示在 $U-V$ 坐标系里,圆心为 $\left(\frac{R}{1+R},0\right)$、半径为 $\frac{1}{1+R}$ 的圆。给定一个具体的 R 值,就可以得出一个等电阻圆。上面第二个方程表示圆心为 $\left(1,\frac{1}{x}\right)$、半径为 $\frac{1}{x}$ 的圆,给定 x 的一个具体数值(或正或负,正代表感抗,负代

表容抗),就得出一个等电抗圆。

图 5.3.12(b) 是阻抗圆图的示意图。图 5.3.13 是供工程计算用的具有一定精度的阻抗圆图。关于这个圆图的使用还需做几点说明:

(1) 圆图中是用极坐标表示反射系数:$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$, $|\Gamma| =$ 常数的轨迹是一些以原点为中心的同心圆,为避免混乱,一般不画出这些同心圆,另用一个透明活动标尺,其中点钉在圆图中心,可以转动,尺上刻以 $|\Gamma| = 0.1, 0.2, \cdots, 1.0$ 的刻度。而反射系数角 θ 则刻在外圆周上。

(2) 因为一定的 $|\Gamma|$ 对应一定的驻波比 S[由(5.3.14) 式],所以,等反射系数圆也就是相应的等驻波比圆,其数值可从实轴上标有 $1.0, 1.2, 1.4, \cdots, 2, 3, 4, \cdots, 10, 20, 50$ 的一段读出。

(3) 因为 $\beta = 2\pi/\lambda$ 表示单位长度的相移,长度为 l 包含的相移为 $\beta l = 2\pi \dfrac{l}{\lambda}$,实际上用波长数 l/λ 表示相移更方便,在圆图最外圈标明有"至振荡器的波长数"和"至负载的波长数",它们是以 $z = 0$ 点为起点的。

(4) 阻抗圆图也可以表示导纳,因为导纳 $y = 1/z$,代入 (5.3.13) 式得

$$-\Gamma = \frac{y-1}{y+1}$$

可见 y 与 Γ 的关系类似于 z 与 Γ 的关系,仅差一负号。这说明在圆图上将 z 点(对应 Γ) 沿等 Γ 圆旋转 180° 所得到的一点就是 y(对应 $-\Gamma$)。

圆图的应用是丰富多采的,如计算负载阻抗(导纳),计算输入阻抗,研究不连续性的影响,研究匹配问题等等。它同样适用于微波传输线。下面仅举几个简单例子。

例 5.3.3　有一同轴线,它的特性阻抗 $Z_0 = 50$ 欧姆,终端的电压反射系数 $\Gamma(0) = 0.5\angle 45°$,求终端阻抗 Z_L 以及离终端的电

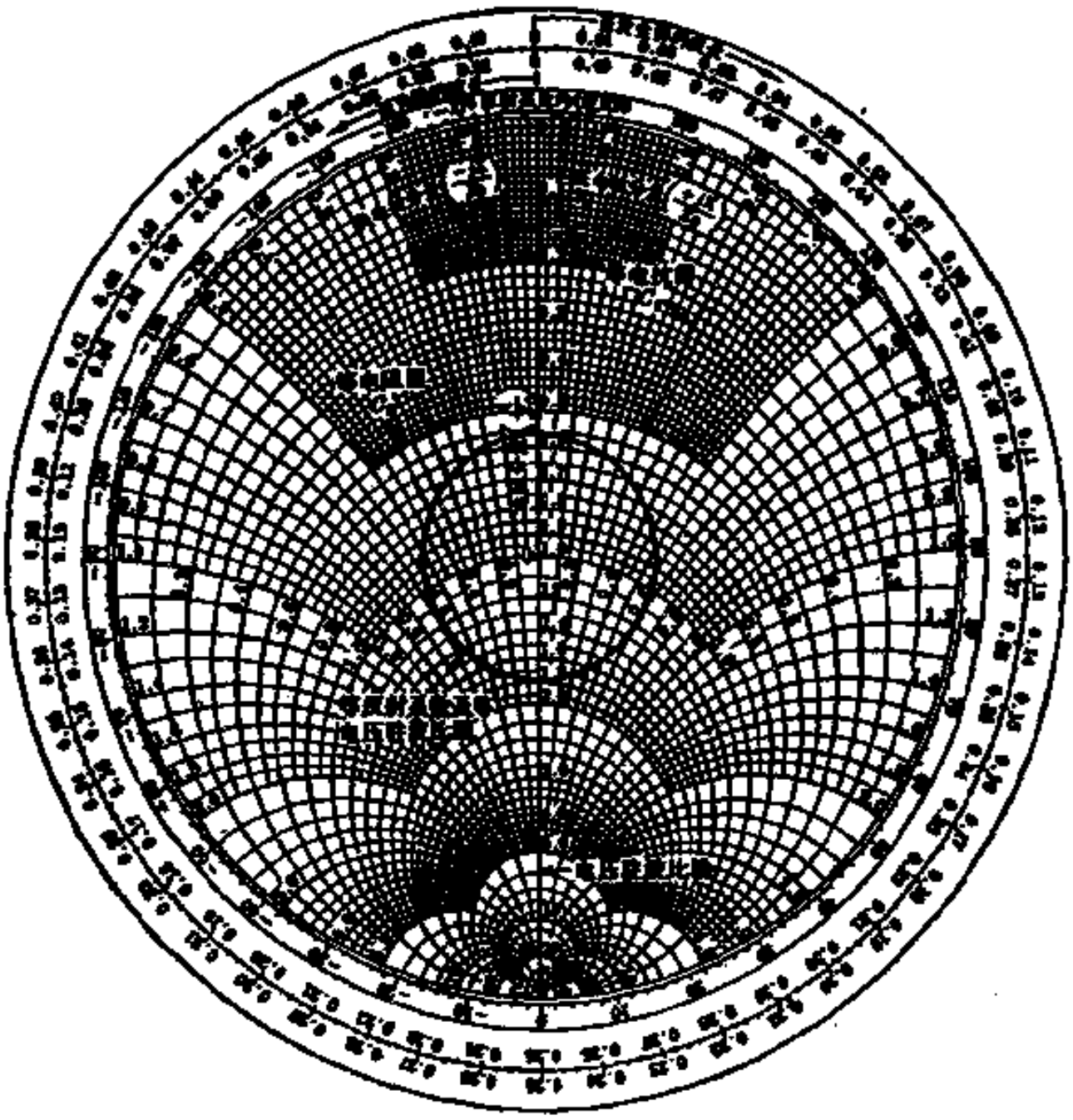


图 5.3.13

角度为 22.5° 处的输入阻抗。

解 在圆图上找到 $\Gamma(0) = 0.5\angle 45°$ 的一点，该点的 $R = 1.3$，$X = 1.3$，所以终端负载阻抗是

$$Z_L = 50 \times (1.3 + j1.3) = 65 + j65(\text{欧姆})$$

然后从该点起，用半径 $|\Gamma(0)| = 0.5$ 把标尺顺时针旋转 $2\beta l$ 为 $2 \times 22.5° = 45°$，即得 $R = 3$，$X = 0$，故该点的输入阻抗为

$$Z_{in} = 50 \times (3 + j0) = 150(\text{欧姆})$$

这一点不呈现电抗分量,故知该点电压与电流同相。

例 5.3.4　设 $Z_0 = 50$ 欧姆的同轴线终端短路,即 $Z_L = 0$,求距终端的 $\lambda/8, \lambda/4, 3\lambda/8, \lambda/2$ 各点的输入阻抗。

解　自 $R = 0, X = 0$ 点起,沿"至振荡器波长数"方向找到 $1/8 = 0.125, 1/4 = 0.25, 3/8 = 0.375, 1/2 = 0.5$ 各点即可直读下列数值:

①$R = 0, X = 1$($\lambda/8$ 点),故 $Z_{in} = 50(0 - j1) = +j50$(欧姆)(呈感抗);

②$R = \infty, X = \infty$($\lambda/4$ 点),故 $Z_{in} = \infty$(相当于开路);

③$R = 0, X = -1$($3\lambda/8$ 点),故 $Z_{in} = 50(0 - j1) = -j50$(欧姆)(呈容抗)

④$R = 0, X = 0$($\lambda/2$ 点),故 $Z_{in} = 0$(相当于短路)。

例 5.3.5　某传输线的特性阻抗为 $Z_0 = 500$ 欧姆,距负载为 0.1 波长处是电压最小点,测量得负载的电压驻波比为 $S = 2.5$,求终端负载阻抗 Z_L。

解　自 $R = 0, X = 0$ 点起,沿"至负载的波长数"方向找到 $l/\lambda = 0.1$ 点,自这一点向圆心做一直线,该直线与 $S = 2.5$ 的等驻波比圆的交点为 $R = 0.57, X = -0.57$,于是负载阻抗为:

$$Z_L = Z_0(R + jX)$$
$$= 500(0.57 - j0.57) = 285 - j285(\text{欧姆})$$

第六章　电子工程中的复变函数(Ⅱ)

§6.1　复变函数的积分

6.1.1　从实积分到复积分

复变函数积分的概念是由实变函数积分推广而来的。我们知道,定积分概念可以理解为曲边梯形的面积,例如在图 6.1.1 中用许多垂直于 x 轴的窄条形面积表示曲边梯形的近似面积,当窄条的数目无限增多而每一窄条都变得无限窄时,这面积的极限就是函数在 x_1 到 x_2 区间上的积分。任一窄条的面积等于其高乘宽,即 $f(x_k)(x_k - x_{k-1})$,于是定积分可表示为

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (6.1.1)$$

复变函数积分的意义也和上面实变函数积分类似。例如对复变函数 $f(z)$ 在复平面[Z]上从 A 点沿某条曲线到 B 点求积分,如图 6.1.2 所示,我们也可以把这曲线分成若干小段(不一定相等),并做出相应的求和式 $\sum f(z_k)(z_k - z_{k-1})$,当分点数目无限增多并彼此无限接近时,这求和式的极限就是 $f(z)$ 沿曲线由 A 点到 B 点的积分:①

① 这里没有讨论 $f(z)$ 的极限是否存在以及这极限是否与 z_k 的选择有关的问题,这些问题在纯数学的严格分析中是应该考虑的。

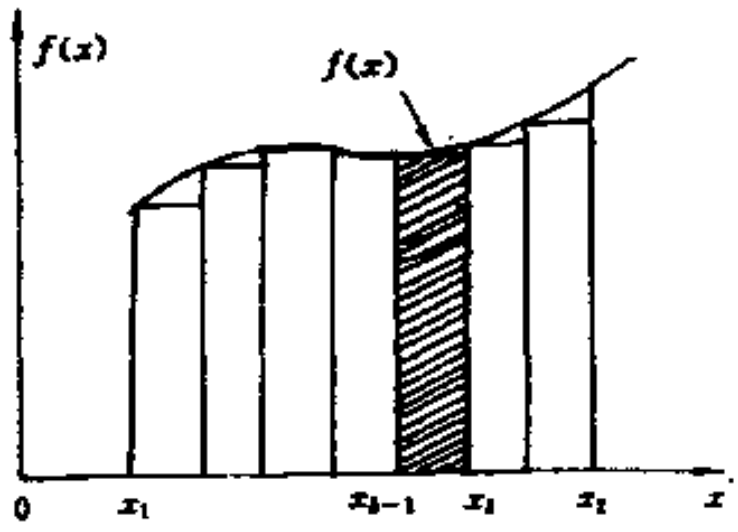


图 6.1.1　实变函数积分的几何意义

$$\int_A^B f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad (6.1.2)$$

比较(6.1.1)式和(6.1.2)式,我们看到,只是用复变数 z 和复变函数 $f(z)$ 代替了实变数 x 和实变函数 $f(x)$,它们在形式上完全相似。因此,实变函数积分的许多性质也都可以推广到复变函数的积分,例如:① 常数因子可移到积分号外;② 和之积分等于积分之和;③ 调转路径方向则积分变号;④ 全路径积分等于各段上积分之和,等等。

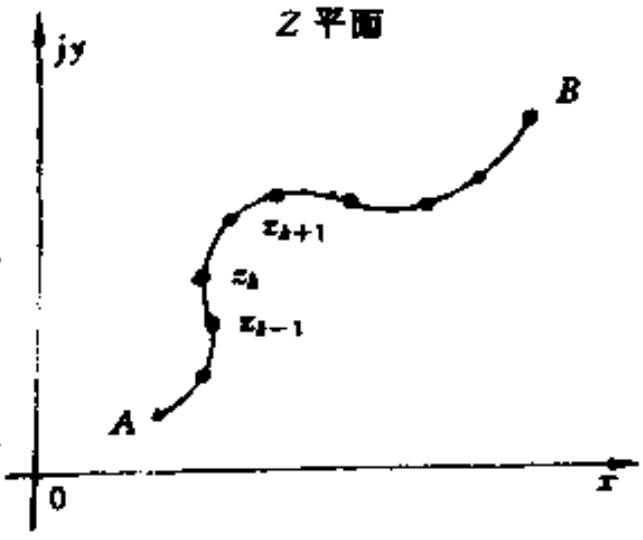


图 6.1.2　复变函数积分路径

读者马上会想到,在图 6.1.1 中表示实变函数积分只需二维坐标就够了,一个表示积分路径(例如沿 x 轴),一个表示 $f(x)$ 的值;而在图 6.1.2 的复平面[Z]上,表示积分路径就已需要二维坐标,要再表示 $|f(z)|$ 的值就需要第三维坐标(垂直于纸面)。我们再一细想,$|f(z)|$ 的几何图形实际上是一个空间曲面,若以

$x-y$ 平面比做海平面，那么 $|f(z)|$ 的图形一般地就类似于地球表面，有些部分高于海平面，有些部分低于海平面。图 6.1.3 画出了一个简单函数 $f(z)=1/z$ 的模的空间曲面图形（在极点 $z=0$ 处，曲面顶峰伸向无穷远处）。对于一般的函数 $f(z)$ 在三维坐标中画出这种模值图形将是不胜其烦的。若再考虑 $f(z)$ 的辐角就更麻烦了。但是在绝大多数场合下这样做是不必要的。这里只是为指出复变函数积分与实变函数积分在几何意义上的区别。其他重要区别在下面将陆续讨论到。

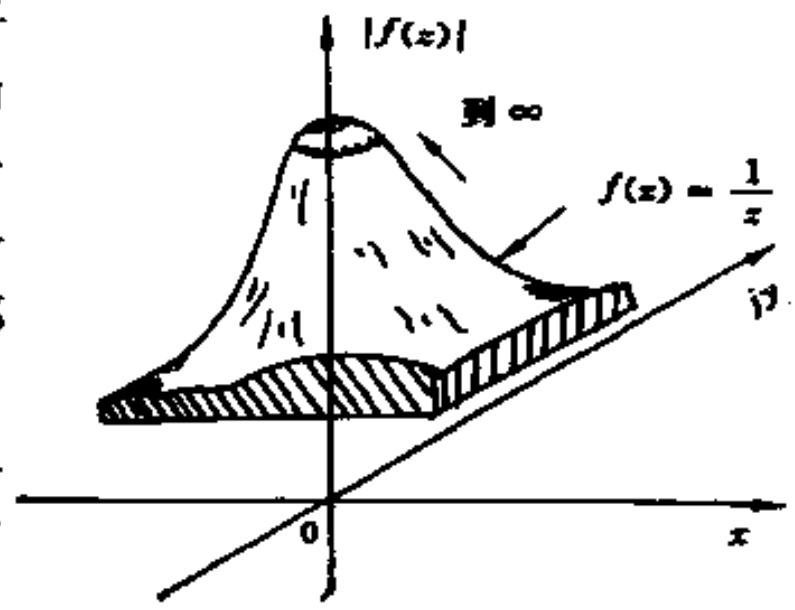


图 6.1.3 $f(z)=\frac{1}{z}$ 的几何图形

6.1.2 一个重要的不等式

首先讨论一个重要的不等式。

我们由(6.1.2)式定义的复变函数积分立即可以得到一个简单而有用的结论。因为，由(5.1.45)式，任意个复数之和的模总是小于或等于它们的模之和，故由(6.1.2)式有

$$|I_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(z_k)(z_k-z_{k-1})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(z_k)||z_k-z_{k-1}|,$$

如果用 M 表示 $f(z)$ 在积分路径上的最大值，将上式右端的 $|f(z_k)|$ 换为 M 就更保证了不等式的成立：

$$|I_n|\leqslant\sum_{k=1}^{n}M|z_k-z_{k-1}|=M\sum_{k=1}^{n}|z_k-z_{k-1}|=MLn,$$

当 $n\to\infty$ 时就有

$$\left|\int_A^B f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant ML \tag{6.1.3}$$

其中 L 是积分路径的长度。

这个简单的不等式能告诉我们一些什么呢？我们以 $f(z)=z^n$ 为例来讨论一下。设积分路径选为半圆，圆半径为 r，如图 6.1.4 所示，路径长度为 $L=\pi r$，r 可以取得很大或很小，对 $f(z)=z^n$ 的不同幂次我们分三种情况来讨论：

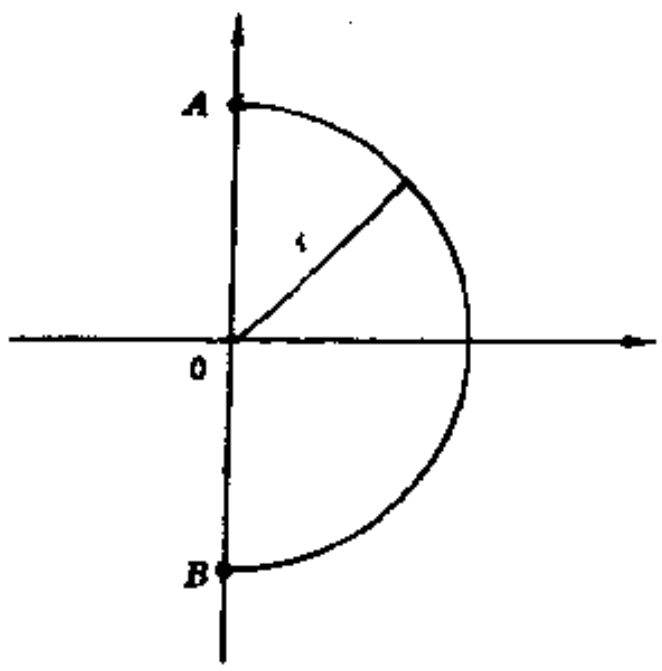


图 6.1.4

①$n \geqslant 0$，即 $f(z)$ 是按 z 的正幂次而变化。当 r 趋于无穷时，显然 M 和 L 都趋于无穷大，我们由不等式(6.1.3)了解不到什么关于 $f(z)$ 的积分结果。如果 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 趋于不为零的常数($n=0$ 的情况)，不等式(6.1.3)仍不能告诉我们积分是否有极限。

②$n \leqslant -2$，例如 $f(z)=z^{-2}$，则 M 必按 r^{-2} 而变化。从不等式(6.1.3)可以看出，当 $r\to\infty$ 时，尽管 $L\to\infty$，但积分必趋于零。对 $n<-2$ 的情况就更是这样了。

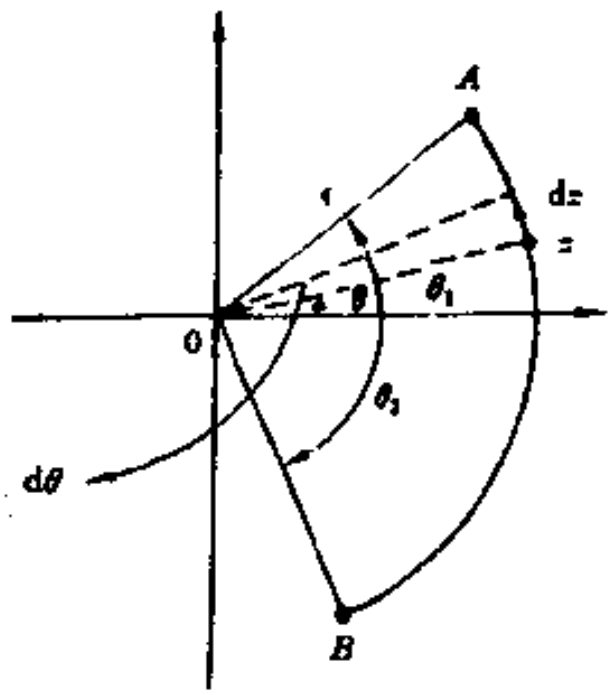


图 6.1.5

③$n=-1$，这是上述二种情况的中间情形，即 $f(z)=z^{-1}$。当 $r\to\infty$ 时，M 随 L 的增

长而以同样速率减小；当 $r\to 0$ 时，M 随 L 的变短而以同样速度增大，因此不论是 $r\to\infty$ 还是 $r\to 0$，M 和 L 的乘积都将是常数，即不等式(6.1.3) 给出了积分模值的上限。

不过这积分的准确值到底是多少呢?我们来计算一下。为计算 z^{-1} 的积分，我们用极坐标表示，即 $z = re^{j\theta}$，于是 $dz = jre^{j\theta}d\theta$。为不失普遍性，把积分路径由半圆改成一段圆弧，两个端点在 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_2$。这样由 θ_1 到 θ_2 的积分为

$$\int_A^B f(z)dz = \int_A^B \frac{dz}{z} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{jre^{j\theta}d\theta}{re^{j\theta}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} jd\theta = -j(\theta_1 - \theta_2) \tag{6.1.4}$$

如果上述积分沿相反方向进行(B 到 A)，则结果将改变符号。

若积分路径取为半圆，记为 $\oint$，则有

$$\oint \frac{dz}{z} = \begin{cases} \pi j(\text{逆时针方向}) \\ -\pi j(\text{顺时针方向}) \end{cases} \tag{6.1.5}$$

若积分路径是沿整个圆周，记为 $\oint$，则有

$$\oint \frac{dz}{z} = \begin{cases} 2\pi j(\text{逆时针方向}) \\ -2\pi j(\text{顺时针方向}) \end{cases} \tag{6.1.6}$$

(6.1.5) 和(6.1.6) 式是很重要的结果。今后我们会遇到形如

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^3} + \cdots$$

的函数沿着半径非常大的半圆上的积分。由对不等式(6.1.3) 的讨论可知，上述函数积分除第一项外其它项均可舍去(当 $r\to\infty$ 时)，而对第一项的积分计算就可利用(6.1.5) 式的结果。

我们再接下来讨论不等式(6.1.3) 没有给出的结论，即 $n \neq -1$ 时，z^n 的积分到底等于什么。我们来考虑 z^n 沿整个圆周的积分：

$$\oint z^n dz = \int_0^{2\pi} (r^n e^{jn\theta}) jre^{j\theta} d\theta$$

$$= jr^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)\theta + j\sin(n+1)\theta] d\theta$$

因为正弦和余弦函数在整个周期内的积分为零。所以，如果 n 为 (-1) 以外的正或负的整数，上述积分必定为零。如果 $n=-1$，则与(6.1.6)式结果一致。总起来有

$$\oint z^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 0, (\text{当 } n \text{ 为整数，且 } n \neq -1) \\ 2\pi j, (\text{当 } n = -1, \text{逆时针方向积分}) \\ -2\pi j, (\text{当 } n = -1, \text{顺时针方向积分}) \end{cases} \tag{6.1.7}$$

我们这样详尽地讨论是由于 $f(z)=z^n$ 沿圆周的积分在以下的内容中具有基本的重要性。

6.1.3 积分和积分路径的关系

(6.1.2)式的复变函数积分和(6.1.1)式的实变函数积分还有一个根本区别，使得复变函数积分有其独特的性质。我们看(6.1.1)式和图 6.1.1，因为各分点 x_k 是取在 x 轴上的上、下限之间，给定上、下限 x_1 和 x_2 就足够了。可是对于复变函数积分，单给定上、下限是不够的，还必须给定分点 z_k 是取在哪条曲线上(图 6.1.2)。

读者马上会想到一个问题，就是在复平面上的 A、B 两点之间若沿不同路径积分得到的结果是不是一样的？回答是：如果沿两条不同路径 C_1 和 C_2 从 A 点到 B 点积分，只要在这两条曲线上及其所包围的区域内部被积函数 $f(z)$ 是一个解析函数，那么分别沿这两条不同路径积分的结果必定相等(图 6.1.6)。为什么？下面我们就来证明这一点。我们换一个说法。既然

$$\underset{(\text{沿 } C_1)}{\int_A^B} f(z)\mathrm{d}z = \underset{(\text{沿 } C_2)}{\int_A^B} f(z)\mathrm{d}z, \text{又因为} \underset{(\text{沿 } C_2)}{\int_A^B} f(z)\mathrm{d}z = -\underset{(\text{沿 } C_2)}{\int_B^A} f(z)\mathrm{d}z$$

所以 $$\underset{(\text{沿 } C_1)}{\int_A^B} f(z)\mathrm{d}z + \underset{(\text{沿 } C_2)}{\int_B^A} f(z)\mathrm{d}z = 0, \text{即} \oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0。$$

在最后一个积分式中，$C = C_1 + C_2$ 代表整个封闭曲线。这个积分叫闭路积分。上述论断可重新表述为：

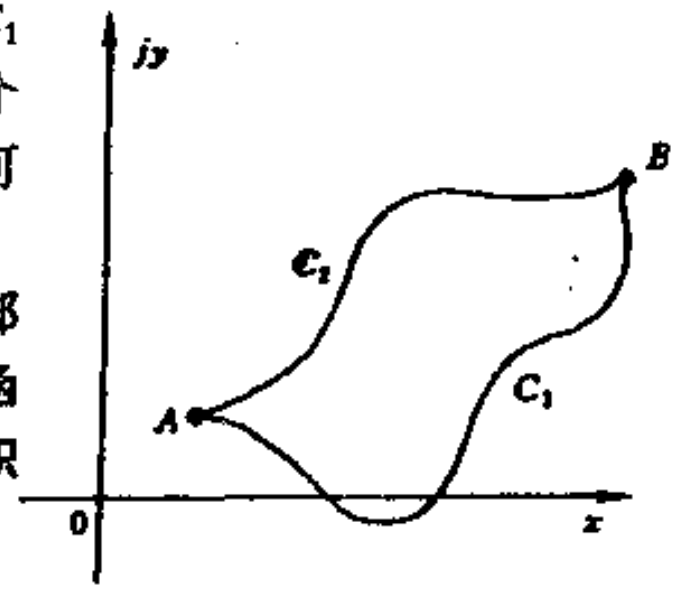


图 6.1.6

若 $f(z)$ 在闭曲线 C 内部以及在这闭曲线上是解析函数，则 $f(z)$ 沿这闭曲线的积分为零：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{6.1.8}$$

这个定理称为**柯西(积分)定理**。下面我们来证明它。

我们把(6.1.8)式左端的积分改写成：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C (u + jv)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y)$$

$$= (\oint_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + j(\oint_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

利用积分学中联系线积分和面积分的格林公式：

$$\oint_C u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y = \iint_A (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 A 表示闭曲线 C 所包围的面积，我们有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -\iint_A (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + j\iint_A (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

但由解析函数的柯西－黎曼条件可知(参看 §5.2.3)

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

所以

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

这就证明了柯西(积分) 定理。我们看到，解析函数的闭路积分为零，这一特性是与解析函数的柯西 - 黎曼条件有着内在联系的。柯西定理的逆定理叫做莫雷拉定理，即是说，凡满足(6.1.8) 式的 $f(z)$ 必为闭曲线 C 内和 C 上的解析函数。但是柯西定理的逆定理是不一定成立的。

为深入了解柯西定理的含义，我们考虑复变函数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (n \text{ 为正整数})$$

沿以原点为中心的圆周的积分。由于 $f(z)$ 在圆内及圆周上是解析的，按柯西定理，这积分应为零。实际上，根据(6.1.7) 式，这个多项式的每一项积分都是零，也可证实这个结论。现在我们假定给这个多项式添上一项 k/z，那么 $f(z)$ 就在原点有了一个极点，$f(z)$ 不是在圆内任何点都解析了；即不满足柯西定理的条件，故积分不一定等于零。实际上，由(6.1.7) 式可知，那个闭路积分等于 $2\pi jk$(逆时针方向积分)。如果我们在多项式中添加的不是 k/z，而是 k/z^2，虽然新的 $f(z)$ 在原点仍不解析，但由(6.1.7) 式，积分仍为零。这就看出柯西定理的逆定理不常真。对这个问题的讨论将有助于我们后面学习级数和留数。

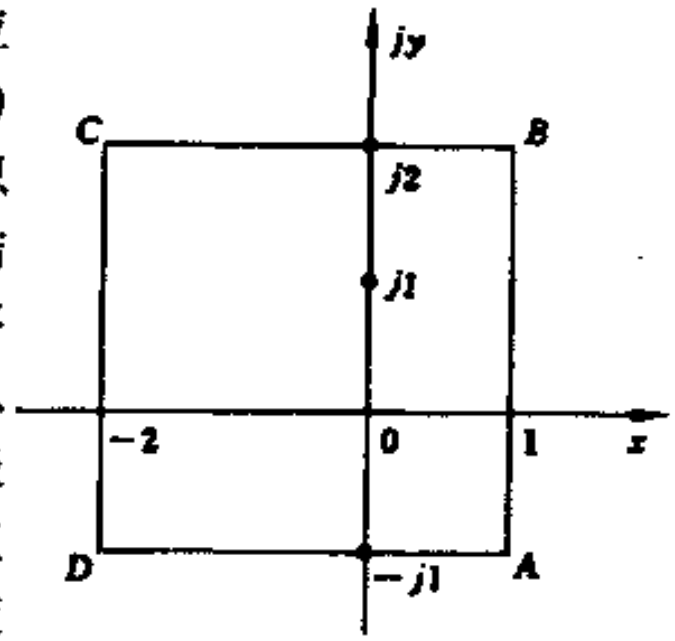


图 6.1.7

前面的讨论为便于计算总是将闭曲线取成一个圆周，其实，**柯西定理对任意形状的闭曲线都成立**。请看下面的例子。

例 6.1.1 计算 $\oint_C z^2 \mathrm{d}z$，积分路径 C 是沿图 6.1.7 所示的正方形边界 $ABCD$ 进行的，顶点 A、B、C、D 的坐标分别为 $1-j$，

$1 + j2$, $-2 + j2$ 和 $-2 - j$。

解 $z^2 = x^2 - y^2 + j2xy$,

在 AB 边上, $x = 1, \mathrm{d}z = j\mathrm{d}y$, 故有

$$\int_A^B z^2 \mathrm{d}z = \int_{-1}^{2} [(1 - y^2) + j2y] j\mathrm{d}y = -3$$

在 BC 边上, $y = 2, \mathrm{d}z = \mathrm{d}x$, 故有

$$\int_B^C z^2 \mathrm{d}z = \int_1^{-2} [(x^2 - 4) + j4x] \mathrm{d}x = 9 + j6$$

类似地可算出其余两边上的积分结果各为 $-6 - j9$ 和 $3j$。容易看出, 沿整个正方形边界 $ABCD$ 的积分为零。这也是对柯西定理的验证。

在某些问题中, 积分路径可能遇到复杂的情况, 如图 6.1.8 所示。



图 6.1.8

前面遇到的积分路径都属于单连通区域的边界。现在我们来考虑沿双连通区域边界的积分(图 6.1.9), 它是由两条互不相交的闭曲线 C_1 和 C_2 构成。为应用柯西定理, 可以做一条辅助直线 LM 把闭曲线 C_1 和 C_2 连接起来, 于是 C_1 和 C_2 之间的区域成为单连通区域 D。一般这样规定沿边界绕行的方向, 即沿行进方向始终把区域 D 留在左边, 就说这方向是正方向。这样, 区域 D 的边界由闭曲线 Γ 组成:

$$\Gamma = C_1 + LM - C_2 + ML,$$

根据柯西定理有

$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \left(\oint_{C_1} + \int_{LM} - \oint_{C_2} + \int_{ML}\right) f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

但 $$\int_{LM} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{ML} f(z)\mathrm{d}z,$$

故有 $$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z. \tag{6.1.9}$$

这是一个重要的结论,这结论推广到多连通区域就是

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=2}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}(z) \tag{6.1.10}$$

上式说明,若 $f(z)$ 在多连通区域解析,则 $f(z)$ 在外闭曲线 C_1 上的积分等于各内闭曲线 C_k 上积分之和,而所有的闭路积分都取正方向。

我们注意到,内闭曲线可能环绕着 $f(z)$ 的奇点。例如,设闭曲线 C_2 环绕着 $f(z)$ 的一个极点 z_0,于是(6.1.9) 式告诉我们,只要 $f(z)$ 在区域 D 内除 z_0 点以外的地方解析,则沿着所有围绕 z_0 点的 D 内的闭曲线积分完全相等。因此,在工程计算上为方便常把积分路径取为以 z_0 点为中心的圆,这圆整个落在区域 D 内。



图 6.1.9

6.1.4 解析函数的闭路积分表示

设 $f(z)$ 在区域 D 上解析,C 为 D 的边界,我们来考虑积分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z,$$

被积函数除 z_0 点外在 D 上处处是解析的。我们以 z_0 点为中心做一个半径为 r 的小圆,小圆的边界记为 C_1,因为 $f(z)/(z - z_0)$ 在

C 和 C_1 之间是解析的，故由(6.1.9)式有

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$
$$= \oint_{C_1} \frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$
$$= f(z_0)\oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} + \oint_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

若小圆 C_1 的半径取得非常小，那么对于 C_1 上的 z 值总可以使

$$|f(z)|-|f(z_0)|<\epsilon,$$

其中 ϵ 是任意的正常数，故有

$$\left|\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| < \left|\epsilon\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}\right| = 2\pi\epsilon,$$

上式最后一步利用了(6.1.6)式。在 $r\to 0$ 因而 $\epsilon\to 0$ 的极限情况下，上式趋于零。故

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2\pi j f(z_0),$$

或

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \qquad (6.1.11)$$

这个公式称为柯西积分公式，它是复变函数积分的一个基本公式。它表示了解析函数在定义域内所取的值和这定义域边界上的值之间的关系。由于 z_0 点的选择在区域内是任意的，通常在公式中以 z 代替 z_0，并以 ζ 表示积分变量，把柯西积分公式改写成

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \qquad (6.1.12)$$

其中变量 ζ 仅在闭曲线 C 上取值，z 代表定义域内任意一点。可见，$f(z)$ 在闭曲线 C 内任意一点的值可以用上述沿闭曲线的积分来表示，称为解析函数 $f(z)$ 的闭路积分表示。

读者可能想到，既然 $f(z)$ 可以表示成(6.1.12)式的样子，那么 $f(z)$ 的各阶导数是否也可以表示成类似(6.1.12)式的样子

呢?我们在(6.1.12)式的两端(冒险地)对 z 求各阶导数:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta \tag{6.1.13a}$$

$$f''(z)=\frac{1\cdot 2}{2\pi j}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\mathrm{d}\zeta \tag{6.1.13b}$$

……

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi j}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \tag{6.1.13c}$$

这些公式可以用数学归纳法证明是正确的,此处从略。总之,如果 $f(z)$ 是某区域 D 内的解析函数,则它的任意阶导数都存在,而且这些导数仍为 D 内的解析函数。这与实变函数的情况大不相同。我们知道,实变函数的一阶导数存在并不能保证高阶导数存在。

例 6.1.2 计算积分

$$\oint_C\frac{z^2-2z-1}{z+j}\mathrm{d}z,$$

其中闭曲线 C 为半径 $r=|z|=2$ 的圆周。

解 $f(z)=z^2-2z-1$ 在 C 内解析,$-j$ 点在上述圆周内,故由柯西积分公式有

$$\oint_C\frac{z^2-2z-1}{z+j}\mathrm{d}z=2\pi j(-1+2j-1)=-4\pi(1+j)$$

例 6.1.3 计算积分

$\oint_C\dfrac{e^z}{z+j\dfrac{\pi}{2}}\mathrm{d}z$,$C$ 为 $x=\pm 2, y=\pm 2$ 所围的闭曲线。

解

$$\oint_C\frac{e^z}{z+j\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}z=2\pi j e^{-\frac{\pi}{2}j}=2\pi j(-j)=2\pi$$

例 6.1.4 计算积分

$\oint_C\dfrac{e^z}{(z+2)^4}\mathrm{d}z$,其中 C 是按正向绕点 $z=-2$ 一周的闭曲线。

解 根据高阶导数公式(6.1.13)有

$$\oint_C \frac{e^z}{(z+2)^4}dz = \frac{2\pi j}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3}(e^z)\right]_{z=-2} = \frac{\pi j}{3e^2}$$

§6.2 解析函数的级数表示

6.2.1 初步讨论

我们在初等数学中就已接触到级数，知道一个首项为 a_0，公比为 q 的数项等比级数

$$a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^{n-1} + \cdots,$$

它的通项为

$$a_n = a_0 q^{n-1},$$

它的前 n 项之和是

$$S_n = \frac{a_0 - a_0 q^n}{1-q} = \frac{a_0(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_0(q^n-1)}{q-1}$$

这些讨论也可由数项级数推广到函数项级数，它们属于高等数学中我们已经学过的幂级数或泰勒级数，那时我们着重讨论了收敛问题。举一个具体例子，设首项为1，公比为 x，那么前 $(n+1)$ 项之和就是

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

当 $n \to \infty$ 时，这个级数仅在 $|x| < 1$ 的条件下收敛于 $1/(1-x)$，因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

由 §5.1.2 我们知道，复数运算服从普通的代数运算规则。所以上述对实变函数的讨论可以正确地推广到复变函数中来，只要把 x

换为 z 即可，故有

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots, \quad |z| < 1 \tag{6.2.1}$$

实际上它是复变函数中泰勒级数展开公式（见后）的特例。(6.2.1) 的级数要求 $|z| < 1$，即限制在复平面上以 $z = 0$ 点为中心，半径为 1 的圆内，这个圆称为收敛圆，它通过极点 $z = 1$（图 6.2.1a）。再考虑 $f(z) = 1/(1-z)$ 在 $|z| > 1$ 区域（图 6.2.1b）

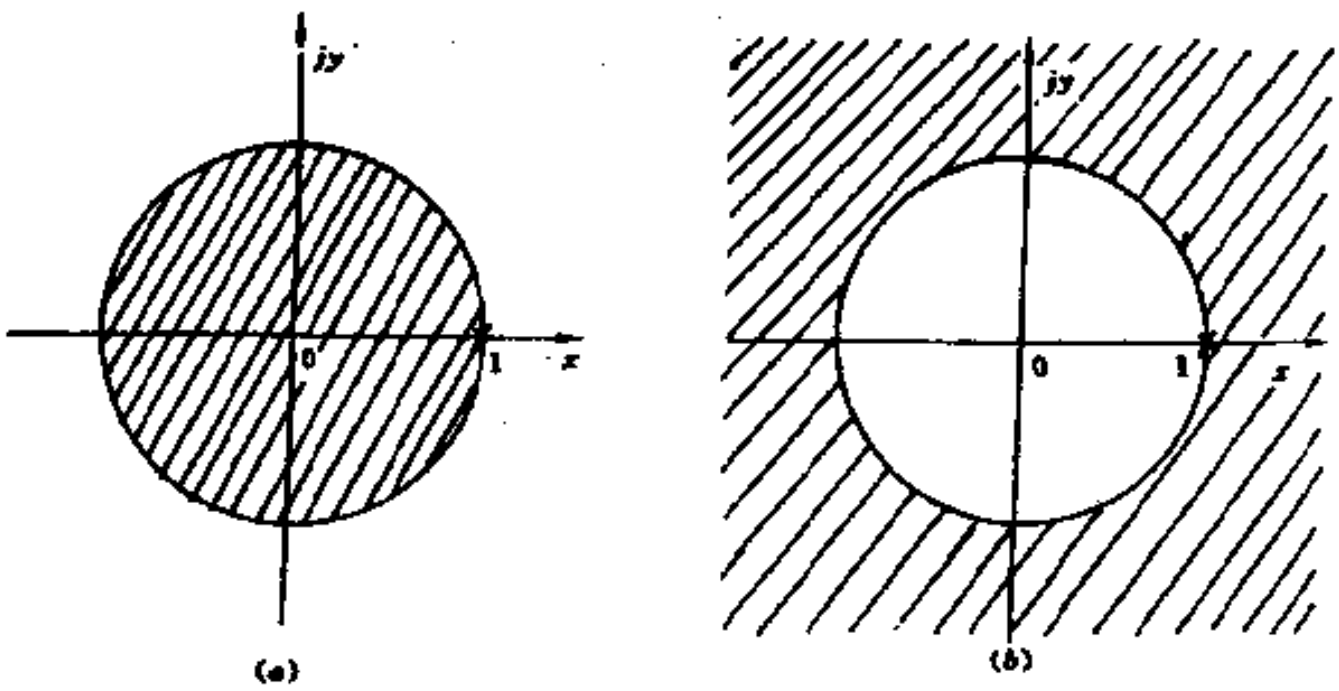


图 6.2.1

的级数展开。这时可令 $z = \frac{1}{\xi}$，于是 $|\xi| < 1$，并有

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\frac{1}{\xi}} = 1 - \frac{1}{1-\xi}$$

对上式中 $1/(1-\xi)$ 项可应用 (6.2.1) 式展开，故有

$$\begin{aligned} f(\xi) &= 1 - (1 + \xi + \xi^2 + \cdots) \\ &= -(\xi + \xi^2 + \cdots), \quad |\xi| < 1, \end{aligned}$$

或

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right),\ |z|>1,\ (6.2.2)$$

比较(6.2.1)和(6.2.2)式,我们看到,同一个 $f(z)$ 在复平面上不同区域有不同的级数展开式。(6.2.1) 式的级数仅包含正幂次项(属于泰勒级数),它在单位圆内部收敛。(6.2.2) 式的级数包含负幂次项,它在单位圆外部收敛。这种包含负幂次项的级数展开式属于所谓罗朗级数(见后)。对上面例子所进行的讨论是初步的和粗略的,下面我们将寻求普遍的级数展开公式。

6.2.2 罗朗级数

1.一般情况

§6.1.4 讨论的柯西积分公式(6.1.12) 告诉我们,一个解析函数可以表示为闭路积分,现在要讨论的级数展开式是解析函数的另一种表示方法。积分表示和级数表示都取决于一个解析函数本身的性质,因而级数表示和积分表示之间势必也有内在联系。下面我们将从柯西积分公式出发来讨论级数展开问题。

考虑一个具有代表性的区域(图 6.2.2),它是一个圆环状区域,边界是同心圆 C_1 和 C_2(C_1 的半径 r_1 可以任意大,C_2 的半径 r_2 可以任意小),圆心为 z_0。$f(z)$ 在这个环状区域内部和边界上为解析函数,但在 $r<r_2$ 和 $r>r_1$ 的区域可能 $f(z)$ 不解析。设 z 是这环状区域内的任意一点,我们以 z 点为中心,以 ζ 为半径做一个小圆 Γ,并使 Γ 整个地落在环状区域内部,于是我们得到一个新的区域 D',它的边界是

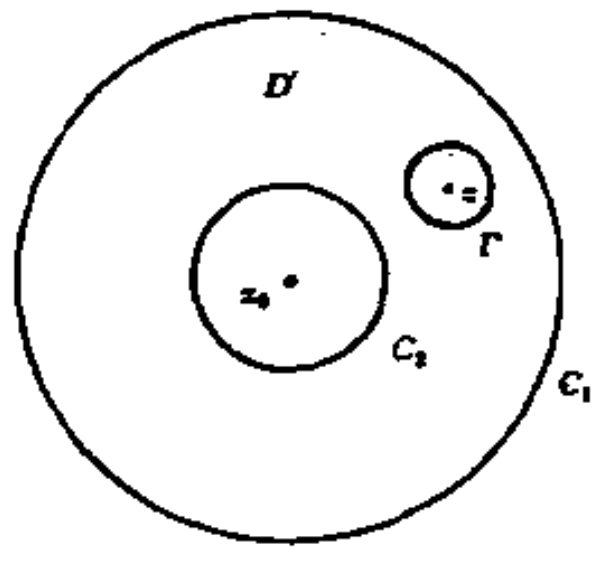


图 6.2.2

C_1、C_2 和 Γ。若 ζ 是 D' 上的点，则在 D' 内函数 $f(\zeta)/(\zeta - z)$ 是解析的(不包含 z 点了)，于是根据柯西定理的推论(6.1.10) 式，取沿正方向的积分有：

$$\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

由柯西积分公式(6.1.12) 有

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi j f(z),$$

于是

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (6.2.3)$$

注意上式右端第一个闭路积分中的变量 ζ 是在 C_1 圆周上取值：$|\zeta - z_0| = r_1$，而第二个闭路积分中的变量 ζ 是在 C_2 圆周上取值：$|\zeta - z_0| = r_2$。现考虑以下等式

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

对于 $|\zeta - z_0| = r_1$，有 $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$。利用(6.2.1) 式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

对于 $|\zeta - z_0| = r_2$，有 $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| > 1$，利用(6.2.2) 式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= -\left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{\zeta - z_0}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} + \cdots\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}\end{aligned}$$

将以上两个展开式分别代入(6.2.3)式右端的两个积分中去得到

$$
\begin{aligned}
f(z) = & \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right)f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \\
& \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\right)f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
= & \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n + \\
& \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)\frac{1}{(z-z_0)^n} \qquad (6.2.4)
\end{aligned}
$$

或

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n
$$

因为上式中被积函数在 C_1 和 C_2 之间的区域内是解析的，所以闭曲线 C 可以取 C_1 和 C_2 之间的任意闭曲线(如同心圆)。最后，我们把上述级数展开式表示成

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad (6.2.5)
$$

$$
a_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad (6.2.6)
$$

在(6.2.6)式中我们按习惯将积分变量 ζ 换为 z，这对积分结果并无影响。由(6.2.5)和(6.2.6)式所确定的级数称为 $f(z)$ 关于 z_0 点的罗朗级数展开式。

2. 转化为泰勒级数的情况

在推导上述罗朗级数时假定了 $f(z)$ 在 C_1 和 C_2 之间的环形区域为解析函数，而在 $r > r_1$ 和 $r < r_2$ 的区域可能不解析。现在我们假定 $f(z)$ 在 $r < r_2$ 的区域内的每一点(包括 z_0 点)都是解析函数，则当 $n < 0$ 时，罗朗展开式系数 a_n 的表示式(6.2.6)为零。为什么?因为若 $n < 0$，则 $(z-z_0)^{-(n+1)}$ 与 $f(z)$ 的乘积是闭曲线 C 内的解析函数，根据柯西定理可知(6.2.6)式中的积分为零。

在这种情况下,(6.2.5) 和(6.2.6) 式中只有 $n \geqslant 0$ 的项,即

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{6.2.7}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{6.2.8}$$

(6.2.7) 和(6.2.8) 式所确定的级数就是 $f(z)$ 关于 z_0 点的泰勒级数展开式,它是罗朗级数的特殊情况,即在闭曲线 C 内的任何点(包括 z_0 点)$f(z)$ 均为解析的情况。(6.2.8) 式中最后一个等式是根据高阶导数公式(6.1.13) 得出的。

3.关于零点和极点

首先,假定 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < r$ 的圆内为解析函数,则对圆内任意一点均可将 $f(z)$ 展开为泰勒级数:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

若 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0, a_n \neq 0$,则

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots \\ &= (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots] \\ &= (z - z_0)^n g(z) \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

可见 $z = z_0$ 时 $f(z) = 0$, z_0 点是 $f(z)$ 的 n 阶零点。

其次,假定解析函数 $f(z)$ 的定义域为 $|z - z_0| < r$ 的圆内,但不包括 z_0 点本身。这时要用罗朗级数展开式

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots,$$

其中正幂次部分 $[a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots]$ 在 $z = z_0$ 点是解析的。负幂次部分 $\left[\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots\right]$ 在 $z = z_0$ 点

不解析，并称为 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点的**主部**(因为 $f(z)$ 的解析特性主要决定于这部分)。在这种情况下，若 $a_{-n}\neq 0$，而 $a_{-n-1}=a_{-n-2}=\cdots=0$，那么 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 的主部仅包含有限项，即

$$\begin{aligned}&\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}\\&=\frac{1}{(z-z_0)^n}[a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+a_{-2}(z-z_0)^{n-2}+\cdots+a_{-n}]\\&=\frac{h(z)}{(z-z_0)^n}\end{aligned}\tag{6.2.10}$$

$h(z)$ 显然在 $z=z_0$ 点解析，这时 $z=z_0$ 点是 $f(z)$ 的 n 阶极点。

以后将看到，罗朗级数为分析电路系统传输函数 $H(s)$ 的极点和零点，提供了一个重要工具。

例 6.2.1 求 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 关于原点 $z=0$ 的罗朗级数。

解 为确定罗朗级数的系数，由(6.2.6)式有

$$a_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{e^z}{z^{n+3}}\mathrm{d}z,$$

其中 C 为以 $z=0$ 点为中心的圆，上式中的被积函数当 $n\leqslant -3$ 时在 C 内解析，积分为零。故展开式中必不包含 $n\leqslant -3$ 的项。当 $n\geqslant -2$ 时有

$$a_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{e^z}{z^{n+3}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{e^z}{(z-0)^{(n+2)+1}}\mathrm{d}z,$$

上式中的积分可利用公式(6.1.13c)计算：

$$a_n=\frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{(n+2)}}{\mathrm{d}z^{(n+2)}}[e^z]_{z=0}=\frac{1}{(n+2)!},(n\geqslant -2)$$

故有

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots,\quad(|z|>0)$$

$z=0$ 点是 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 的二阶极点。

4. 关于不同定义域和不同极点的级数展开

用普遍公式(6.2.6)和(6.2.9)确定级数的系数，计算起来往往是很麻烦的，在某些情况下可采取较简便的方法把 $f(z)$ 展为级数。请看下面的例子。

例 6.2.2 把 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $|z|<1$ 的区域展开为关于 $z=0$ 点的泰勒级数。

解 解法 Ⅰ：在 $|z|<1$ 的区域 $f(z)$ 没有极点(图 6.2.3)，可以直接用代数除法来做：

$$
\begin{array}{r}
2-3z+z^2 \;\overline{)\;1} \\
\qquad\qquad \underline{1-(3/2)z+(1/2)z^2} \\
\qquad\qquad\quad (3/2)z-(1/2)z^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{(3/2)z-(9/4)z^2+(3/4)z^3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad (7/4)z^2-(3/4)z^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{(7/4)z^2-(21/8)z^3+(7/8)z^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (15/8)z^2-(7/8)z^4
\end{array}
$$

故所求的泰勒级数为

$$
f(z)=1/2+(3/4)z+(7/8)z^2+(15/16)z^3+\cdots,\quad(|z|<1)
$$

在 $|z|\ll 1$ 的情况下，只取级数的前几项就足够了。

解法 Ⅱ：也可利用已知的级数展开式(6.2.1)来做：

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1/2}{1-z/2}\\
&=(1+z+z^2+z^3+\cdots)-[1/2+(1/4)z+(1/8)z^2+\\
&\quad(1/16)z^3+\cdots]\\
&=(1/2)+(3/4)z+(7/8)z^2+(15/16)z^3+\cdots,(|z|<1)
\end{aligned}
$$

例6.2.3 将上例中的 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在环形区域 $1<|z|<2$ 以及 $|z|>2$ 的区域(图 6.2.3)分别展开成关于 $z=0$ 点的罗朗级数。

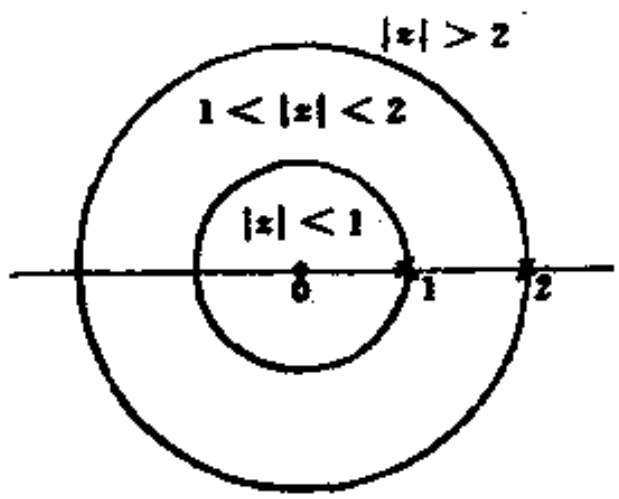


图 6.2.3

解 首先考虑在 $1<|z|<2$ 区域的展开。因为 $|z|<2$,故上例中出现过的级数

$$\frac{1/2}{1-z/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2+\frac{1}{16}z^3+\cdots$$

仍收敛。但因 $|z|>1$,故不能利用(6.2.1)式而需利用(6.2.2)式:

$$\frac{1}{1-z}=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right),\quad (|z|>1)$$

于是有

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1/2}{1-z/2}$$
$$=-\left(\cdots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2+\frac{1}{16}z^3+\cdots\right)$$

再来考虑在 $|z|>2$ 区域的展开式。在这种情况下,只能利用(6.2.2)式:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1/2}{1-z/2}$$
$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)-\left[-\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{8}{z^4}+\cdots\right)\right]$$
$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\frac{15}{z^5}+\cdots,\quad |z|>2$$

由以上两个例题可以看到,$f(z)$ 在三个不同区域展开成关于 $z=0$ 点的三种级数。

例 6.2.4　将上例中的 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为关于 $z=1$ 点的罗朗级数。

解　$z=1$ 点是 $f(z)$ 的一个极点，罗朗级数的普遍公式 (6.2.5) 揭示我们应将 $f(z)$ 展开为包含 $(z-1)$ 的正幂或负幂项级数，于是我们将 $f(z)$ 表示为

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{1-(z-1)}\right]$$

在 $0<|z-1|<1$ 的区域(图 6.2.4)，我们又可利用(6.2.1)式来展开上式右端方括号内的项，于是有

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{z-1}[1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots]\\&=-\left[\frac{1}{z-1}+1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots\right],\\&\qquad(0<|z-1|<1)\end{aligned}$$

在 $|z-1|>1$ 的区域，我们就要利用(6.2.2)式来展开那个方括号内的项，于是有

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{z-1}\left\{-\left[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\right]\right\}\\&=\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^4}+\cdots,(|z-1|>1)\end{aligned}$$

比较以上三个例题可以清楚看到，同一个函数 $f(z)$ 展开为关于 $z=0$ 点和关于 $z=1$ 点的罗朗级数是不同的。

我们可以类似地求出这个函数 $f(z)$ 关于 $z=2$ 点的罗朗级数，它将是另外的形式。当我们把一个给定函数展开为级数时，要特别注意它的收敛区域问题。我们可以从图 6.2.3 和图 6.2.4 仔细比较同一个 $f(z)$ 的五种展开式所对应的五种不同收敛区域。

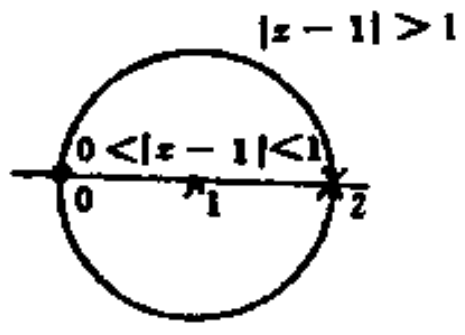


图 6.2.4

从上述几个例子还可知道，只要能把 $f(z)$ 化为形如 $\frac{1}{1-z}$ 的形式，就可利用已知的几何级数〔如(6.2.1)和(6.2.2)式〕将 $f(z)$ 展为级数。

6.2.3 留数

1.初步讨论

(1) 如果 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，由前面的讨论可知，$f(z)$ 展为罗朗级数后，其主部仅有一个负幂项：

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

这个负幂项的系数 a_{-1} 很容易用下面的方法定出：

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z), (z_0 \text{ 为一阶极点}) \quad (6.2.11)$$

系数 a_{-1} 专门叫做 $f(z)$ 在极点 $z = z_0$ 处的留数，并将 a_{-1} 记为 $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$ 或 $\operatorname{Res} f(z_0)$。

例 6.2.5 求 $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$ 的极点 $z = 2$ 处的留数。

解 $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z=2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right] = 4$

(2) 如果 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，那么它的罗朗级数主部将包含 n 个负幂项：

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

将上式两端乘以 $(z - z_0)^n$ 得到

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + \cdots$$

这个式子右端不含负幂项，具有泰勒级数的形式。于是它的系数可

按公式(6.2.8) 求出。a_{-1} 是它的$(n-1)$ 次幂的系数，由(6.2.8)式得

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right]_{z=z_0},$$

(z_0 为 n 阶极点) (6.2.12)

实际上，任意项的系数也可类似地求出：

$$a_k = \frac{1}{(n+k)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n+k}}{\mathrm{d}z^{n+k}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right]_{z=z_0} \tag{6.2.13}$$

(3) 在单极点的情况下，如果 $f(z)$ 可以表示成 $P(z)/Q(z)$〔电路系统的传输函数 $H(s)$ 往往具有这种形式〕，还有一个求留数的简便方法。因为这时 $Q(z)$ 必有一阶零点，可以写成：

$$Q(z) = (z-z_0)\left[Q'(z_0) + \frac{Q''(z_0)}{2}(z-z_0) + \cdots \right]$$

利用上式，将 $f(z)$ 代入(6.2.11) 式就可得到求留数的另一个公式：

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}, \quad (z_0 \text{ 为一阶极点}) \tag{6.2.14}$$

例 6.2.6 求 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ 在 $z = j$ 点的留数。

解 $$\frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{(z-j)^3(z+j)^3},$$

可以看出 $z = j$ 点为三阶极点，利用公式(6.2.13) 有

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=j} f(z) &= \frac{1}{2!} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \left[(z-j)^3 \frac{1}{(z-j)^3(z+j)^3} \right]_{z=j} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \left[(z+j)^{-3} \right]_{z=j} \\
&= \frac{1}{2} \left[(-3)(-4)(z+j)^{-5} \right]_{z=j} \\
&= \frac{6}{(2j)^5} = -\frac{3}{16} j
\end{aligned}$$

(4) 在罗朗级数系数的普遍公式(6.2.6) 中，令 $n = -1$，我们有

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

其中 C 为逆时针方向,从而有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi j a_{-1} = 2\pi j \mathrm{Res} f(z_0) \qquad (6.2.15a)$$

若 C 取顺时针方向,则有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -2\pi j \mathrm{Res} f(z_0) \qquad (6.2.15b)$$

(6.2.15a)或(6.2.15b)式告诉我们,只要知道 $f(z)$ 在极点 z_0 处的留数就可以不必真正做积分计算而求出环绕 z_0 点的闭路积分,这是计算积分的一个巧妙方法。

例 6.2.7　计算 $\oint_C \frac{e^2}{z^2}\mathrm{d}z$,其中 C 是环绕 $z = 0$ 点的任意闭曲线。

解　我们刚刚求出这个被积函数的罗朗展开式。

由那个展开式直接看出:$a_{-1} = 1$,根据(6.2.15a)式有

$$\oint_C \frac{e^2}{z^2}dz = 2\pi j a_{-1} = 2\pi j$$

(5) 函数在无限远点的留数

在电路问题中有时遇到需要计算 $f(z)$ 在无限远点($z\to\infty$)的留数。这时可令 $z = 1/\zeta$,并且有

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{\zeta\to 0} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

于是 $f(z)$ 关于 $z\to\infty$ 处的罗朗展开式可以由 $f(\frac{1}{\zeta})$ 关于 $\zeta = 0$ 点的罗朗展开式代以 $\zeta = 1/z$ 得出。此时罗朗级数的正幂部分变成主部,而主部变成正幂部分。我们知道,$f(z)$ 在有限点 $z = z_0$ 的留数就是罗朗展开式中 $1/(z - z_0)$ 项的系数,$f(z)$ 在 $z = 0$ 点的留数就是相应的展开式中 $1/z$ 项的系数,$f(z)$ 在 $z = \infty$ 处的留数规定为 $f(z)$ 关于 $z\to\infty$ 处的罗朗展开式中 z 项的系数。

在信息传输问题中遇到的主要是像(3.2.14)式那样的有理分式函数：

$$f(z)=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}$$

若 $n>m$，则当 $z\to\infty$ 时 $f(z)\to\infty$，即 $f(z)$ 在无限远点有$(n-m)$阶极点。若 $n\leqslant m$，则 $f(z)$ 在无限远点解析。我们考虑 $f(z)$ 在 $z\to\infty$ 处有一阶极点的情况。这时 $n-m=1$，于是

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_0}\\&=\frac{a_n}{b_{n-1}}z+\frac{a'_{n-1}z^{n-1}+a'_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a'_0}{b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_0}\end{aligned}$$

当 $z\to\infty$ 时，上式第二项为有限值，所以 $f(z)$ 在 $z\to\infty$ 处的留数为

$$\operatorname*{Res}_{z\to\infty}f(z)=\frac{a_n}{b_{n-1}}$$

例 6.2.8　计算 $f(z)=\dfrac{5z^2+z+1}{z+3}$ 在无限远点的留数。

解　$f(z)=\dfrac{5z^2+z+1}{z+3}=5z-14+\dfrac{43}{z+3}$

所以　$\operatorname*{Res}_{z\to\infty}f(z)=5$。

2. 留数定理

在分析线性电路时遇到的重要数学问题之一就是计算闭路积分。(6.2.15a)和(6.2.15b)式给我们提供了一个重要方法。那是闭曲线 C 内仅包含一个极点 z_0 的情况。如果 C 内包含 N 个极点(图6.2.5)，由柯西定理知道，沿闭曲线 C 的积分等于 N 个积分之和：

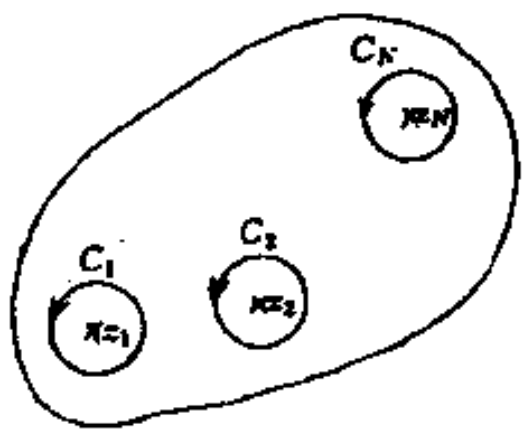


图 6.2.5

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{N} \oint_{C_\nu} f(z)\mathrm{d}z$$

而在每个极点处都可以应用(6.2.15a) 或(6.2.15b) 式。例如,对第 ν 个极点有 $\oint_{C_\nu} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi j \mathrm{Res} f(z_\nu)$

于是

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi j \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Res} f(z_\nu) \qquad (6.2.16a)$$

上式中积分路径 C 是沿逆时针方向。若沿顺时针方向则有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -2\pi j \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Res} f(z_\nu) \qquad (6.2.16b)$$

(6.2.16a) 和(6.2.16b) 式称为留数定理,它说明 $f(z)$ 沿闭路 C 的积分结果等于闭曲线 C 内包围的全部极点处的留数之和的 $2\pi j$ 倍。

例 6.2.9　计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{a^2 + y^2}$ 。

解　首先将这个实变函数积分化为复平面上的闭路积分。我们令变量 y 为复变量 z 的虚部:$z = x + jy$,于是有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{a^2 + y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{a^2 - (jy)^2} = -j \lim_{R\to\infty} \int_{-jR}^{+jR} \frac{\mathrm{d}z}{a^2 - z^2}$$

上式最后一个积分是沿 y 轴($x = 0$),故 $z = jy$。为使这个积分化为闭路积分,我们附加上一项沿着图 6.2.6 中右半平面上半圆 C' 的积分(当 $R\to\infty$ 时,沿 C' 的积分为零,见下) 于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{a^2 + y^2} = -j \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-jR}^{+jR} \frac{\mathrm{d}z}{a^2 - z^2} + \int_{C'} \frac{\mathrm{d}z}{a^2 - z^2} \right]$$

$$= -j \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{a^2 - z^2}$$

其中闭曲线 C 是由 $-jR$ 到 $+jR$ 的一段虚轴和以原点为中心以 R 为半径的半圆组成的。右半平面上的极点 $z = a$ 被包围在 C 内部,根据留数定理(6.2.16a) 或(6.2.16b) 有

$$\oint_C \frac{dz}{a^2 - z^2} = -2\pi j \mathrm{Res} f(a)$$

我们再次强调要注意闭路积分的方向问题，上式中的积分是沿顺时针方向，故等式右端应有负号〔今后在应用于电路问题时，由于要考虑频率从 $-\infty$ 到 $+\infty$（或从 0 到 $+\infty$）的积分，经常出现沿顺时针方向积分的情况〕，利用计算留数的公式(6.2.11) 有

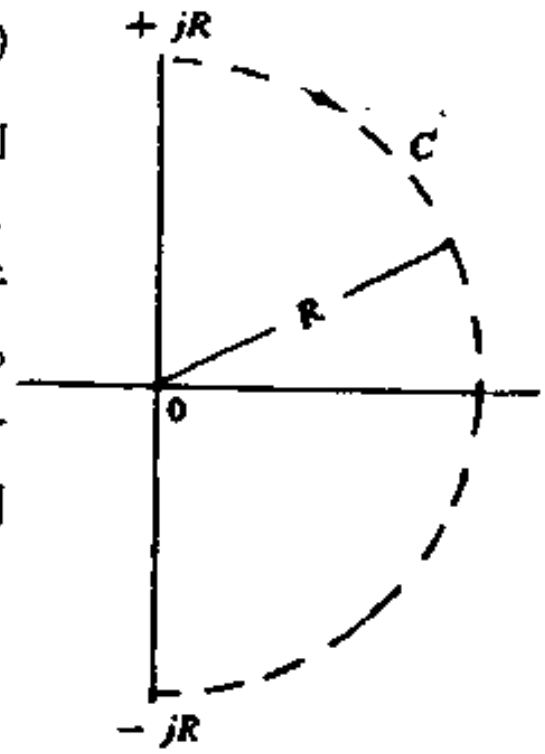


图 6.2.6

$$\oint_C \frac{dz}{a^2 - z^2}$$

$$= 2\pi j \left[(z - a) \frac{1}{a^2 - z^2} \right]_{z=a}$$

$$= \frac{\pi j}{a},$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{a^2 - z^2} = -j\left(\frac{\pi j}{a}\right) = \frac{\pi}{a},$$

这就是要求的结果。至于我们附加的那项积分，当 $R \to \infty$ 时它是否趋于零呢?这只要考查一下该积分的绝对值即可：

$$\left| \int_{C'} \frac{dz}{a^2 - z^2} \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{jRe^{j\theta}}{a^2 - R^2 e^{j2\theta}} d\theta \right|$$

$$\leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{|a^2 - R^2 e^{j2\theta}|} d\theta$$

$$\leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{R^2 - a^2} d\theta = \frac{\pi R}{R^2 - a^2}$$

显然，当 $R \to \infty$ 时，上式趋于零。

用类似于本题的方法，可以求出不少实变函数中难于计算的积分。更重要的是利用留数定理可以方便地计算拉普拉斯逆变换，详见 §4.2.2。

6.2.4 再论部分分式展开

在 §4.2.1,我们根据计算拉普拉斯逆变换的需要,具体讨论过部分分式展开法。由于在电路问题中常常需要把一个复杂的函数 $f(z)$ 展开为部分分式之和,我们有必要对此做一些一般性的讨论。

设 $f(z)$ 在 $z_1, z_2, \cdots, z_N$ 处有 N 个极点。我们以原点为中心做一个充分大的圆周 C,把这 N 个极点都包含在圆内(图 6.2.7),然后,类似于推导罗朗级数那样,设 z 为 C 内的一点,我们可以写出类似于(6.2.3) 式那样的式子:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi j}\sum_{p=1}^{N}\oint_{C_p'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, \quad (6.2.17)$$

上式右端第一个积分也可以像由(6.2.3) 式推导至(6.2.4) 式那样归结为一个正幂次级数,不过在现在的情况下,要把那里的 z_0 换为 0,把那里的 C_1 换为 C,于是有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi j}\sum_{n=0}^{\infty}(z)^n \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= G(z)
\end{aligned} \quad (6.2.18)$$

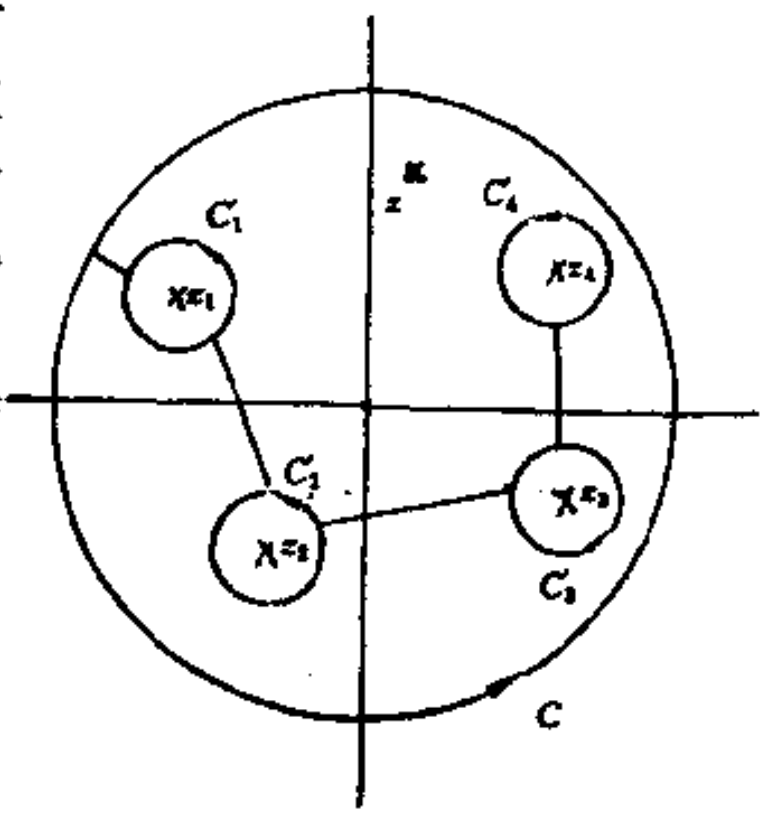


图 6.2.7

我们再考虑(6.2.17) 式右端第二项,它是 N 个积分之和。现以沿 C_1' 的积分作为典型情况来讨论。注意(6.2.4) 式中的第二个

求和式和(6.2.10)式,并注意现在考虑的极点是 z_1 点,我们可以写出

$$-\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=1}^{M}\frac{a_{-n}}{(z-z_1)^n}$$

它是 $f(z)$ 关于 z_1 点的罗朗展开式的主部,记为 $H_1(z)$,式中 M 是极点 z_1 的阶数。对于大圆 C 内的每个极点都有类似的结果:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta&=H_1(z),\\-\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta&=H_2(z),\\-\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_N}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta&=H_N(z),\end{aligned}\right\}\qquad(6.2.19)$$

我们注意到,因为 $f(z)$ 有 N 个极点,关于这 N 个不同的极点就有 N 个罗朗展开式的主部,把(6.2.18)和(6.2.19)式代入(6.2.17)式就得到

$$f(z)=H_1(z)+H_2(z)+\cdots+H_N(z)+G(z)\qquad(6.2.20)$$

上式是 $f(z)$ 的另一种表示式,称为部分分式展开。在实际应用中重要的是如何确定上述部分分式展开式中的各项系数,其方法是利用前面已经介绍过的确定系数的公式,例如(6.2.8)式和(6.2.13)式。我们还是举个典型的例子来说明为好。

例 6.2.10 将 $f(z)=\dfrac{z^4+4z^3+z^2}{z^3+z^2-z-1}$ 展为部分分式。

解 首先看到分子的幂高于分母的幂,我们用代数除法使这个分式函数化为分子的幂低于分母的幂的形式:

$$f(z)=z+3+\frac{2z^2+4z+3}{z^3+z^2-z-1}=z+3+\frac{2z^2+4z+3}{(z-1)(z+1)^2}$$

这样一来,我们就已实际上确定了(6.2.20)式中的正幂项:

$$G(z)=z+3,$$

剩下的那个分式函数的罗朗展开式(关于极点 $z=+1$ 和 $z=-1$)

的主部诸系数容易由(6.2.13)式求出。在一阶极点 $z=+1$ 处只有一个系数，可按更简单的公式(6.2.11)来求：

$$\left[(z-1)\frac{2z^2+4z+3}{(z-1)(z+1)^2}\right]_{z=1}=\frac{9}{4},$$

因而在这个极点，主部只是一项：

$$\frac{9/4}{z-1},$$

在二阶极点 $z=-1$，主部包括两项：

$$\frac{a_{-2}}{(z+1)^2}+\frac{a_{-1}}{z+1},$$

其系数可由(6.2.13)式求出：

$$a_{-2}=\frac{1}{(2-2)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{(2-2)}}{\mathrm{d}z^{(2-2)}}\left[(z+1)^2\frac{2z^2+4z+3}{(z-1)(z+1)^2}\right]_{z=-1}$$

$$=\left[\frac{2z^2+4z+3}{z-1}\right]_{z=-1}=-\frac{1}{2},$$

$$a_{-1}=\frac{1}{(2-1)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{(2-1)}}{\mathrm{d}z^{(2-1)}}\left[(z+1)^2\frac{2z^2+4z+3}{(z-1)(z+1)^2}\right]_{z=-1}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{2z^2+4z+3}{z-1}\right]_{z=-1}$$

$$=\left[\frac{(z-1)(4z+4)-(2z^2+4z+3)}{(z-1)^2}\right]_{z=-1}=-\frac{1}{4},$$

因此，待求的部分分式展开式为

$$\frac{z^4+4z^3+4z^2}{z^3+z^2-z-1}=\frac{9/4}{z-1}-\frac{1/2}{(z+1)^2}-\frac{1/4}{z+1}+3+z$$

6.2.5 应用实例：*RC* 二端网络结构设计

我们知道，电阻 R 和电容 C 的并联阻抗为

$$Z(j\omega)=\frac{1}{j\omega C+1/R}$$

将 $j\omega$ 换为复频率 $s=\sigma+j\omega$，上式成为

$$Z(s) = \frac{1/C}{s + 1/RC}$$

对于图 6.2.8 所示的多元件 RC 二端网络的输入端阻抗可类似地写出：

$$Z(s) = \frac{1}{C_0 s} + \frac{1/C_1}{s + 1/R_1C_1} + \cdots + \frac{1/C_k}{s + 1/(R_kC_k)} + \cdots + R_\infty$$

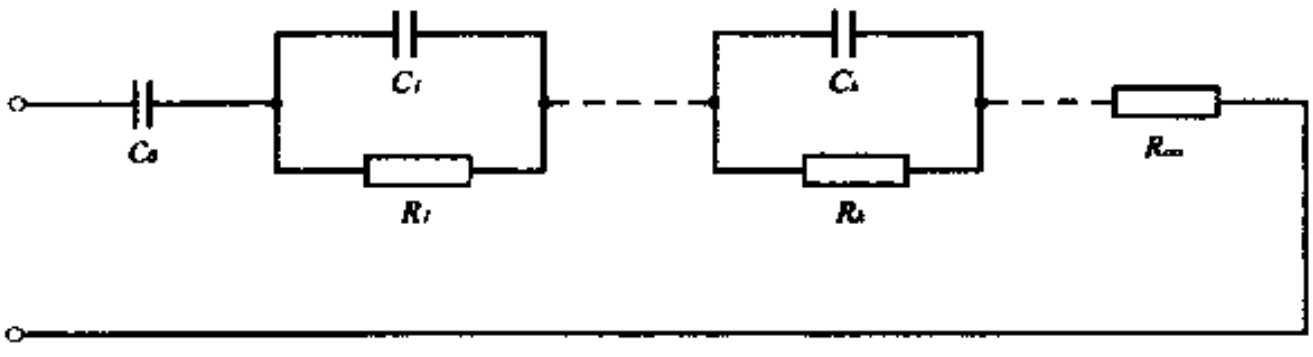


图 6.2.8　RC 二端网络的一般形式

令 $1/C_0 = a_0, 1/C_k = a_k, 1/R_kC_k = -s_k'$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 则上式成为

$$Z(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s - s_1'} + \cdots + \frac{a_k}{s - s_k'} + \cdots + R_\infty \qquad (6.2.21)$$

如果图 6.2.8 中没有电容 C_0 和 R_∞，那么上式中就没有 $1/(C_0 s)$ 和 R_∞ 这两项。我们看到，上式是一个部分分式展开式，图 6.2.8 的网络中有多少个电容，$Z(s)$ 就有多少个一阶极点。根据给定的入端阻抗函数特性设计出它所对应的网络结构，这一过程称为“实现”这个阻抗函数，它是网络综合的内容之一。这里仅以简单的 RC 二端网络为例，说明如何利用 $Z(s)$ 的部分分式展开来实现 $Z(s)$。例如，给定 $Z(s)$ 的零点在 $s_1 = -1, s_2 = -3$ 处，极点在 $(s_0' = 0, s_1' = -2, s_2' = -4$ 处；并已知零频率下 $\mathrm{Re}Z(j\omega) = 10^3$ 欧姆，我们来按图 6.2.8 的网络形式实现此阻抗函数。根据给定的零极点分布可以写出

$$Z(s) = \gamma \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} = \gamma \frac{s^2+4s+3}{s^3+6s^2+8s} \quad ,$$

其中 γ 是待定常数。在上式中令 $s = j\omega$，然后求出其实部：

$$\mathrm{Re}Z(j\omega) = \gamma \frac{2\omega^4+14\omega^2}{\omega^6+20\omega^4+64\omega^2},$$

因为已知

$$\gamma\left[\frac{2\omega^4+14\omega^2}{\omega^6+20\omega^4+64\omega^2}\right]_{\omega=0} = 10^3,$$

所以有

$$\gamma \frac{14}{64} = 10^3 \quad 或 \quad \gamma = \frac{32}{7}\times 10^3$$

为了对 $Z(s)$ 做部分分式展开，使之成为(6.2.21)式的形式，我们首先求 R_∞，由(6.2.21)式容易看出：

$$R_\infty = \lim_{s\to\infty} Z(s)$$

现在的情况有

$$R_\infty = \lim_{s\to\infty}\left[\gamma \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}\right] = 0$$

然后我们利用求一阶极点处留数的公式(6.2.11)来确定(6.2.21)式中的系数 a_k：在极点 $s_0' = 0$ 处有

$$a_0 = \lim_{s\to 0}[(s-0)Z(s)] = \left[\gamma \frac{s^2+4s+3}{s^2+6s+8}\right]_{s=0} = \frac{3}{8}\gamma$$

在极点 $s_1' = -2$ 处有

$$a_1 = \lim_{s\to -2}[(s-(-2))Z(s)] = \left[\gamma \frac{s^2+4s+3}{s^2+4s}\right]_{s=-2} = \frac{\gamma}{4}$$

在极点 $s_2' = -4$ 处有

$$a_2 = \lim_{s\to -4}[(s-(-4))Z(s)] = \left[\gamma \frac{s^2+4s+3}{s^2+2s}\right]_{s=-4} = \frac{3}{8}\gamma$$

因此，$Z(s)$ 的部分分式展开式为

$$Z(s) = \frac{32}{7}\times 10^3\left(\frac{3/8}{s} + \frac{1/4}{s+2} + \frac{3/8}{s+4}\right)$$

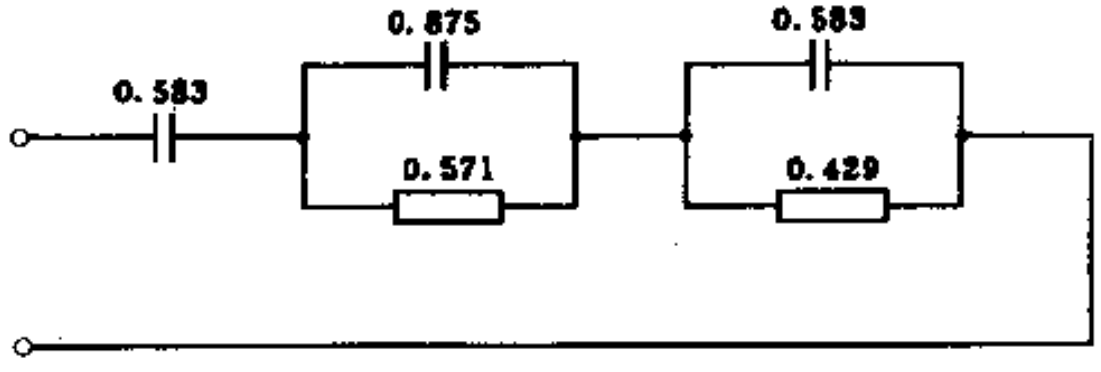


图 6.2.9　*RC* 二端网络

实现该网络所需的元件数值为

$$C_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{8}{3\nu} = \frac{7}{12} \times 10^{-3} = 0.583 \times 10^{-3}(\text{法拉}),$$

$$C_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{4}{\nu} = \frac{7}{8} \times 10^{-3} = 0.875 \times 10^{-3}(\text{法拉}),$$

$$C_2 = \frac{1}{a_2} = \frac{8}{3\nu} = \frac{7}{12} \times 10^{-3} = 0.583 \times 10^{-3}(\text{法拉}),$$

$$R_1 = -1/(C_1 s_1') = \frac{8 \times 10^3}{7 \times 2} = 0.571 \times 10^3(\text{欧姆}),$$

$$R_2 = -1/(C_2 s_2') = \frac{12 \times 10^3}{7 \times 4} = 0.429 \times 10^3(\text{欧姆}),$$

该网络结构如图 6.2.9 所示。图中电容和电阻单位分别为 10^{-3} 法拉和 10^3 欧姆。

§6.3　复变函数的进一步应用

复变函数理论在信息传输领域有着广泛的应用。在第三章和第四章结合拉普拉斯变换已做了若干介绍，本章也介绍了一些实例。下面进一步介绍在系统稳定性和网络设计方面的某些应用。

6.3.1 反馈系统的稳定性

如何保持反馈系统稳定工作，不致产生自激振荡，在理论上和实践上都是一个重要问题，即所谓反馈系统的稳定性问题。在理论上已经有不少判别稳定性的方法，如罗斯－胡维茨方法，奈奎斯特法等。作为本章应用的例子，这里先介绍一下奈奎斯特稳定性判据。请注意怎样将这个工程问题抽象为数学问题，而数学原理又是如何指导工程实践的。

1. 反馈系统简介

图 6.3.1(a) 表示单个回路反馈系统(方框图中只有一个闭合路线。$H_1(s)$ 是正馈网络的传输函数，$H_2(s)$ 是反馈网 络的传输函数。图中⊗表示“混合 器”，负号表示“相减”。原来的输入 $X(s)$ 减去反馈回来的 $H_2(s)Y(s)$ 才是 $H_1(s)$ 系统的真正输入。所以整个反馈系统的输出 $Y(s)$ 与输入 $X(s)$ 之间的关系应该是

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)],$$

由此可得

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = H(s) \qquad (6.3.1)$$

上式中 $H(s)$ 表示整个反馈系统的传输函数，或称闭环传输函数。若将电路从图 6.3.1(a) 中 b 点断开，在 a 点输入，在 b 点取输出，这时输出与输入之间的关系由开环传输函数

$$H'(s) = H_1(s)H_2(s) \qquad (6.3.2)$$

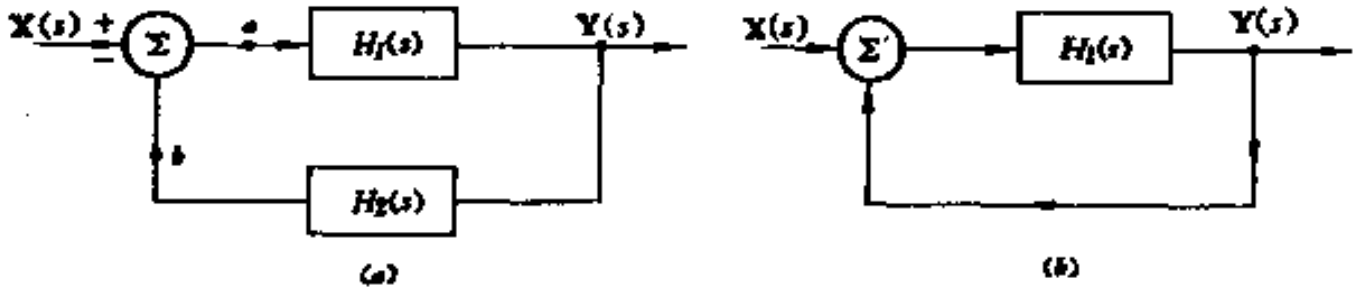


图 6.3.1　反馈系统方框图

联系起来。在许多情况下，反馈网络的传输函数 $H_2(s) = 1$〔参见图 6.3.1(b)〕，这时闭环传输函数是

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)}, \tag{6.3.3}$$

而开环传输函数显然就是 $H_1(s)$。

我们知道(参见 §4.4.4)，如果 $H(s)$ 是稳定的，则 $H(s)$ 的全部极点应位于〔S〕平面的左半平面。由(6.3.1)式，$H(s)$ 的极点要么是 $H_1(s)$ 的极点，要么是〔$1 + H_1(s)H_2(s)$〕的零点。在大多数情况下，子系统的传输函数 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 是稳定的。我们假定 $H_1(s)$ 是稳定的，那么 $H_1(s)$ 的全部极点位于左半平面。于是，若〔$1 + H_1(s)H_2(s)$〕的全部零点亦在左半平面，则整个反馈系统就是稳定的。可见，判别整个反馈系统是否稳定，关键在于确定

$$U(s) = 1 + H_1(s)H_2(s)$$

在右半平面是否有零点。为此，需要仔细研究 $U(s)$ 的特性。

2. 复变函数 $U(s)$ 的特性

设 $U(s)$ 在 $s = s_0$ 点具有 n 阶极点，则我们可将 $U(s)$ 展开为关于 s_0 点的罗朗级数〔参照(6.2.10)式〕：

$$U(s) = \frac{a_{-n}}{(s - s_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(s - s_0)^{n-1}} + \cdots = \frac{1}{(s - s_0)^n}h(s),$$

其中 $h(s_0) \neq 0$，对 $U(s)$ 求一阶导数有

$$\frac{\mathrm{d}U(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{-nh(s)}{(s - s_0)^{n+1}} + \frac{1}{(s - s_0)^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}h(s),$$

由以上二式可得到一个新函数：

$$\frac{1}{U(s)}\frac{\mathrm{d}U(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{-n}{s - s_0} + \frac{1}{h(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}h(s) \tag{6.3.4}$$

可见新函数〔$1/U(s)$〕$\mathrm{d}U(s)/\mathrm{d}s$ 在 s_0 点具有一阶极点，且留数为 $-n$。

现在假定 $U(s)$ 在 $s = s_0$ 点具有 n 阶零点，则我们可将 $U(s)$ 展开为关于 s_0 点的泰勒级数〔参照(6.2.9)式〕：

$$U(s) = a_n(s - s_0)^n + a_{n+1}(s - s_0)^{n+1} + \cdots$$
$$= (s - s_0)^n g(s),$$

其中 $g(s_0) \neq 0$，对 $U(s)$ 求一阶导数有

$$\frac{dU(s)}{ds} = n(s - s_0)^{n-1} g(s) + (s - s_0)^n \frac{d}{ds} g(s)$$

由以上二式可以得到一个新函数：

$$\frac{1}{U(s)} \frac{dU(s)}{ds} = \frac{n}{s - s_0} + \frac{1}{g(s)} \frac{d}{ds} g(s). \tag{6.3.5}$$

可见，若 $U(s)$ 在 $s = s_0$ 点具有 n 阶零点，则新函数 $[1/U(s)]dU(s)/ds$ 在 s_0 点就具有一阶极点，且留数为 n。

在一般情况下，假定 $U(s)$ 在〔S〕平面上有 N 个零点，其阶数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_N$，并有 M 个极点，其阶数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_M$，我们做一个闭曲线 C 包围所有这些零点和极点，考虑函数 $[1/U(s)]dU(s)/ds$ 逆时针沿 C 的积分，利用(6.3.4)和(6.3.5)式，以及留数定理(6.2.16a)式有

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[\frac{1}{U(s)} \frac{dU(s)}{ds}\right] ds = \sum_{p=1}^{N} n_p - \sum_{q=1}^{M} m_q \tag{6.3.6}$$

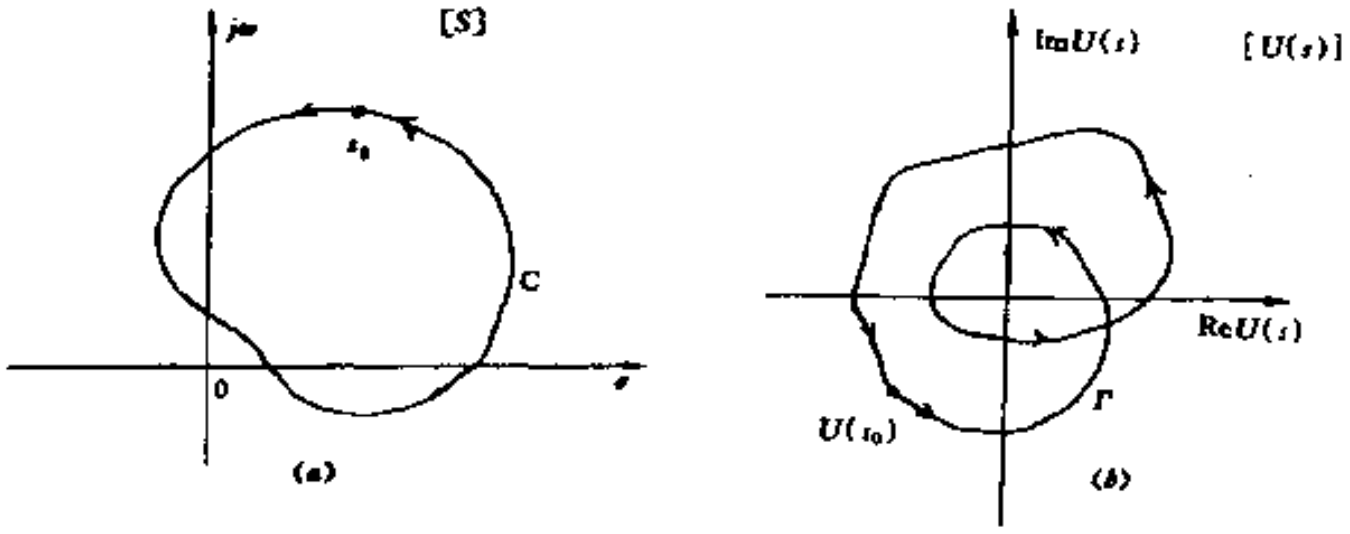
若规定几阶零点(极点)就算作几个零点(极点)，那么，$\sum_{p=1}^{N} n_p = Z$ 就表示零点的总数，而 $\sum_{q=1}^{M} m_q = P$ 则表示极点的总数，于是上式可改写成

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[\frac{1}{U(s)} \frac{dU(s)}{ds}\right] ds = Z - P \tag{6.3.7}$$

上式左端称为对数留数，这是因为

$$\frac{1}{U(s)} \frac{dU(s)}{ds} = \frac{d}{ds}[\ln U(s)].$$

以下为讨论方便，我们将 $U(s)$ 写为极坐标形式



(a)S 平面中的闭曲线C　　(b)$U(s)$ 平面中 $U(s)$ 的变化轨迹

图 6.3.2

$$U(s) = |U(s)| e^{j\phi(s)}$$

于是　　$\ln U(s) = \ln|U(s)| + j\phi(s)$

将以上几个式子代入(6.3.7) 式左端得到

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{d}{ds}[\ln U(s)]\,ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_C d[\ln U(s)]$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C d[\ln|U(s)|] + \frac{1}{2\pi}\oint_C d\phi(s). \qquad (6.3.8)$$

假定闭曲线 C 是由某点 s_0 出发绕行一周后又回到 s_0(图 6.3.2a), $U(s)$ 也将在 $U(s)$ 平面中描绘出变化轨迹, 图 6.3.2(b) 绘出了一个典型的轨迹, 起点为 $U(s_0)$, 行走某一轨迹 Γ 后又回到 $U(s_0)$。现在考虑(6.3.8) 式右端的积分, 我们把闭路积分写成开路积分的形式:

$$\int_{s=a}^{b} d[\ln|U(s)|] = \ln|U(b)| - \ln|U(a)|$$

在闭路情况, 只要令 $b = a$ 就可以了。于是 $|U(b)| = |U(a)|$, 因而

$$\oint_C d[\ln|U(s)|] = 0 \qquad (6.3.9)$$

对于(6.3.8)式右端第二个积分写成开路积分形式有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s=a}^{b} \mathrm{d}\phi(s) = \frac{1}{2\pi}[\phi(b) - \phi(a)] \tag{6.3.10}$$

当 $b = a$(闭路积分)时尽管 $U(b) = U(a)$,但 $U(b)$ 的辐角减去 $U(a)$ 的辐角并不等于零(它们可以相差 2π 的整数倍)。在图 6.3.2(b)中 $U(s)$ 的轨迹 Γ 环绕原点两次,自原点到 Γ 上的点的径矢量将从 $U(s_0)$ 点出发旋转两周后回到 $U(s_0)$ 点,这意味着 $U(s)$ 的辐解将增加 $2\times 2\pi = 4\pi$。在一般情况下,如果闭曲线 Γ 环绕原点 K 次,那么从 s_0 出发沿闭曲线 C 绕行再回到 s_0 点时,$U(s_0)$ 的幅角将增加 $2\pi K$,由此可知(6.3.10)式积分结果为

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{C} \mathrm{d}\phi(s) = \frac{1}{2\pi}(2\pi K) = K. \tag{6.3.11}$$

将(6.3.11)、(6.3.9)和(6.3.8)式代入(6.3.7)式得到

$$K = Z - P \tag{6.3.12}$$

上式告诉我们,要想知道 $U(s)$ 在闭曲线 C 内的零点数与极点数之差,只要对 C 上的所有的点画出 $U(s)$ 的轨迹[在 $U(s)$ 平面],数一数 $U(s)$ 的轨迹环绕原点的次数就行了。我们注意到,以上讨论中闭路积分的方向均取为逆时针方向。如果均取为顺时针方向,则(6.3.7)式右端的$(Z - P)$应换为$(P - Z)$,(6.3.11)式右端的 K 应换为$(-K)$。这样一来,(6.3.12)式仍成立。

我们的目的是研究函数 $U(s)$ 在整个右半平面的特性,这时,我们可以把闭曲线 C 当作 $j\omega$ 轴和一个半径为 $R(R\to\infty)$ 的半圆构成的闭曲线,如图 6.3.3 所示。这样,$U(s)$ 如果在右半平面有零点和极点的话,必将全部包围在闭曲线 C 内。对于实际的反馈系统,当 $R\to\infty$ 时$(R = |s|)$,$|U(s)|$ 为有限值(常数或零),因而半径为 $R\to\infty$ 的半圆弧映射到 $U(s)$ 平面上仅占 $U(s)$ 轨迹上的一个点,所以只需考虑 ω 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 时函数 $U(j\omega)$ 的轨迹就足够了。结论是,在 $U(s)$ 平面上函数 $U(j\omega)$ 环绕原点的次数等于 $U(s)$ 在右半平面上的零点数与极点数之差。

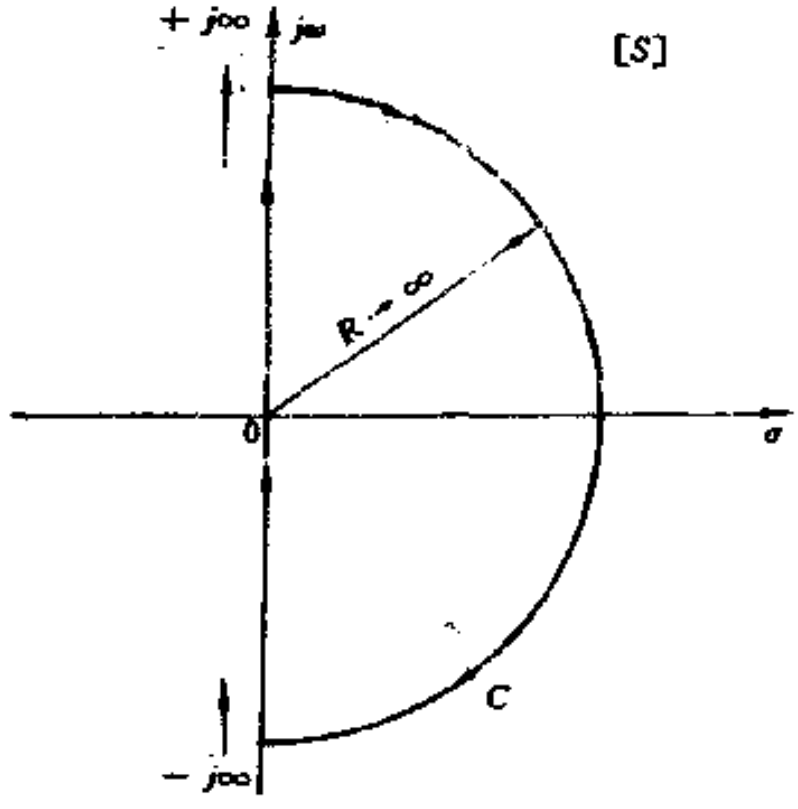


图 6.3.3 “包围”右半平面的闭曲线

3. 奈奎斯特稳定性判据

现在我们来分析反馈系统的稳定性问题。假定子系统是稳定的，即 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 在右半平面(包括 $j\omega$ 轴上)没有极点。当 $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$ 时，我们在 $U(s)$ 平面做出 $U(j\omega) = 1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)$ 的轨迹，数一数这轨迹环绕原点的次数 K，则这个 K 值就是 $U(j\omega)$ 在 S 平面右半平面上的零点数。我们知道，一个稳定的反馈系统在右半平面 $U(s)$ 不能有零点，这就相当于说在 $U(s)$ 平面上 $U(j\omega)$ 的轨迹($-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$) 不环绕原点。

由于在测量上和计算上采用开环传输函数(6.3.2) 式

$$H'(s) = H_1(s)H_2(s)$$

比较方便，所以经常采用的是在 $H'(s)$ 平面上分析 $H'(j\omega)$ 的轨迹(称为开环传输轨迹)，而不是做出 $U(j\omega) = 1 + H'(j\omega)$ 的轨迹。然而前面的一系列讨论仍然成立，只不过 $U(s)$ 平面上的原点

$(0,0)$ 改成 $H'(s)$ 平面上的$(-1,0)$ 点就行了。因此，我们可以说：**如果开环传输轨迹不环绕$(-1,0)$ 点，则系统是稳定的。**这就是所谓奈奎斯特稳定性判据。在 $H'(s)$ 平面上绘出的开环传输轨迹图形称为奈奎斯特图。由于 $H'(s)$ 一般为实系数的有理分式，很容易证明，$\mathrm{Re}H'(j\omega)$ 是 ω 的偶函数，$\mathrm{Im}H'(j\omega)$ 是 ω 的奇函数，因而在 $H'(s)$ 平面上与正 ω 值对应的轨迹和与负 ω 值对应的轨迹是对称于实轴的。所以，在绘制奈奎斯特图时，只要绘出正频率轨迹就可以了，必要时，相应于负频率的一半轨迹可由正频率轨迹对该平面实轴的镜像直接得到。

例 6.3.1　反馈系统的开环传输函数为

$$H'(s) = \mu \frac{s^3 + 2s + 1}{3s^3 + 4s^2 + 7s + 2}$$

设其中常数 $\mu = 5$，试判别该系统的稳定性。

解　在上式中令 $s = j\omega$，对 ω 的不同值计算出 $H'(j\omega)$ 值如下表：

ω	$H'(j\omega)$	ω	$H'(j\omega)$
0	$2.50 - j0$	1.7	$-0.26 + j0.87$
0.5	$1.73 - j1.05$	1.8	$0 + j1.02$
1.0	$0.5 - j1.5$	2.0	$0.44 + j1.12$
1.2	$-0.33 - j1.17$	3.0	$1.29 + j0.81$
1.4	$-0.79 - j0.26$	4.0	$1.48 + j0.59$
1.5	$-0.73 + j0.23$	6.0	$1.59 + j0.38$
1.6	$-0.53 + j0.61$	10.0	$1.64 + j0.22$

据上表所列数值可绘出如图 6.3.4 所示的开环传输轨迹$(0 \leqslant \omega \leqslant \infty)$。我们看到，它并未包围$(-1.0)$ 点，所以该反馈系统是稳定的。但须注意，$H'(j\omega)$ 的数值是与常数 μ 成正比的，当 μ 值增大时，轨迹图形将扩大，这就能把$(-1,0)$ 点包围进来，因而系统成为不稳定的。对于本例而言，$\mu > 6.5$ 就可能使系统成为不稳定的。

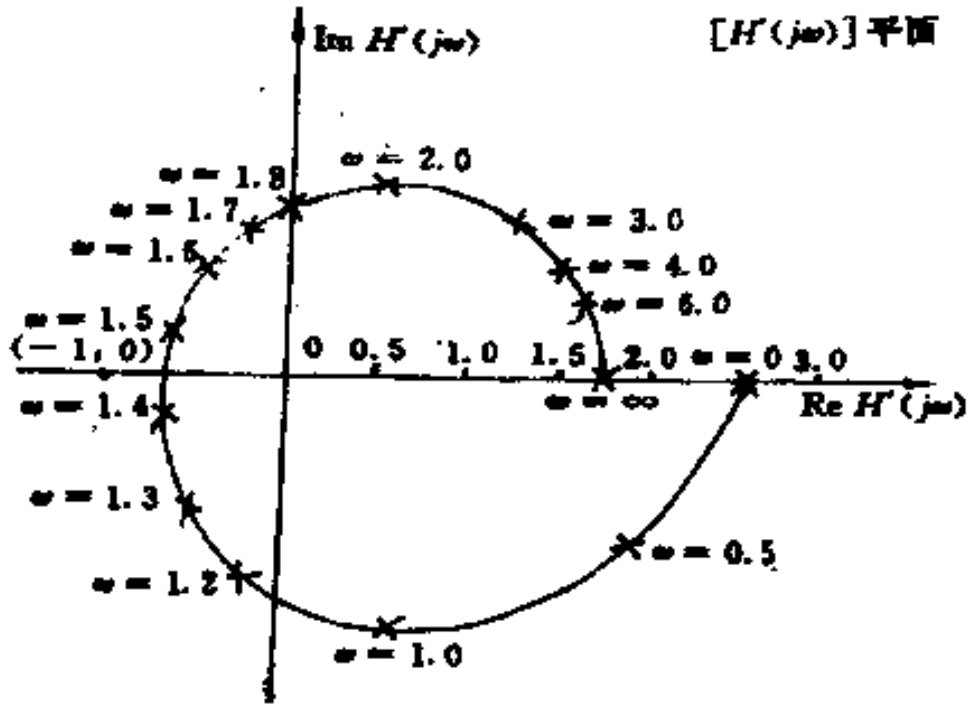


图 6.3.4　例 6.3.1 的奈奎斯特图

例 6.3.2　由参数完全相同的单级电路组成的三级反馈放大器，其开环传输函数(开环增益)为

$$H'(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_o})^3}, \tag{6.3.13}$$

其中 k 是与电路元件参数有关的常数。试确定该放大器保持稳定的情况下 k 可以取的最大值 k_{max}。

解　首先根据(6.3.13)式做奈奎斯特图，如图 6.3.5 所示。图中坐标原点对应于 $\omega = \pm\infty$，临界点$(-1,0)$未被包围在开环传输轨迹内部。如果线段 $\overline{OA} \geqslant 1$，则系统就变为不稳定的了。在(6.3.13)式中令 $\omega = 0$，得到

$$H'(j0) = k,$$

因而图中线段$\overline{OB}$对应于 k 值。我们来确定 k 可以取的最大值。在图中 A 点，$H'(j\omega)$ 必为一个负实数，亦即 $H'(j\omega)$ 在 A 点的辐角为 $-\pi$，我们将 A 点处对应的频率记为 ω_c。另一方面，由(6.3.13)

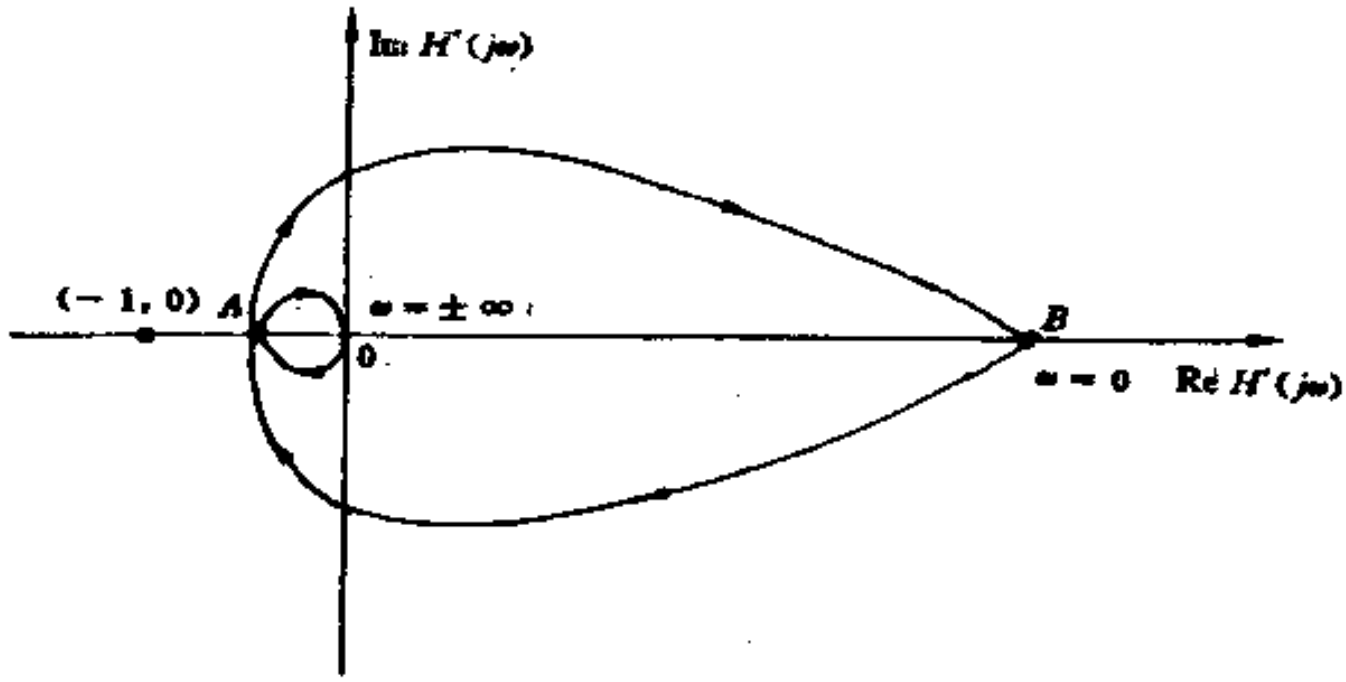


图 6.3.5 (6.3.13) 式的开环传输轨迹

式可知，$H'(j\omega)$ 的辐角为

$$\varphi = -3\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$$

所以对图中 A 点可得以下的方程式：

$$3\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_c}{\omega_o}\right) = \pi \text{ 或} \frac{\omega_c}{\omega_o} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

因此

$$|H'(j\omega_c)| = \frac{k}{[1+(\sqrt{3})^2]^{3/2}} = \frac{k}{8}$$

亦即

$$\overline{OA} = \frac{k}{8}$$

为保证这个三级放大器的稳定性，要求 $\overline{OA}$ 的长度最大不能超过 1，因此有

$$k_{\max} = 8。$$

6.3.2 电路系统稳定性的罗斯 – 胡维茨判据

1. 胡维茨多项式

所有零点均位于 S 平面左半平面(包括 $j\omega$ 轴)的多项式称为胡维茨多项式。前已指出,任何实际的线性电路系统的传输函数 $H(s)$ 总可表示成两个实系数多项式之比:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

我们已经知道,一个稳定系统的传输函数的全部极点应位于 S 平面的左半平面,亦即 $H(s)$ 的分母多项式 $D(s)$ 必须是一个胡维茨多项式。所以,我们有必要对这种多项式的性质进行某些讨论。

胡维茨多项式的系数必定全是正数。这是很明显的,因为这种实系数多项式总可以分解因式:

$$\begin{aligned} D(s) &= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \\ &= a_0 (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \cdots (s + \beta_1 + j\gamma_1)(s + \beta_1 - j\gamma_1) \cdots \\ &= a_0 (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \cdots [(s + \beta_1)^2 + \gamma^2] \cdots \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

它的所有的零点均位于左半平面,就要求 α_1、$\alpha_2 \cdots$、β_1、$\beta_2 \cdots$ 均为正,因而 a_0、a_1、$\cdots$、a_{n-1}、a_n 也均为正。由此可知,若一个多项式中有的系数为负,那它就不是一个胡维茨多项式。但是,若一个多项式中的系数均为非零正数,它却不见得是一个胡维茨多项式,它的零点仍可能出现在右半平面,故尚须进一步判别。

2. 罗斯 – 胡维茨判据

一个多项式

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

为胡维茨多项式的充分必要条件是:在 $a_0 > 0$ 时,由这些系数构成的胡维茨矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7\cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6\cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5\cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \end{pmatrix} \tag{6.3.15}$$

里的各左上角子行列式均大于零,即

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \cdots \tag{6.3.16}$$

限于篇幅,这个定理的证明不做介绍。

如果电路系统传输函数 $H(s)$ 的分母多项式 $D(s)$ 诸系数满足(6.3.16)的条件,那么 $H(s)$ 的极点就都在左半平面,因而系统是稳定的。所以,条件(6.3.16)可以当作电路系统的另一个稳定性判据,称为罗斯 - 胡维茨判据。

例6.3.3 试判别 $D(s) = s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 17s + 6$ 是否胡维茨多项式。

解 $a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 17, a_3 = 17, a_4 = 6$,我们有

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 7 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 1 & 17 \end{vmatrix} = 102 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 17 & 0 \\ 1 & 17 & 6 \\ 0 & 7 & 17 \end{vmatrix} = -6 \times 49 + 17 \times 102$$

$$= 1440 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 17 & 0 & 0 \\ 1 & 17 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 6 \times 1440$$

$$= 8640 > 0,$$

可见满足条件(6.3.16),所以本题的 $D(s)$ 是一个胡维茨多项式。

例 6.3.4　试判别 $D(s) = s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 16s + 5$ 是否胡维茨多项式。

解　$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 7, a_3 = 16, a_4 = 5$,我们有

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -2 < 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -5 \times 4 + 16 \times (-2)$$

$$= -52 < 0,$$

可见不满足条件(6.3.16),故本题的 $D(s)$ 不是胡维茨多项式。

例 6.3.5　试用罗斯－胡维茨判据求三级反馈放大器的稳定条件。

解　由(6.3.13)式,三级反馈放大器的开环传输函数为

$$H'(s) = \frac{k}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^3}$$

反馈系统的闭环传输函数的分母为[参阅(6.3.1)和(6.3.2)式]

$$D(s) = 1 + H'(s)$$

$$= 1 + \frac{k}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3 + 3\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 3\frac{s}{\omega_0} + 1 + k}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3 + 3\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 3\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

$D(s)$的零点决定于上式分子多项式的零点，考查这多项式是否胡维茨多项式，我们有 $a_0 = 1 + k, a_1 = \frac{3}{\omega_0}, a_2 = \frac{3}{\omega_0^2}, a_3 = \frac{1}{\omega_0^3}$，

$a_0 > 0, a_1 > 0$，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{\omega_0} & \frac{1}{\omega_0^3} \\ 1 + k & \frac{3}{\omega_0^2} \end{vmatrix} = \frac{9}{\omega_0^3} - \frac{1}{\omega_0^3}(1 + k) > 0,$$

从最后这个不等式中消去 ω_0 得到：$8 - k > 0$ 或 $k < 8$，所以，当 $k < 8$ 时所考查的多项式满足胡维茨多项式的条件，这时三级反馈放大器才是稳定的，这与前面用奈奎斯特判据分析的结果一致。

3. 偶部与奇部之比

将多项式 $D(s)$ 表示成(注意系数下标与前不同，仅为方便)

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

若 n 为偶数，则

$$D(-s) = s^n - a_{n-1}s^{n-1} + \cdots - a_1 s + a_0$$

于是$[D(s) + D(-s)]$仅包含偶次幂项，称为 $D(s)$ 的偶部；$[D(s) - D(-s)]$仅包含奇次幂项，称为 $D(s)$ 的奇部。胡维茨多项式的其他重要性质可通过研究其偶部与奇部之比来得到，即考虑

$$F(s) = \frac{D(s) + D(-s)}{D(s) - D(-s)} \tag{6.3.17}$$

或
$$F(s)=\frac{s^n+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_2s^2+a_0}{a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-3}s^{n-3}+\cdots+a_1s} \tag{6.3.18}$$

显然，上式分子与分母多项式的最高次幂仅能相差 1。

若令
$$G(s)=\frac{D(s)}{D(-s)} \tag{6.3.19}$$

则(6.3.17)式又可表示成
$$F(s)=\frac{G(s)+1}{G(s)-1} \tag{6.3.20}$$

由上式看出，$F(s)$ 与 $G(s)$ 之间的关系是类似于(5.3.9)式的分式线性变换，所不同的是 $F(s)$ 平面的左半平面(而不是右半平面)映射到 $G(s)$ 平面的单位圆内部，如图 6.3.6 所示。从图中可以看出，这两个平面之间的映射关系可表示成如下的条件：

$$\left.\begin{aligned}&|G(s)|>1,\text{对应于 }\mathrm{Re}F(s)>0,\\&|G(s)|=1,\text{对应于 }\mathrm{Re}F(s)=0,\\&|G(s)|<1,\text{对应于 }\mathrm{Re}F(s)<0,\end{aligned}\right\} \tag{6.3.21}$$

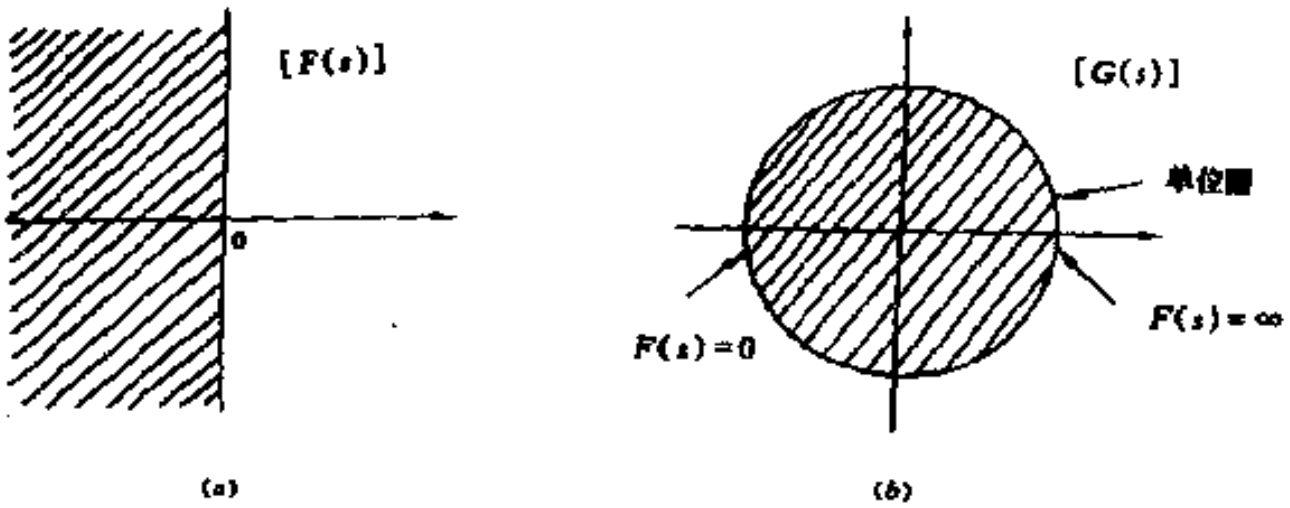


图 6.3.6

由(6.3.19)式可知，$G(s)$ 的模 $|G(s)|$ 应与 $D(s)$ 和 $D(-s)$ 的模有关。我们讨论一个简单情况，即 $D(s)$ 是一个实系数三次多项式，假定它是胡维茨多项式，它在 S 平面的左半平面有一个实数

零点$s_0 = \sigma_0$和一对复数共轭零点s_1、$s_1^* = \sigma_1 \pm j\omega_1$且$\sigma_0 < 0$, $\sigma_1 < 0$。如图6.3.7所示,那么这个三次多项式可表示为

$$D(s) = (s - s_0)(s - s_1)(s - s_1^*)$$

根据图6.3.7(a)和图6.3.7(b),我们可计算出$D(s)$和$D(-s)$的模:

$$|D(s)| = \sqrt{[(\sigma - \sigma_0)^2 + \omega^2][(\sigma - \sigma_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2][(\sigma - \sigma_1)^2 + (\omega + \omega_1)^2]}$$

$$= \sqrt{[(\sigma - \sigma_0)^2 + \omega^2][(\sigma - \sigma_1)^4 + 2(\sigma - \sigma_1)^2(\omega^2 + \omega_1^2) + (\omega^2 - \omega_1^2)^2]} \tag{6.3.22a}$$

$$|D(-s)| = \sqrt{[(\sigma + \sigma_0)^2 + \omega^2][(\sigma + \sigma_1)^4 + 2(\sigma + \sigma_1)^2(\omega^2 + \omega_1^2) + (\omega^2 - \omega_1^2)^2]} \tag{6.3.22b}$$

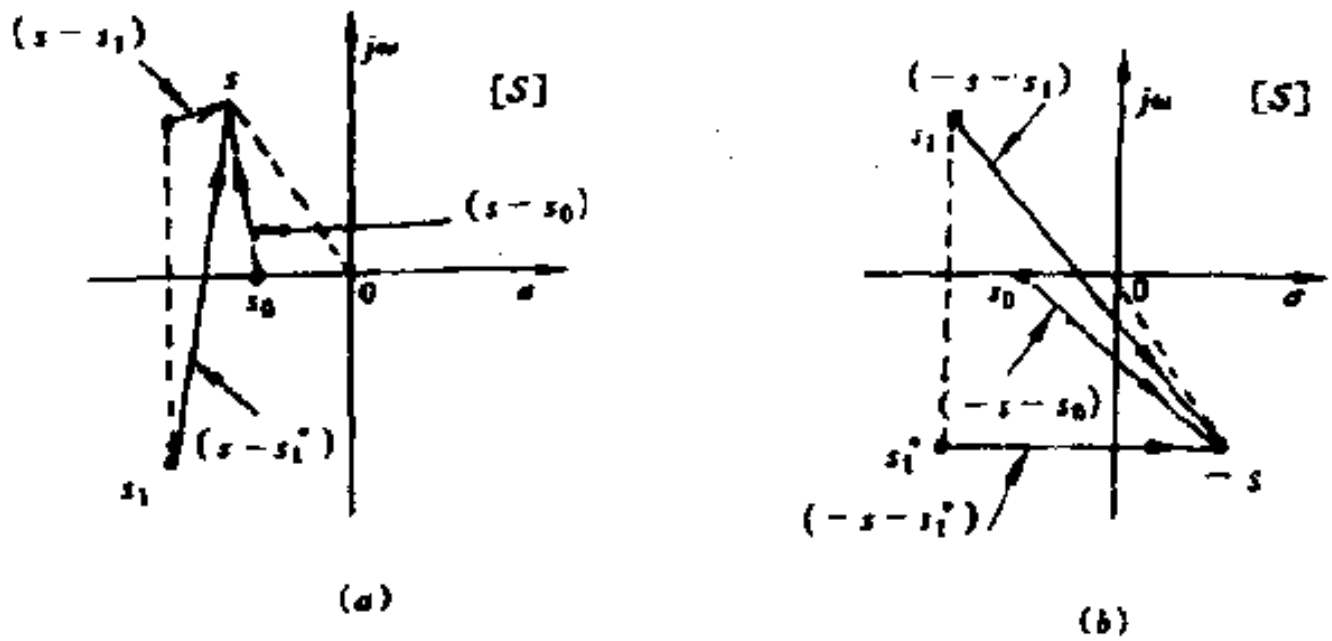


图6.3.7

若动点s位于左半平面($\sigma < 0$),如图6.3.7(a)所示。$-s$则位于右半平面,如图6.3.7(b)所示。比较(6.3.22a)式和(6.3.22b)式(注意$\sigma_1 < 0$)可得$|D(s)| < |D(-s)|$;若S点在右半平面($\sigma > 0$),则$|D(s)| > |D(-s)|$,若s点在虚轴上($\sigma = 0$),则$|D(s)| = |D(-s)|$,利用(6.3.19)式可将这三种情况

表示成

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \mathrm{Re}[s] > 0,\ |G(s)| > 1,\\ \text{当 } \mathrm{Re}[s] = 0,\ |G(s)| = 1,\\ \text{当 } \mathrm{Re}[s] < 0,\ |G(s)| < 1,\end{array}\right\} \tag{6.3.23}$$

可以进一步证明(6.3.23)式的结论对于最高次幂大于3的胡维茨多项式仍成立。把(6.3.23)和(6.3.21)式的论断综合起来可以得到胡维茨多项式偶部与奇部之比 $F(s)$ 的下述性质：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \mathrm{Re}[s] > 0, \mathrm{Re}F(s) > 0,\\ \text{当 } \mathrm{Re}[s] = 0, \mathrm{Re}F(s) = 0,\\ \text{当 } \mathrm{Re}[s] < 0, \mathrm{Re}F(s) < 0,\end{array}\right\} \tag{6.3.24}$$

(6.3.24)的条件也可作为另一种判别胡维茨多项式的充分必要条件。

在电路理论中可以看到，对于由纯电抗构成的任意复杂二端网络，其入端阻抗函数 $Z(s)$ 恰恰具有胡维茨多项式偶部与奇部之比的形式。或者说，电抗函数 $Z(s)$ 的分母和分子多项式之和为胡维茨多项式。我们不准备证明这一论断，仅仅指出由于电抗网络是不消耗能量的网络(理想情况下)，所以它的入端阻抗实部在虚轴上[①]必须等于零。即当 $\mathrm{Re}[s] = 0$ 时，$\mathrm{Re}Z(s) = 0$，这是符合(6.3.24)中第二个条件的。

4.再论偶部与奇部之比

设由(6.3.17)和(6.3.18)式所定义的 $F(s)$ 在 $s = s_0$ 点具有 n 阶极点，则可将 $F(s)$ 展开为关于 s_0 点在罗朗级数

$$F(s) = \frac{a_{-n}}{(s-s_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(s-s_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{s-s_0} + a_0 + a_1(s-s_0) + \cdots$$

当 s 非常接近 s_0 时，上式主要决定于第一项：

① 凡提及“在虚轴上”或“令 $s = j\omega$”或“令 $\sigma = 0$”其物理意义是指在稳态情况下。

$$F(s) \approx \frac{a_{-n}}{(s - s_0)^n}$$

设复常数 $a_{-n} = ke^{j\alpha}$（k 和 α 是实常数）和 $(s - s_0) = \rho e^{j\theta}$（$\rho$ 非常小），于是

$$F(s) \approx \frac{k}{\rho^n} e^{j(\alpha - n\theta)},$$

$$\mathrm{Re}F(s) \approx \frac{k}{\rho^n} \cos(n\theta - \alpha) \tag{6.3.25}$$

当 s 沿着环绕 s_0 点的以 ρ 为半径的小圆绕行一周时，θ 由 0 变化到 2π，α 为常数，$\cos(n\theta - \alpha)$ 将改变符号，因而在这小圆周上 $\mathrm{Re}F(s)$ 兼取正负值。然而，由(6.3.24)式可知，若 $D(s)$ 是一个胡维茨多项式，$\mathrm{Re}F(s)$ 在左半平面（或者在右半平面）内不能改变符号。所以，s_0 点不能位于左半平面或右半平面，亦即 $F(s)$ 在左半平面或右半平面不能具有极点。那么极点 s_0 只能在 $j\omega$ 轴上。注意 $(s - s_0) = \rho e^{j\theta}$，(6.3.24) 的条件可表示为

$$\mathrm{Re}F(s) \begin{cases} > 0, & -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ < 0, & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases} \tag{6.3.26}$$

在(6.3.25)式中若 $n > 1$，则 $\mathrm{Re}F(s)$ 在小圆周上的值至少改变符号 4 次，这就不满足条件(6.3.26)式，所以 $F(s)$ 在 $j\omega$ 轴上的极点不能是高于一阶的极点。若 $n = 1$，要满足条件(6.3.26)式，必须 $\alpha = 0$，所以 $F(s)$ 在 $j\omega$ 轴上只能有一阶极点，并且其留数 $a_{-1} = ke^{j\alpha} = k$ 为正实数。由此可得出结论：

若 $D(s)$ 是一个胡维茨多项式，则 $F(s)$ 多项式偶部与奇部之比仅能在 $j\omega$ 轴上具有一阶极点，且其留数为正实数。

现在我们再来证明：若 $F(s)$ 仅在 $j\omega$ 轴上具有一阶极点，且留数为正实数，则 $D(s)$ 是一个胡维茨多项式。因为 $F(s)$ 是两个多项式之比，并具有一阶极点（包括无限远点），于是它可以按部分分式展开：

$$F(s) = k_\infty s + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s + s_i},$$

其中第一项表示在 $s = \infty$ 处(无限远点)具有一阶极点，k_i 是第 i 个一阶极点处的留数，k_∞ 和 k_i 均为正实数。因为 $F(s)$ 的极点仅在 $j\omega$ 轴上成对出现，故上式写为

$$F(s) = k_\infty s + \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\frac{1}{s + j\omega_i} + \frac{1}{s - j\omega_i} \right), \qquad (6.3.27)$$

将 $s = \sigma + j\omega$ 代入上式并取实部有

$$\mathrm{Re}F(s) = k_\infty \sigma + \sigma \sum_{i=1}^{n} k_i \left[\frac{1}{\sigma^2 + (\omega + \omega_i)^2} + \frac{1}{\sigma^2 + (\omega - \omega_i)^2} \right],$$

可以看出，上式求和号内每项均为正数，k_i，k_∞ 亦为正数。所以，若 $\sigma > 0$，则 $\mathrm{Re}F(s) > 0$，若 $\sigma < 0$，则 $\mathrm{Re}F(s) < 0$，若 $\sigma = 0$，则 $\mathrm{Re}F(s) = 0$，可见满足条件(6.3.24)式。所以我们可以总结出以下结论：

$D(s)$ 为胡维茨多项式的充分必要条件是 $F(s)$(其偶部与奇部之比)只在 $j\omega$ 轴上具有一阶极点且其留数为正实数。(6.3.28)

这是检验一个多项式是否胡维茨多项式的一个比较方便的判据。

例 6.3.6　利用判据(6.3.28)判定 $D(s) = s^3 + 6s^2 + 2s + 1$ 是否胡维茨多项式。

解　$$F(s) = \frac{6s^2 + 1}{s^3 + 2s} = \frac{6s^2 + 1}{s(s^2 + 2)},$$

它在 $s = 0, \pm j\sqrt{2}$ 处具有一阶极点，是在 $j\omega$ 轴上，其留数为

$$\operatorname*{Res}_{s=0} F(s) = \left[s \cdot \frac{6s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \right]_{s=0} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{S=j\sqrt{2}} F(s) = \left[(s - j\sqrt{2}) \frac{6s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \right]_{s=j\sqrt{2}} = \frac{11}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-j\sqrt{2}} F(s) = \left[(s + j\sqrt{2}) \frac{6s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} \right]_{s=-j\sqrt{2}} = \frac{11}{4},$$

可见留数均为正实数，所以本题给定的 $D(s)$ 是一个胡维茨多项式。

5. n 为奇数的情况

以上讨论偶部与奇部之比 $F(s)$ 是假定胡维茨多项式 $D(s)$ 的最高次幂为偶数，如果给定的胡维茨多项式最高次幂为奇数，则我们可以讨论奇部与偶部之比，即 $1/F(s)$，注意到

$$\frac{1}{F(s)}=\frac{1}{\mathrm{Re}F(s)+j\mathrm{Im}F(s)}=\frac{\mathrm{Re}F(s)-j\mathrm{Im}F(s)}{[\mathrm{Re}F(s)]^2+[\mathrm{Im}F(s)]^2}$$

可看出，若 $\mathrm{Re}F(s)>0$，则 $\mathrm{Re}[1/F(s)]>0$；若 $\mathrm{Re}F(s)<0$，则 $\mathrm{Re}[1/F(s)]<0$；若 $\mathrm{Re}F(s)=0$，则 $\mathrm{Re}[1/F(s)]=0$。所以上述关于 $\mathrm{Re}F(s)$ 得出的各种结论也都适用于 $\mathrm{Re}[1/F(s)]$。故我们可以说，$D(s)$ 为胡维茨多项式的充分必要条件是 $F(s)$ 或 $1/F(s)$ 仅在 $j\omega$ 轴上具有一阶极点且留数为正实数。

在电路问题中，如果 $F(s)$ 具有电抗函数的意义，则 $1/F(s)$ 具有电纳函数的意义。

6.3.3 *LC* 二端网络结构的实现

1. 频率模型

前已指出，纯电抗二端网络的入端阻抗函数 $Z(s)$ 具有胡维茨多项式偶部与奇部之比（或反之）的形式。设 $Z(s)=R(\sigma,\omega)+jX(\sigma,\omega)$，由条件(6.3.24)可知，当 $\sigma=0$ 时，$R(\sigma,\omega)=0$，当 $\sigma>0$ 时，$R(\sigma,\omega)>0$。这说明在 $\sigma=0$ 处 $R(\sigma,\omega)$ 函数的斜率是正值，即 $\partial R(\sigma,\omega)/\partial\sigma>0$. 但 $Z(s)$ 在 S 平面右半平面是解析的，由解析函数的柯西－黎曼条件有

$$\frac{\partial X(\sigma,\omega)}{\partial\omega}=\frac{\partial R(\sigma,\omega)}{\partial\sigma}\quad\text{和}\quad\frac{\partial X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma}=-\frac{\partial R(\sigma,\omega)}{\partial\omega}$$

因而有

$$\frac{\partial X(\sigma,\omega)}{\partial\omega}>0\qquad(\text{当}\ \sigma=0)$$

这就是说，纯电抗网络的入端电抗函数 $X(\sigma,\omega)$ 总是随频率 ω 的

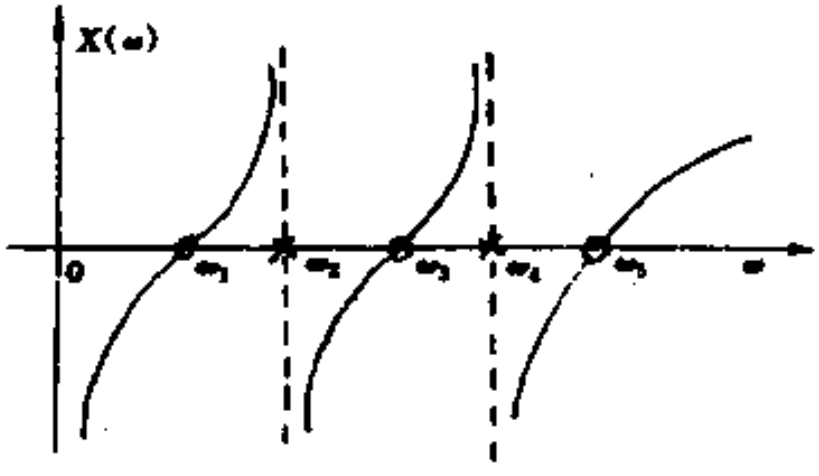


图 6.3.8

增加而增加。这种情况只有当 $Z(s)$ 在 $j\omega$ 轴上的零点和极点互相交替地间隔出现才是可能的。这是电路理论中的一个重要定理(福斯特定理)。电抗函数 $X(\omega)$ 随 ω 而变化的一般图形如图 6.3.8 所示。由此可知，$Z(j\omega) = jX(\omega)$ 的零极图就是在虚轴上的一系列互相交替的零点和极点，并且这些零点和极点只能是一阶的〔参照条件(6.3.28)〕，图 6.3.9 表示一个典型的 $Z(j\omega)$ 的零极图，图中为方便把 $\omega = \infty$ 也表示为有限点，这种零极图在网络设计中称为频率模型。给定了函数 $Z(s)$ 的频率模型(即给定零极点位置)，除了一个待定常数外就可完全确定 $Z(s)$ 的函数形式。

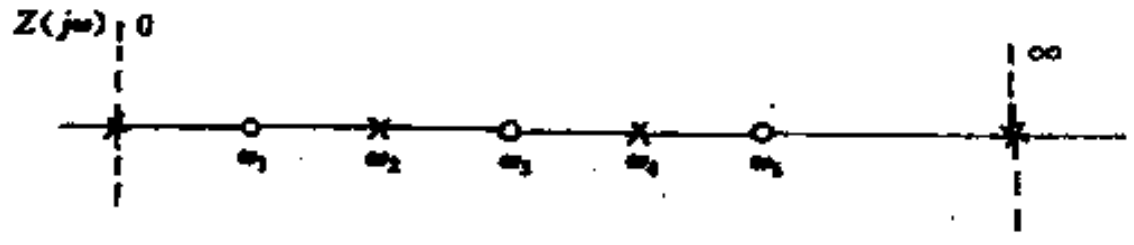


图 6.3.9

2. 网络结构的实现

设 $Z(s)$ 在 $s = \pm j\omega_1, \pm j\omega_3, \cdots, \pm j\omega_v$ 有一阶零点，同时在 $s = 0, \pm j\omega_2, \pm j\omega_4, \cdots, \pm j\omega_{v-1}$ 和 ∞ 处有一阶极点，我们就可以写出

$$Z(s) = \frac{k_\infty(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)\cdots(s^2+\omega_\nu^2)}{s(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)\cdots(s^2+\omega_{\nu-1}^2)} \quad (6.3.29)$$

上式分子最高次幂比分母大 1，故 $s=\infty$ 处为一阶极点。分母中的单独 s 因子表示 $s=0$ 处的一阶极点。k_∞ 为正实常数。为将 (6.3.29) 式按部分分式展开，我们令 $s^2=p$，于是有

$$\frac{Z(s)}{s} = k_\infty \frac{(p+\omega_1^2)(p+\omega_3^2)\cdots(p+\omega_\nu^2)}{p(p+\omega_2^2)(p+\omega_4^2)\cdots(p+\omega_{\nu-1}^2)}\Bigg|_{p=s^2}$$

$$= \left[k_\infty + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=2,4\cdots}^{\nu-1} \frac{k_i}{p+\omega_i^2}\right]_{p=s^2}$$

对上式两端乘以 s 得

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=2,4,\cdots}^{\nu-1} \frac{k_i s}{s^2+\omega_i^2} \quad (6.3.30a)$$

$$= k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=2,4,\cdots}^{\nu-1} \frac{1}{\frac{s}{k_i} + \frac{1}{k_i s/\omega_i^2}} \quad (6.3.30b)$$

其中 k_∞、k_0、k_i 是各一阶极点的留数，均为正实数〔条件 (6.3.28)〕。由(6.3.30) 式表示的 $Z(s)$ 既然是 LC 二端网络的入端阻抗，这种网络的一种可能的结构就可由(6.3.30b) 式确定出来。为使物理意义更清楚，在(6.3.30b) 式中代以

$$k_\infty = L_\infty, \quad k_0 = \frac{1}{C_0}, \quad k_i = \frac{1}{C_i}, \quad \frac{k_i}{\omega_i^2} = L_i,$$

可得：

$$Z(s) = L_\infty s + \frac{1}{C_0 s} + \sum_{i=2,4,\cdots}^{\nu-1} \frac{1}{C_i s + \frac{1}{L_i s}} \quad (6.3.31)$$

上式第一项对应于感抗，第二项对应于容抗，求和号内的每项对应着一个 LC 并联谐振回路的总电抗，求和表示串联，显然(6.3.31) 式对应于图 6.3.10(a) 的网络结构。

如果 LC 二端网络的入端电纳函数的部分分式展开式为

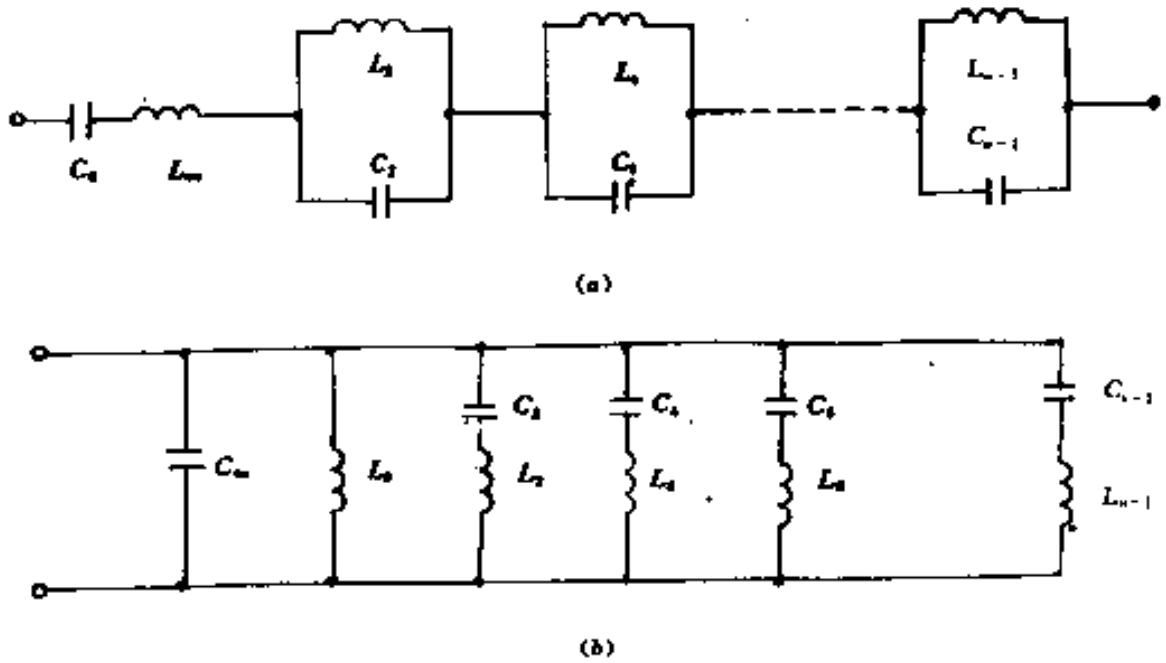


图 6.3.10　LC 二端网络的一般结构

$$Y(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=2,4,\cdots}^{\nu-1} \frac{k_i s}{s^2 + \omega_i^2}$$

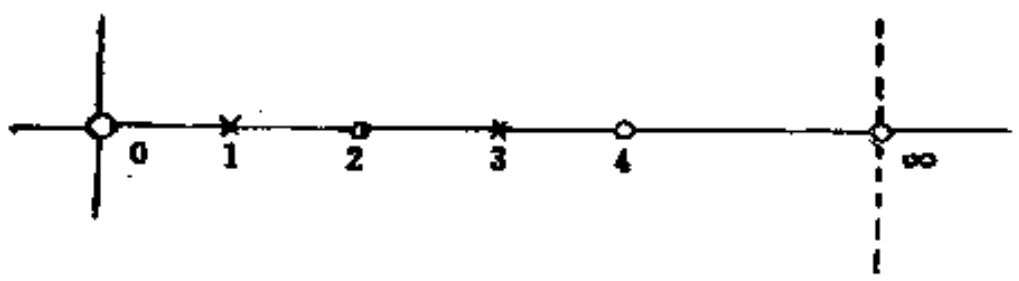
则可令 $k_\infty = C_\infty, k_0 = \dfrac{1}{L_0}, k_i = \dfrac{1}{L_i}, k_i/\omega_i^2 = C_i$ 得

$$Y(s) = C_\infty s + \frac{1}{L_0 s} + \sum_{i=2,4,\cdots}^{\nu-1} \frac{1}{L_i s + \dfrac{1}{C_i s}} \tag{6.3.32}$$

上式第一项对应容性电纳，第二项对应感性电纳，求和号内每项对应一个串联 LC 谐振回路的总电纳，求和表示并联。显然(6.3.32)式对应于图 6.3.10(b) 的网络结构。

可见，只要给定 LC 二端网络阻抗函数(或导纳函数)的频率模型，我们就可以确定其函数形式，并进一步求出其对应的网络结构。这一过程称为“实现”该网络。

例 6.3.7　给定 LC 二端网络的频率模型为



且当 $\omega = 5$ 时，$X(j\omega) = \dfrac{315}{128}$，求网络结构。

解　首先写出 $Z(s)$ 函数，由频率模型可知：

$$Z(s) = \frac{k_\infty s(s^2+4)(s^2+16)}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

将 $s = j5$ 和 $Z(s) = j\dfrac{315}{128}$ 代入上式得 $k_\infty = 1$，故上式化为

$$Z(s) = \frac{s(s^2+4)(s^2+16)}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

将上式两端除以 s，做部分分式展开，并用求留数方法定出各系数得：

$$\frac{Z(s)}{s} = 1 + \frac{45/8}{s^2+1} + \frac{35/8}{s^2+9}$$

于是有

$$\begin{aligned} Z(s) &= s + \frac{(45/8)s}{s^2+1} + \frac{(35/8)s}{s^2+9} \\ &= s + \frac{1}{(8/45)s + [(45/8)s]^{-1}} + \frac{1}{(8/35)s + \dfrac{1}{(35/72)s}} \end{aligned}$$

可见 $L_\infty = 1, C_2 = 8/45, L_2 = 45/8, C_4 = 8/35, L_4 = 35/72$[①]，类似于图 6.3.10($a$) 的网络结构如图 6.3.11 所示。

对应于 $Z(s)$ 的 $Y(s)$ 函数为

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{Z(s)} &= \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)(s^2+16)} \\ &= \frac{2}{(64/9)s} + \frac{(5/16)s}{s^2+4} + \frac{(35/64)s}{s^2+16} \end{aligned}$$

按上式可得到类似于图 6.3.10(b) 的网络结构(图 6.3.12)。

① 这些元件数值是归一化数值，参见 §4.4.6 第一段。

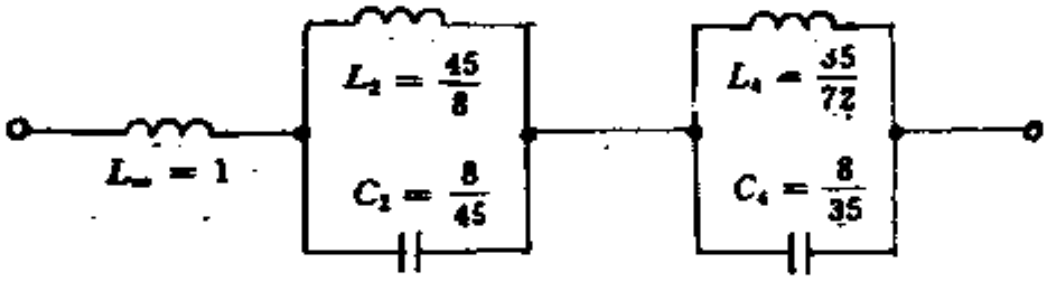


图 6.3.11

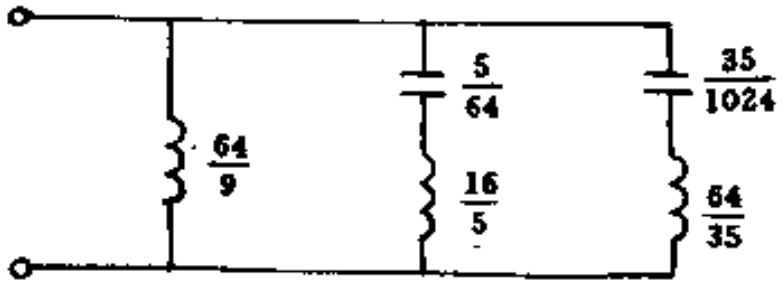


图 6.3.12

6.3.4 正实函数与网络综合

1. 正实函数及其作用

我们先说明什么是正实函数，然后说明研究正实函数的目的。

如果复变函数 $Z(s)$ 满足以下两个条件：

① 当 s 是实数时，$Z(s)$ 也是实数；

② 当 $\mathrm{Re}[s] \geqslant 0$ 时，$\mathrm{Re}[Z(s)] \geqslant 0$，

则称 $Z(s)$ 为正实函数。就是说，当变量 s 是正实数时，$Z(s)$ 是正实函数。我们立刻想到，刚刚介绍的胡维茨多项式偶部与奇部之比 $F(s)$ 是一个正实函数，因为由(6.3.24)式看出，$F(s)$ 是满足正实函数的条件的。

根据正实函数的定义，容易看出，函数的正实性意味着：S 平面的右半平面通过正实函数变换时将映射到 $Z(s)$ 平面的右半平面，S 平面的实轴映射到 $Z(s)$ 平面的实轴上(S 平面的正实轴上

的点映射到$Z(s)$平面的正实轴上任意点，但对负实轴并无规定)。

正实函数是研究网络理论的基础。我们知道，网络设计方法大体上可以分为网络分析和网络综合两大部分。利用分析方法进行设计，主要是根据已知的基本网络结构和特性，一部分一部分地猜试拼凑，来满足工作特性的要求。这种方法对于设计结构简单、要求不高的网络是有实用价值的。但是这样设计出来的网络所需元件数目不一定最经济，设计复杂网络时凭经验，无一定准则可循。而网络综合方法却可克服这些不足之处。网络综合就是按照预给的条件(例如给定二端网络的阻抗函数或四端网络的传输函数)来确定一个网络的结构及其构成元件的参数，使它们能满足预定的要求。这种方法可以保证设计出来的网络结构具有最经济的元件数目，并使设计结果满足生产实践提出的技术要求，因而这种方法是有很大实际意义的。

由预给的阻抗函数或传输函数确定相应的网络结构和元件参数的可能性称为这一函数的可实现性。前面我们已经讨论过 RC 二端网络和 LC 二端网络的实现问题，但并不是随便给定什么函数都可以实现其网络结构的，因此要研究可实现性问题。在电路理论中已经证明，任何无源二端网络的入端阻抗函数 $Z(s)$〔或导纳函数 $Y(s)$〕一定是正实函数，而如果一个给定的 $Z(s)$ 或 $Y(s)$ 是正实函数，它就一定可以实现相应的网络结构。所以，弄清正实函数的特有性质，是研究可实现性问题的基础。

应该指出，生产实践提出的技术要求往往并不是直接给出某一函数，而仅仅是一些数据或图表。以滤波器设计为例，技术要求往往是通带内允许的最大衰减值，阻带内允许的最小衰减值以及通阻带界限频率等。首先要将这些预给的原始的技术要求转化为可实现的阻抗函数或传输函数的解析表达式，第二步才能去“实现”其网络结构。第一步要利用计算数学中的“逼近理论”，如最大平坦型(伯特沃斯)近似，切比雪夫近似等。由于我们的目的是说

明复变函数理论在网络综合方面的应用，故这里不涉及“逼近”问题，只是介绍一下正实函数的主要性质和如何用它来研究可实现性问题。

2. **正实函数的主要性质**

(1) 首先我们来证明，**若 $Z(s)$ 为正实函数，则 $Z(s)$ 在 S 平面的右半平面必为解析**。假定 $Z(s)$ 在 $s = s_0$ 点具有 n 阶极点，那么按照(6.2.5)式关于 $s = s_0$ 点的罗朗展开式可写为

$$Z(s) = \frac{a_{-n}}{(s-s_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(s-s_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{s-s_0} + a_0 + a_1(s+s_0) + \cdots$$

当 s 与 s_0 非常接近时，函数 $Z(s)$ 的特性决定于上式第一项，故可近似表示为

$$Z(s) \approx \frac{a_{-n}}{(s-s_0)^n}$$

设 $a_{-n} = Ae^{j\varphi}$ 和 $(s-s_0) = re^{j\theta}$，其中 r 是一个任意小的正数，由上式有

$$\left.\begin{aligned} Z(s) &\approx \frac{A}{r^n}e^{j(\varphi - n\theta)} \\ \mathrm{Re}[Z(s)] &\approx \frac{A}{r^n}\cos(n\theta - \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{6.3.33}$$

当沿着环绕 s_0 点的以 r 为半径的小圆绕行一周时(图 6.3.13)，θ 由 0 变到 2π，φ 不变，因而 $\cos(n\theta - \varphi)$ 的符号变化 $2n$ 次

如果 $Z(s)$ 是正实函数，则它的实部在右半平面内取正值，不可能改变符号，这就是要求 $n = 0$，从而得出结论：$Z(s)$ 在 S 平面的右半平面不可能有极点，亦即 $Z(s)$ 在右半平面解析。

(2) 但是，正实函数的极点可以在虚轴上。设 s_0 点是虚轴上的极点，因为在 S 平面右半平面上的点到 s_0 点的矢量为 $s - s_0 = re^{j\theta}$，故有 $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$(图6.3.14)；另一方面，从(6.3.33)式

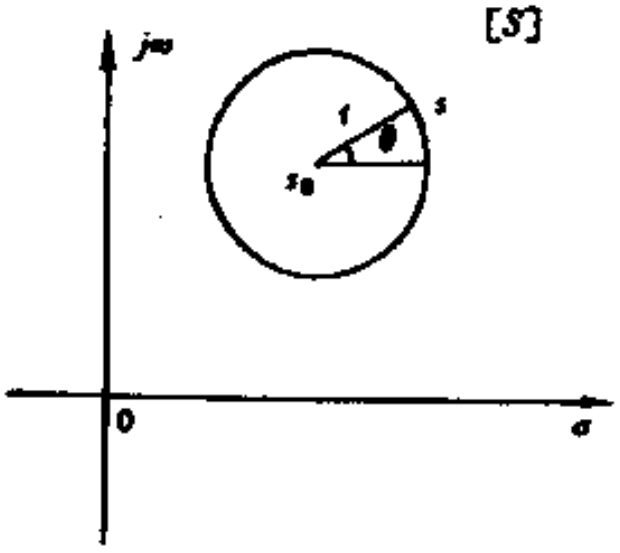


图 6.3.13

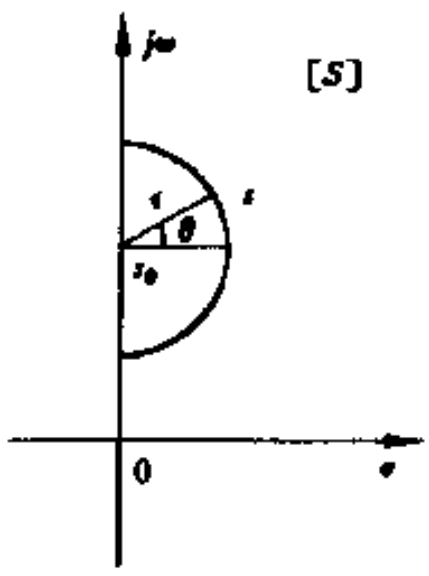


图 6.3.14

可看出，$Z(s)$ 为正实函数的条件要求 $(n\theta - \varphi)$ 也在 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$ 的范围内。这仅当 $n = 1$ 和 $\varphi = 0$ 时才能得到满足。$n = 1$ 说明极点应为一阶极点，此时 $a_{-n} = a_{-1}$ 为 $Z(s)$ 在 s_0 的留数；$\varphi = 0$ 说明留数 $a_{-1} = Ae^{j\varphi}$ 为正实数。因此得出结论：**若正实函数在虚轴上有极点必为一阶极点，且留数为正实数。**

(3) 正实函数的一个有用的性质是：**正实函数的倒数仍为正实函数。**这是很容易证明的。设 $Z(s) = R(s) + jX(s)$，则

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}$$

正实函数条件要求在 S 平面右半平面内 $R > 0$，从而 $R/(R^2 + X^2) > 0$，即 $Y(s)$ 的实部永为正，所以 $Y(s)$ 也是正实函数。

根据正实函数的第二个性质，$Y(s)$ 在右半平面应无极点，但 $Y(s)$ 的极点就是 $Z(s)$ 的零点，所以我们将第二个性质扩充为：**若 $Z(s)$ 是正实函数，则 $Z(s)$ 在 S 平面右半平面既无极点又无零点，$Z(s)$ 若在虚轴上有极点或零点必为一阶，且在极点处的留数为正实数。**

(4) 最后我们来说明，**正实函数实部的最小值应出现在虚轴上。**这要利用所谓解析函数的模值定理。这个定理说，若复变函数

$F(s)$ 在 S 平面给定区域内及其边界 C 上(图 6.3.15a) 为解析函数,则 $|F(s)|$ 的最大值出现在边界上(图 6.3.15b)。

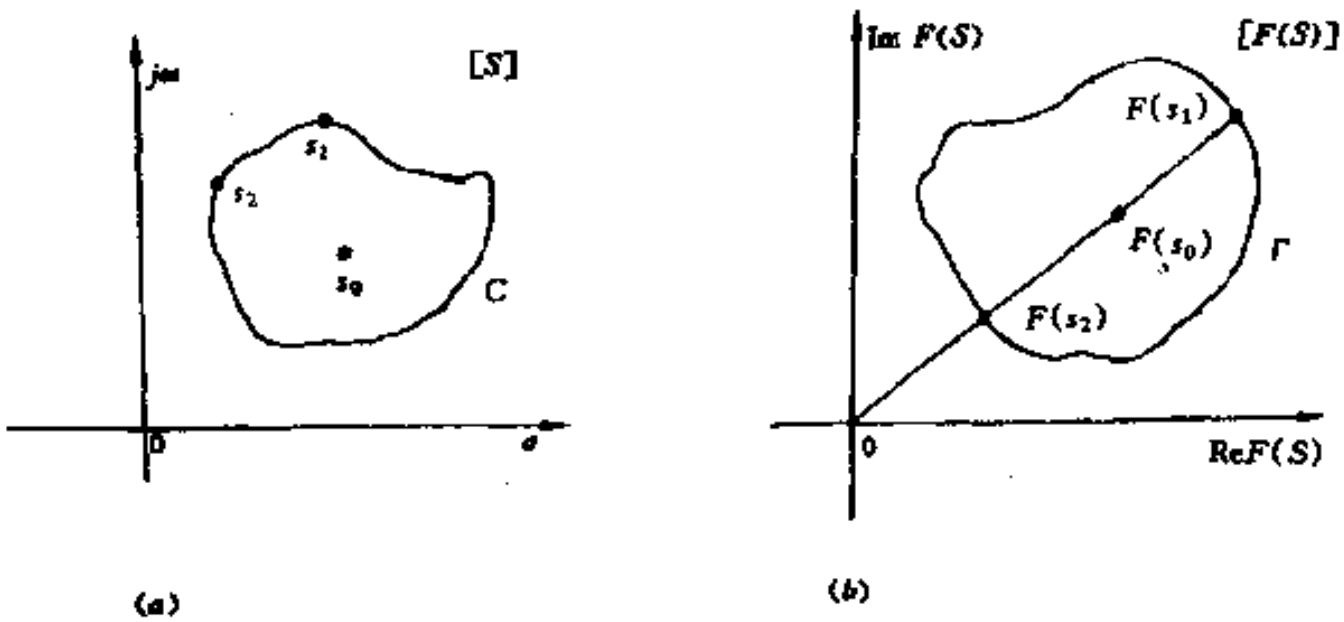


图 6.3.15

现设 $F(s) = e^{-Z(s)}$,若 $Z(s) = R + jX$ 为正实函数,并在 S 平面右半平面及其边界 $j\omega$ 轴上为解析,则 $F(s)$ 在同一区域及其边界上为解析,并有

$$|F(s)| = |e^{-(R+jX)}| = e^{-R}$$

按模值定理,$|F(s)|$ 的最大值应出现在解析区域的边界上,而 e^{-R} 的最大值即是 R 的最小值,所以 $Z(s)$ 的实部 $R(s)$ 的最小值出现的解析区域的边界上,即 $j\omega$ 轴上。

在研究网络的可实现性问题时,首要任务是判别一个给定的函数是否为正实函数。根据以上讨论,通常将正实函数的充分必要条件归纳为以下三点:

(1) 函数在 S 平面的右半平面为解析;

(2) 函数在 $j\omega$ 轴上若有极点必为一阶极点,且其留数为正实数;

(3) 在 $j\omega$ 轴上函数的实部不为负。

对这三个条件的充分性和必要性我们在此不做严格证明了。

根据这三点来判别正实函数，比直接用正实函数的定义来判别要方便得多。

正实函数尚有许多其他性质，如正实函数之和仍为正实函数，正实函数的正实函数仍为正实函数等等，需要时可参考其他书籍。

例 6.3.8　试判别 $Z(s)=\dfrac{s^2+s+2}{s+1}$ 是否正实函数。

解　①$Z(s)$ 仅有一个极点：$s=-1$，不在右半平面，故 $Z(s)$ 在右半平面为解析。

②$Z(s)$ 在 $j\omega$ 轴上没有极点，故不必判别第二项条件。

③令 $s=j\omega$，我们有

$$Z(j\omega)=\frac{-\omega^2+j\omega+2}{1+j\omega}=\frac{2+j(\omega^3-\omega)}{1+\omega^2},$$

故

$$\mathrm{Re}[Z(j\omega)]=\frac{2}{1+\omega^2}\geqslant 0$$

所以，给定的 $Z(s)$ 是正实函数，可以利用这函数实现一个无源二端网络。

例 6.3.9　试判别 $Z(s)=\dfrac{s^2+2s+26}{s+5}$ 是否正实函数。

解　①$Z(s)$ 仅有一个极点 $s=-5$，故 $Z(s)$ 在右半平面解析；

②$Z(s)$ 在 $j\omega$ 轴上无极点；

③$$Z(j\omega)=\frac{-\omega^2+26+j2\omega}{j\omega+5},$$

$$\mathrm{Re}[Z(j\omega)]=\frac{(-\omega^2+26)5+2\omega^2}{5^2+\omega^2}=\frac{-3\omega^2+130}{25+\omega^2}$$

当 $\omega^2>130/3$ 时，$\mathrm{Re}[Z(j\omega)]<0$，所以给定的 $Z(s)$ 不是正实函数，因而是不可实现的。可能有人说："本例中的 $Z(s)$ 在低频是正实函数，因而在低频是可实现的。"这是错误的，这个提法与可实现性毫无关系，因为正实函数的定义和性质都是对所有频率

而言的。

3.检验正实函数的一般方法

如果给定的阻抗函数 $Z(s)$ 比较复杂，它的分子、分母多项式幂次较高，可用下面的一般方法来检验它是否正实函数。

(1) 为了判明 $Z(s)$ 是否在 S 平面右半平面为解析，只要判明 $Z(s)$ 的分母多项式是否为胡维茨多项式。因为胡维茨多项式在右半平面没有零点，即 $Z(s)$ 在右半平面没有极点而解析。判别胡维茨多项式除了前面已介绍的一些方法外，还有一个常用的方法，就是将多项式 $D(s)$ 的偶部与奇部之比 $F(s)$ 按连分式展开：

$$F(s) = \alpha_1 s + \cfrac{1}{\alpha_2 s + \cfrac{1}{\alpha_3 s + \cfrac{1}{\alpha_4 s + \cdots}}} \tag{6.3.34}$$

若全部系数 α_1、α_2、α_3… 均为正数，则 $D(s)$ 就是一个胡维茨多项式。

我们简单证明一下。设一个胡维茨多项式 $D(s)$ 的偶部奇部之比为：

$$F(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_0}{a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + \cdots + a_1 s}$$

其中 n 为偶数，分子的最高次幂比分母大 1。用分母多项式去除分子多项式得

$$F(s) = \frac{a_n}{a_{n-1}} s + \frac{a'_{n-2} s^{n-2} + a'_{n-4} s^{n-4} + \cdots + a'_2 s'^2 + a'_0}{a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + \cdots + a_1 s}$$

$$= \frac{a_n}{a_{n-1}} s + F_1(s)$$

因为 $D(s)$ 为胡维茨多项式，按条件(6.3.28)，$F(s)$ 应在 $j\omega$ 轴上有一阶极点，且留数为正。上式第一项表示无限远点 $(j\omega \to \infty)$ $F(s)$ 有一阶极点，其留数 a_n / a_{n-1} 亦应为正，所以

$$a_1 = \frac{a_n}{a_{n-1}} > 0$$

我们再考查 $F_1(s)$，它的分母多项式最高次幂比分子大 1，于是对 $1/F_1(s)$ 我们可以写出

$$\frac{1}{F_1(s)} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}s + F_2(s)$$

这样，我们又可重复上述讨论得到

$$\alpha_2 = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} > 0,$$

并有

$$\frac{1}{F_2(s)} = \alpha_3 s + F_3(s), \alpha_3 > 0$$

$$\frac{1}{F_3(s)} = \alpha_4 s + F_4(s), \alpha_4 > 0$$

……

$$\frac{1}{F_{n-1}(s)} = \alpha_n s, \quad \alpha_n > 0$$

只要 $D(s)$ 是一个胡维茨多项式，上面这些关系式就成立，因而 $D(s)$ 的偶部与奇部之比 $F(s)$ 可以表示成(6.3.34)式的连分式形式，且式中诸系数均为正。

如果 $D(s)$ 的最高次幂 n 为奇数，同理可证："将 $D(s)$ 的奇部与偶部之比展为连分式形式，且诸系数为正"，是 $D(s)$ 为胡维茨多项式的充分必要条件。在实际应用中，经常利用这个方法判别胡维茨多项式，从而确定一个给定函数 $Z(s)$ 在 S 平面右半平面是否解析。

(2) 如果给定函数 $Z(s)$ 在 $j\omega$ 轴上有极点，还须进一步检验此极点是否一阶极点，其留数是否为正实数。关于 $j\omega$ 轴上的极点是否一阶极点，可在检验 $Z(s)$ 分母多项式是否为胡维茨多项式过程中确定。至于 $Z(s)$ 在这极点 s_0 处的留数是否为正实数，可利用求留数的公式(6.2.14)进行核算：

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0} Z(s) = \frac{N(s_0)}{D'(s_0)} \quad , \tag{6.3.35}$$

其中 $N(s)$ 为 $Z(s)$ 的分子多项式，$D'(s)$ 表示 $Z(s)$ 的分母多项式对 s 求一阶导数。

(3) 最后检验 $Z(s)$ 的实部对所有的 ω 值是否为正，即考虑是否

$$\mathrm{Re}[Z(j\omega)] > 0$$

若 $Z(s)$ 的分子、分母多项式幂次较高，直接求 $Z(s)$ 的实部较繁，这时可令：

$$Z(s) = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)},$$

其中 $m_1(s)$ 和 $m_2(s)$ 分别为分子和分母的偶部，$n_1(s)$ 和 $n_2(s)$ 分别为分子和分母的奇部。在 $j\omega$ 轴上，$m_1(s)$ 和 $m_2(s)$ 为实数，$n_1(s)$ 和 $n_2(s)$ 为虚数，我们将 $Z(j\omega)$ 有理化：

$$Z(j\omega) = \left.\frac{[m_1(s) + n_1(s)][m_2(s) - n_2(s)]}{[m_2(s) + n_2(s)][m_2(s) - n_2(s)]}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \left.\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2 + n_1 m_2 - m_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}\right|_{s=j\omega}$$

于是得：

$$\mathrm{Re}[Z(j\omega)] = \left.\frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}\right|_{s=j\omega}, \tag{6.3.36}$$

给定 $Z(s)$ 的具体形式，即可判断上式是否大于零。详见下例。

例 6.3.10　检验 $Z(s) = \dfrac{s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$ 是否正实函数。

解　第一步，检验 $Z(s)$ 在 S 平面右半平面是否解析，可取其分母多项式检验是否为胡维茨多项式。为此，利用辗转相除法将分母多项式奇部与偶部之比展为连分式：

$$
\begin{array}{r|l}
s^2+1 & s^3+2s \\
 & s^3+s \\
\hline
 & s \\
 & s \\
\hline
 & 1 \\
 & s \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore \frac{s^3+2s}{s^2+1} = s + \frac{1}{s+\frac{1}{s}}$$

可见，$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$，均为正实数，故 $Z(s)$ 在右半平面解析。

第二步，因为分母多项式不能分解出因子 $s^2 + a(a > 0)$，亦即 $j\omega$ 轴上无共轭极点，故不需进行极点性质和留数的检验。

第三步，检验是否 $\mathrm{Re}[Z(j\omega)] > 0$。

分子的偶部和奇部分别为：$m_1(s) = s^4 + 3s^2 + 1, n_1(s) = s^3 + 2s$，

分母的偶部和奇部分别为：$m_2(s) = s^2 + 1, n_2(s) = s^3 + 2s$.

由(6.3.36)式有：

$$\mathrm{Re}[Z(j\omega)] = \left.\frac{(s^4+3s^2+1)(s^2+1)-(s^3+2s)(s^3+2s)}{(s^2+1)^2-(s^3+2s)^2}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{1}{(1-\omega^2)^2+\omega^2(2-\omega^2)^2} > 0$$

结论：本题给定的 $Z(s)$ 是正实函数。

例 6.3.11 检验 $Z(s) = \dfrac{s^5+3s^4+7s^3+4s^2+s+1}{s^5+s^4+2s^3+s^2+3s+1}$ 是否正实函数。

解 首先检验其分母是否胡维茨多项式。利用辗转相除法将分母的奇部与偶部之比展为连分式有：

$$
\begin{array}{r}
s \\
s^4+s^2+1\,\overline{)\,s^5+2s^3+3s} \\
\underline{s^5+\ \ s^3+s} \\
s^3+2s
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
s \\
s^3+2s\,\overline{)\,s^4+s^2+1} \\
\underline{s^4+2s^2} \\
-s^2+1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-s \\
-s^2+1\,\overline{)\,s^3+2s} \\
\underline{s^3-s} \\
3s
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\frac{1}{3}s \\
3s\,\overline{)\,-s^2+1} \\
\underline{-s^2} \\
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3s \\
1\,\overline{)\,3s} \\
\underline{3s} \\
0
\end{array}
$$

$$\therefore \frac{s^5+2s^3+3s}{s^4+s^2+1}=s+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{-s+\cfrac{1}{-\frac{1}{3}s+\frac{1}{3s}}}}$$

上述连分式中诸系数不全为正，所以 $Z(s)$ 的分母不是胡维茨多项式，$Z(s)$ 不是正实函数。第二、三步检验也不必进行了。

4. 梯形网络结构的实现

由电感和电容构成的梯形网络（图 6.3.16）的输入阻抗为

$$Z(s)=L_1s+\cfrac{1}{C_2s+\cfrac{1}{L_3s+\cfrac{1}{C_4s+\cdots}}}$$

所以，如果将一个给定的阻抗函数 $Z(s)$ 展为（6.3.34）式的连分式形式，并且式中各系数为正实数，那么我们就可以将这个给定函数实现为梯形网络。

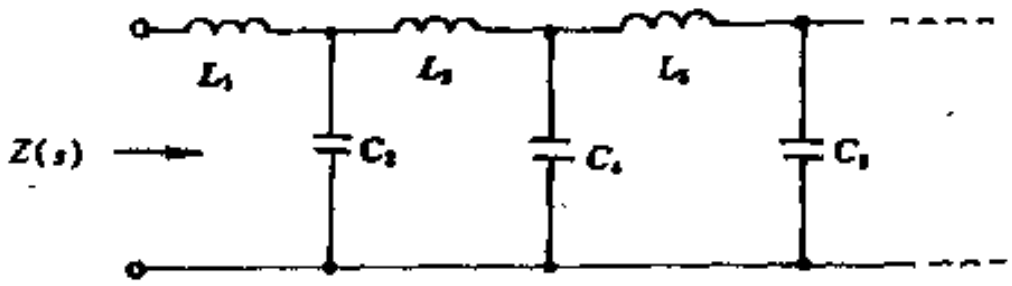


图 6.3.16

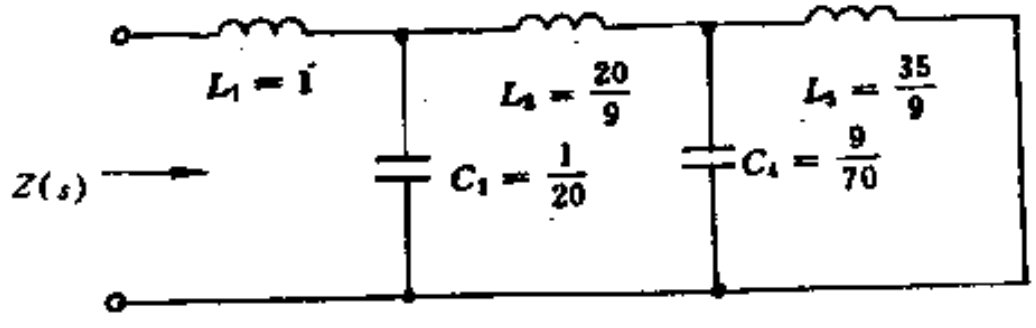
例 6.3.12　将 $Z(s)=\dfrac{s^5+20s^3+64s}{s^4+10s^2+9}$ 实现为梯形网络。

解　容易验证，上述 $Z(s)$ 是一个胡维茨多项式的奇部与偶部之比。现用辗转相除法将其展为连分式形式：

$$
\begin{array}{r}
s \\
\hline
s^4+10s^2+9\,\big)\,s^5+20s^3+64s \\
\underline{s^5+10s^3+9s} \qquad \frac{1}{10}s \\
10s^3+55s\,\big)\,s^4+10s^2+9 \\
\underline{s^4+\frac{11}{2}s^2} \qquad \frac{20}{9}s \\
-\frac{9}{2}s^2+9\,\big)\,10s^3+55s \\
\underline{10s^3+20s} \qquad \frac{9}{70}s \\
35s\,\big)\,-\frac{9}{2}s^2+9 \\
\underline{\frac{9}{2}s^2} \qquad \frac{35}{9}s \\
9\,\big)\,35s \\
\underline{35s} \\
0
\end{array}
$$

$$
\therefore Z(s)=s+\cfrac{1}{\frac{s}{10}+\cfrac{1}{\frac{20}{9}s+\cfrac{1}{\frac{9}{70}s+\cfrac{1}{\frac{35}{9}s}}}}
$$

相应的梯形网络结构为(归一化参数)：



习　　题

第一章习题

1.1　画出下列周期信号的波形，并分别指明其对称性。

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & (0<t<3)\\ -3, & (-3<t<0)\end{cases}$　$\left(\text{周期为 6，即 } \omega=\frac{\pi}{3}\right)$

(2) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & (0\leqslant t\leqslant \pi)\\ 0, & (\pi<t<2\pi)\end{cases}$　(周期为 2π，即 $\omega=1$)

(3) $f(t)=\begin{cases}\cos t, & (0<t<\pi)\\ 0, & (\pi<t<2\pi)\end{cases}$　(周期为 2π，即 $\omega=1$)

(4) $f(t)=t\ (10-t),\quad (0<t<10)$　$\left(\text{周期为 10，即 } \omega=\frac{\pi}{5}\right)$

(5) $f(t)=\begin{cases}-1, & (0\leqslant t<2)\\ 1, & (2\leqslant t\leqslant 4)\\ -1, & (4<t<6)\end{cases}$　$\left(\text{周期为 6，即 } \omega=\frac{\pi}{3}\right)$

1.2　画出下列周期函数的图形，并分别求出它们的傅里叶级数展开式(一般式或前四项之和)。

(1) $f(t)=t,\quad \left(-\frac{\pi}{\omega}<t<\frac{\pi}{\omega}\right)$　$\left(\text{周期为}\frac{2\pi}{\omega}\right)$

(2) $f(t)=t^2,\quad (0<t<2\pi)$　(周期为 2π，$\omega=1$)

(3) $f(t)=1-t^2,\quad (-1<t<1)$　(周期为 2，$\omega=\pi$)

1.3　试求下列周期函数的傅里叶级数展开式。

(1) $f(t)=\begin{cases}0, & (-5<t<0)\\ 3, & (0<t<5)\end{cases}$　$\left(\text{周期为 10，即 } \omega=\frac{\pi}{5}\right)$

(2) $f(t)=\begin{cases}-1, & (-2<t<-1)\\ t, & (-1<t<1)\\ 1, & (1<t<2)\end{cases}$ $\left(\text{周期为 4, 即 } \omega=\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $f(t)=\begin{cases}0, & \left(-\frac{\pi}{\omega}<t<-\frac{\pi}{2\omega}\right)\\ 1+\frac{2\omega t}{\pi}, & \left(-\frac{\pi}{2\omega}<t<0\right)\\ 1-\frac{2\omega t}{\pi}, & \left(0<t<\frac{\pi}{2\omega}\right)\\ 0, & \left(\frac{\pi}{2\omega}<t<\frac{\pi}{\omega}\right)\end{cases}$ $\left(\text{周期为}=\frac{2\pi}{\omega}\right)$

(4) $f(t)=\sin\frac{\omega t}{2}$, $\left(0<t<\frac{2\pi}{\omega}\right)$ $\left(\text{周期为}=\frac{2\pi}{\omega}\right)$

1.4 周期性矩形脉冲在周期 $[-\lambda\pi/\omega,\ (2-\lambda)\pi/\omega]$ 内可表示为

$$f(t)=\begin{cases}1, & \left(-\frac{\lambda\pi}{\omega}<t<\frac{\lambda\pi}{\omega}\right)\\ 0, & \left(\frac{\lambda\pi}{\omega}<t<\frac{(2-\lambda)\pi}{\omega}\right)\end{cases}$$

试以时间 t 为横坐标画出它的图形，并利用(1.1.4)、(1.1.6)和(1.1.7)式证明其傅里叶展开系数分别为

$$a_0=2\lambda,\qquad a_m=\frac{2\sin m\lambda\pi}{m\pi},\qquad b_m=0.$$

1.5 角频率为 ω 的锯齿波在周期 $[-\lambda\pi/\omega,\ (2-\lambda)\pi/\omega]$ 内可表示为

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\omega t}{\lambda\pi}, & \left(-\frac{\lambda\pi}{\omega}\leqslant t\leqslant\frac{\lambda\pi}{\omega}\right)\\ \frac{\pi-\omega t}{\pi(1-\lambda)}, & \left(\frac{\lambda\pi}{\omega}\leqslant t\leqslant\frac{(2-\lambda)\pi}{\omega}\right)\end{cases}$$

试以时间 t 为横坐标画出它的图形，并利用(1.1.4)、(1.1.6)和(1.1.7)式证明其傅里叶展开系数分别为

$$a_0 = 0, \qquad a_m = 0, \qquad b_m = \frac{2\sin m\lambda\pi}{\lambda(1-\lambda)m^2\pi^2}$$

设 $\lambda = 1/2$，证明相应的傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \cdots\right)$$

1.6 周期性间断余弦波在它的一个周期 $(\tau, 2\pi/\omega + \tau)$ 内可表示为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \left(\tau < t < \dfrac{2\pi}{\omega} - \tau\right) \\ \cos\omega t - \cos\omega\tau, & \left(\dfrac{2\pi}{\omega} - \tau < t < \dfrac{2\pi}{\omega} + \tau\right) \end{cases}$$

试以时间 t 为横坐标画出它的图形，并利用(1.1.4)、(1.1.6)和(1.1.7)式证明其傅里叶展开系数分别为

$$a_0 = \frac{2}{\pi}(\sin\omega\tau - \omega\tau\cos\omega\tau), \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\left(\omega\tau - \frac{1}{2}\sin 2\omega\tau\right),$$

$$a_m = \frac{1}{m\pi}\left\{\frac{\sin(m-1)\omega\tau}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\omega\tau}{m+1}\right\}, \quad (m \neq 0, 1),$$

$b_m = 0$。

1.7 把 1.2 题中的傅里叶级数改写成复数形式。

1.8 已知复数形式的傅里叶级数

$$f(t) = 4\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{j20\pi mt}}{4m^2 - 1}$$

写出该级数的常数项和余弦形式的前四项。

1.9 画出下列信号波形的频谱：

(1) $f(t) = 5 + 7\cos(20\pi t + 35^\circ) + 2\cos(200\pi t - 30^\circ)$

(2) $f(t) = 30 + 60\sin 2\pi t + 120\sin 3\pi t + 240\sin 5\pi t$

(3) $f(t) = (10\cos 10\pi t)^2$

(4) $f(t) = (2\cos 10t + \sin 20t)^2$

(5) $f(t) = 3 + \cos 20t + \frac{1}{2}\cos(2\pi t + 30^\circ)$

1.10 利用 1.5 题中当 $\lambda = 1/2$ 时的傅里叶级数展开式，证明：若取 $t = \pi/2\omega$ 则可得以下结果

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

1.11 如果调幅波 $e(t) = f(t)\sin\omega_0 t$ 中的调制信号 $f(t)$ 是 1.4 题中的周期性矩形脉冲，证明该调幅波可表示为(参照(1.2.10)式的推导)

$$e(t) = \lambda\sin\omega_0 t + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\lambda\pi}{m\pi}[\sin(\omega_0 - m\omega)t + \sin(\omega_0 + m\omega)t]$$

据此画出该调幅波的离散频谱，并在频谱图上标出以下各点的位置：

$$\omega_0 - \frac{2\omega}{\lambda},\quad \omega_0 - \frac{\omega}{\lambda},\quad \omega_0,\quad \omega_0 + \frac{\omega}{\lambda},\quad \omega_0 + \frac{2\omega}{\lambda}$$

若使此调幅波不失真地通过射频放大器，试证明该放大器的频带宽度至少应取 $\Delta\omega = 4\omega/\lambda$。

1.12 在(1.1.2)式中令 $\omega = 1$ (即取周期为 2π)，证明 $f(t)\cos t$ 和 $f(t)\sin t$ 也是周期为 2π 的周期函数，并有

$$f(t)\cos t = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[(a_{m-1} + a_{m+1})\cos mt + (b_{m-1} + b_{m+1})\sin mt],$$

$$f(t)\sin t = \frac{b_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[(b_{m+1} - b_{m-1})\cos mt + (a_{m-1} - a_{m+1})\sin mt].$$

1.13 周期信号 $f(t)$ 的有效值 F 定义为

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t}$$

试由(1.1.2)式出发证明 F 与谐波频率无关，并证明

$$F = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2 + b_m^2)}$$

1.14 设 $f(t)$ 代表 1 欧姆电阻两端的电压：

$$f(t)=\begin{cases}1(\text{伏}), & (0<t<1)\\ 0(\text{伏}), & (1<t<2)\end{cases}\quad(\text{周期为 }2)$$

(1) 按(1.1.2)式将 $f(t)$ 展开为傅里叶级数。

(2) 注意当 $t=1/2$ 时 $f(t)=1$，并利用(1)的结果求以下无穷级数之和：

$$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(3) 利用(2)的结果和 1.13 题的结果求电压有效值。

第二章习题

2.1 由定义(2.1.1)式计算下列各函数的 $\mathcal{F}$ 变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t}, & (t\geqslant 0,\ \alpha>0)\\ 0, & (t<0)\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}-1, & (-1\leqslant t\leqslant 0)\\ 1, & (0<t\leqslant 1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}A, & (|t|<2,\ \text{常数 } A>0)\\ 0, & (|t|>2)\end{cases}$

(4) $f(t)=\begin{cases}1-\frac{2}{\tau}|t|, & \left(|t|<\frac{\tau}{2}\right)\\ 0, & \left(|t|>\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$

(5) $f(t)=e^{-\alpha|t|}$

(6) $f(t)=\begin{cases}\cos\frac{\pi t}{2}, & (|t|<1)\\ 0, & (|t|>1)\end{cases}$

2.2 由定义(2.1.2)式计算下列函数的$\mathscr{F}^{-1}$变换：

(1) $F(\omega)=\dfrac{\sin\omega}{\omega}$

(2) $F(\omega)=\dfrac{2b}{b^2+\omega^2}$

(3) $F(\omega)=\dfrac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

(4) $F(\omega)=\dfrac{\pi^2\sin\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)}$

2.3 求下列函数的$\mathscr{F}^{-1}$变换：

(1) $F(\omega)=\dfrac{4-4\pi^2\omega^2}{4\omega^4+5\omega^2/\pi^2+1/\pi^4}$

(2) $F(\omega)=-\dfrac{ja\omega/\pi}{[\omega^2+(a/2\pi)^2]^2}$

2.4 试画出下列函数的图形：

(1) $f(t)=2\,u(t+2)-3\,u(t-1)$

(2) $f(t)=u(t)+u(t-1)+u(t-2)-3\,u(t-3)$

(3) $f(t)=t\,[u(t)-u(t-1)]$

(4) $f(t)=2\,u(t)-2(t-1)\,u(t-1)+2(t-3)\,u(t-3)$

(5) $f(t)=\sin\omega t\cdot u(t)$

(6) $f(t)=\sin\omega(t-t_0)\cdot u(t-t_0)$ （常数 $t_0>0$）

2.5 由定义(2.1.1)式求下列函数的$\mathscr{F}$变换：

(1) $f(t)=At\,[u(t)-u(t-1)]$ （常数 $A>0$）

(2) $f(t)=-\dfrac{A}{\tau}(t-\tau)\,[u(t)-u(t-\tau)]$

(3) $f(t)=A\,\delta(t-t_0)$ （常数 $A>0$）

(4) $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+\tau)+\delta(t-\tau)+\delta(t+\dfrac{\tau}{2})+\delta(t-\dfrac{\tau}{2})]$

(5) $f(t)=\dfrac{1}{2}\delta(t)+j\,\dfrac{1}{2\pi t}$

(6) $f(t)=\sum_n\delta(t-nT)$ （周期为 T）

2.6 由定义(2.1.2)式求下列函数的 $\mathscr{F}^{-1}$ 变换：

(1) $F(\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$

(2) $F(\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

(3) $F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$

(4) $F(\omega) = j\pi\delta'(\omega) - \dfrac{1}{\omega^2}$

(5) $F(\omega) = \dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega + \pi) + 2\delta(\omega) + \delta(\omega - \pi)]$

2.7 利用 $\mathscr{F}$ 变换的平移性质(2.1.5)式和(1.4.6)式的结果求单个矩形脉冲函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & (0 < t < \tau) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

的频谱函数。

2.8 利用 $\mathscr{F}$ 变换的定义(2.1.1)式重做 2.6 题。

2.9 已知 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，证明

(1) $\mathscr{F}[f(-t)] = F(-\omega)$,

(2) $\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t] = \dfrac{1}{j2}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$。

2.10 利用表 2.1.1 中的线性叠加性质和时间平移性质，由已知简单函数的 $\mathscr{F}$ 变换计算下列函数的 $\mathscr{F}$ 变换：

(1) 高度为 A、宽度为 2τ 的三角形脉冲：

$$f(t) = \frac{A}{\tau}[t\,u(t) - 2(t-\tau)\,u(t-\tau) + (t-2\tau)\,u(t-2\tau)]$$

(2) $f(t) = \begin{cases} A\sin t, & (0 \leqslant t \leqslant \pi, \text{常数 } A > 0) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

2.11 利用频移性质和已知的 $\mathscr{F}[u(t)]$ 求接通正弦信号 $f(t) = u(t)\sin\omega_0 t$ 的 $\mathscr{F}$ 变换。

2.12 利用表 2.1.1 中的微分性质，由简单函数的 $\mathscr{F}$ 变换求下列函

数的 $\mathcal{F}$ 变换：

(1) $f(t) = \begin{cases} \frac{A}{2}(1 + \cos \pi t), & (|t| < 1, \text{常数 } A > 0) \\ 0, & (|t| > 1) \end{cases}$

(2) $f(t) = \frac{A}{\tau}(t + \tau)\, u(t + \tau) - \frac{2A}{\tau} t\, u(t) + \frac{2A}{\tau}(t - \tau)\, u(t - \tau)$

2.13 已知 $f(t)$ 的 $\mathcal{F}$ 变换 $F(\omega)$，选择适当的 $\mathcal{F}$ 变换性质求下列函数 $g(t)$ 的 $\mathcal{F}$ 变换 $G(\omega)$：

(1) $g(t) = t\, f(2t)$

(2) $g(t) = (1 - t)\, f(1 - t)$

(3) $g(t) = f(2t - 5)$

(4) $g(t) = t \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

2.14 理想低通滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$$

其中幅频特性：

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & (|\omega| \leqslant \omega_c) \\ 0, & (|\omega| > \omega_c) \end{cases}$$

相频特性：

$$\varphi(\omega) = t_0\, \omega$$

ω_c 为截止频率，t_0 为常数。试求 $H(\omega)$ 的 $\mathcal{F}^{-1}$ 变换。

2.15 对于图 2.3.1 中的 RC 电路，证明其传输函数可表示为

$$H(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}, \qquad \alpha = (RC)^{-1}$$

若输入信号为 $f(t) = u(t)$，试求该 RC 电路的输出信号 $g(t)$。

2.16 已知电路系统的传输函数为

$$H(\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$$

若输入信号 $f(t) = u(t)$，试求该系统的输出信号 $g(t)$。

2.17 一射频振荡器输出波形可表示为 $V(t) = M(t)\sin\omega_R t$，其中调制波形 $M(t)$ 是周期性变化的，在一个完整周期 $0 < \omega t < 2\pi$ 内可由 $M(t) = e^{-\mu t}$ 表示。证明 $V(t)$ 可以写作

$$V(t) = \frac{\omega}{2\pi}(1 - e^{-2\pi\mu/\omega}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(\omega_R + n\omega)t - \varphi_n]}{(\mu^2 + n^2\omega^2)^{1/2}}$$

其中 $\mathrm{tg}\varphi_n = n\omega/\mu$，画出 $V(t)$ 的频谱。

2.18 若上题中 $V(t)$ 的是一个包含电阻 R、电感 L 和电容 C 的电路所产生的反电动势，且该电路已调谐至角频率 ω_R（即 $\omega_R^2 = 1/LC$），计算流过的电流 $i(t)$，并证明在 $i(t)$ 中，频率为 $\omega_R + n\omega$ 的分波与基本频率 ω_R 的分波幅度之比为

$$\left\{1 + \left[\frac{n(n + 2N)}{N(n + N)}\right]^2 Q^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \cos\varphi_n$$

其中 $Q^2 = L/R^2C$，$\omega_R/\omega = N$。

2.19 利用 $\mathscr{F}^{-1}$ 变换的定义(2.1.2)式，证明

(1) 若 $F_1(\omega) = \mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega) = \mathscr{F}[f_2(t)]$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)}\, F_2(\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)\, \overline{F_2(\omega)}\, d\omega$$

其中 $\overline{F_1(\omega)}$ 和 $\overline{F_2(\omega)}$ 分别是 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 的共轭函数。

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$

(上式称为帕塞瓦尔(Parseval)定理或列立定理。若 $f(t)$ 代表电压或电流信号，则 $[f(t)]^2$ 代表信号能量，$|F(\omega)|^2$ 称为能量谱密度。)

2.20 试求单个矩形脉冲信号(图 1.4.3)的能量谱密度 $|F(\omega)|^2$。

2.21 对于图 2.3.3 的理想低通滤波器，设截止频率为 $\omega_c = 1/2\pi$ Hz，输入信号为 $f(t) = e^{-t}u(t)$，求该滤波器输出信号能量占原信号能量的百分比。

第三章习题

3.1 根据 $\mathscr{L}$ 变换的定义(3.1.1)式，计算下列函数($t > 0$)的 $\mathscr{L}$ 变换，并由表 3.1.1 验证所得结果。

(1) chat

(2) $\cos(\omega_0 t \pm \varphi)$

(3) $t\,e^{-at}$

(4) $t\,\sin\omega_0 t$

3.2 利用表 3.1 求下列像函数 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$。

(1) $F(s) = \dfrac{12}{s^2} - 3$

(2) $F(s) = \dfrac{2}{s(4s+2)}$

(3) $F(s) = \dfrac{3}{(2s+6)^2}$

(4) $F(s) = \dfrac{3s}{(s+4)(2s+1)}$

(5) $F(s) = \dfrac{12s}{4s^2+16}$

(6) $F(s) = \dfrac{7}{2s^2(s+5)} - \dfrac{7}{s(4s+3)}$

(7) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+0.5s}$

(8) $F(s) = \dfrac{15}{s^2+10s+25}$

(9) $F(s)=\dfrac{0.01}{s^2+8s+7}$

(10) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$

3.3 确定习题3.2中各像函数的零点和极点。

3.4 试求下列函数的 $\mathscr{L}$ 变换。

(1) $e^{-t}\sin^2 t$

(2) $t^2\cos t$

(3) $\sin Kt\ \cos Kt$

(4) $\sin\omega t\cdot t\ e^{-2t}$

(5) $e^{-4t}\ ch2t$

(6) $e^{2t}(t^2-5t+6)$

(7) $\dfrac{1}{t}\ sht$

3.5 已知 $f(t)$ 的像函数 $F(s)$，利用 $\mathscr{L}$ 变换的相似性质(3.3.3)式和衰减性质(3.3.2)式证明

(1) $\mathscr{L}\left[e^{-\frac{t}{a}}f\left(\dfrac{t}{a}\right)\right]=aF(as+1)$

(2) $\mathscr{L}\left[e^{-at}f\left(\dfrac{t}{a}\right)\right]=aF(as+a^2)$

3.6 试由定义(3.3.10)式计算卷积 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$：

(1) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\sin t$

(2) $f_1(t)=\sin\omega t,\ f_2(t)=ch\omega t$

(3) $f_1(t)=\cos\omega t,\ f_2(t)=\cos\omega t$

3.7 已知像函数

$$F(s)=\frac{s}{(s+a)(s^2+1)}$$

利用卷积性质(3.3.8)式和表3.1求原函数 $f(t)$，并由 $\mathscr{L}$ 变换验证其正确性。

3.8 设当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=f_3(t)=0$，它们的 $\mathscr{L}$ 变换

分别为 $F_1(s)$、$F_2(s)$ 和 $F_3(s)$，试参照 (3.3.9) 式证明以下推广的卷积性质.

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t) * f_3(t)] = F_1(s)F_2(s)F_3(s)$$

3.9 利用上题得到的推广的卷积性质求

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)^2}, \quad (a \neq b)$$

的 $\mathscr{L}^{-1}$变换。

3.10 设 $f(t)$ 满足以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 1, \quad t > 0$$

初始条件为 $f(t=0) = -1$，试求 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$变换。

3.11 试利用 $\mathscr{L}$变换方法求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = 0$$

的解，初始条件为 $f(t=0) = 2$。

3.12 已知 $f(t)$ 的像函数为 $F(s)$，试证明

(1) $\mathscr{L}[f(t)\cos Kt] = \frac{1}{2}[F(s-jK) + F(s+jK)]$

(2) $\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(q)\,\mathrm{d}q$

3.13 证明

(1) $\mathscr{L}\left[\frac{1}{4}(1-\cos 2t)\right] = \frac{1}{s(s^2+4)}$

(2) $\mathscr{L}[u(t-a)] = \frac{\mathrm{e}^{-sa}}{s}, \quad (a > 0)$

(3) $\mathscr{L}[u(t-a)f(t-a)] = \mathrm{e}^{-as}F(s)$

利用以上结果求解以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4f(t) = 3u(t-2)$$

初始条件：$f(t=0) = 1$，$\left.\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$。

3.14 设 $f(t)$ 是载频为 $\omega_0/2\pi$ 的调幅信号：

$$f(t) = m(t)\sin\omega_0 t$$

若已知调制信号 $m(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换为 $M(s)$，试证明 $f(t)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换为

$$F(s) = \frac{M(s - j\omega_0) - M(s + j\omega_0)}{2j}$$

3.15 在图 3.2.2 的串联 RLC 电路中，设 $E = 25$ 伏特，$R = 100$ 欧姆，$L = 25$ 亨利，$C = 5000$ 微法，若在 $t = 0$ 时刻接通直流电源 E，利用 $\mathscr{L}$ 变换方法求电路中的电流 $i(t)$。

3.16 由电感 L 和两个电容 C_1 和 C_2 构成的串联电路中，电容 C_1 和 C_2 分别带有电荷 q_1 和 q_2，当时间 $t > 0$ 时满足以下电路方程：

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = 0,$$

其中电流 $i = \mathrm{d}q_1/\mathrm{d}t$。初始条件为 $q_1 = q_0$（常数），$q_2 = 0$。假定 $q_1 + q_2 = q_0$，利用 $\mathscr{L}$ 变换方法证明在任意时刻 t 的电流为

$$i(t) = \frac{-q_0}{KLC_1}\sin Kt$$

其中 $K = \left(\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}\right)^{\frac{1}{2}}$。

3.17 在图 3.2.6 所示的运算放大器中，在节点 A 处连接另一阻抗 $Z_3(3)$ 并接地（晶体管直流放大器多如此），试推导在这种情况下的运算放大器的传输函数。

第四章习题

4.1 设周期函数 $f(t) = f(t + T)$ 的 $\mathscr{L}$ 变换为

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

将上式的积分区间按一个周期分隔（0 到 T，T 到 $2T$ 等，直到无穷），试证明

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nTs} \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}} \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t。$$

4.2 利用上题的一般结果，证明图 4.4.6(a) 所示的周期性矩形脉冲函数的 $\mathscr{L}$ 变换为

$$F(s) = \frac{K(1-\mathrm{e}^{-t_1 s})}{s\,(1-\mathrm{e}^{-Ts})}.$$

4.3 同上题，证明图 3.3.5 所示的锯齿波函数的 $\mathscr{L}$ 变换为

$$F(s) = \frac{a}{s}\left(\frac{1}{Ts} - \frac{2\mathrm{e}^{-Ts}}{1-\mathrm{e}^{-2Ts}}\right),$$

并与例 3.3.3 的结果进行比较。

4.4 求下列与 δ 函数有关的函数 $f(t)$ 的变换：

(1) $f(t) = 2\delta(t) - \mathrm{e}^{-t}$

(2) $f(t) = t\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)$

(3) $f(t) = t^2\,\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\delta(t)$

(4) $f(t) = \delta(t) + (2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\,u(t)$

(5) $f(t) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t)$

(6) $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) - \sum\limits_{n=2}^{\infty}\delta(t-nT)$

4.5 什么是 $\mathscr{L}$ 变换的 0^- 系统和 0^+ 系统？采用 0^- 系统有什么优点？

4.6 利用部分分式展开求下列像函数 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$：

(1) $F(s) = \dfrac{10s+2}{(s+5)(s+1)}$

(2) $F(s) = \dfrac{s^2 + 4}{s\,(s+3)(s+6)}$

(3) $F(s) = \dfrac{2s}{s^2 + 3s + 2}$

(4) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}$

(5) $F(s) = \dfrac{3s + 2}{s\,(s^2 + 18s + 81)}$

4.7 应用留数定理求

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s-a)}$$

的 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换，并与例 3.3.10 的结果比较。

4.8 利用 §4.2 给出的方法求下列像函数的 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换：

(1) $F(s) = \dfrac{-s^4 - 2s^3 + 4s^2 + 14s + 25}{s\,[(s+1)^2 + 4]^2}$

(2) $F(s) = \dfrac{s^3 + 11}{[(s-1)^2 + 4]^2}$

4.9 参照例 4.3.2，求 $f(t) = e^{3t}u(t) + e^{4t}u(-t)$ 的双边 $\mathscr{L}$ 变换，并指明收敛区域。

4.10 利用留数定理求像函数

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}, \qquad 1 < \mathrm{Re}[s] < 3$$

的双边 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换。

4.11 参照例 4.3.3，求像函数

$$F(s) = \frac{-s + 4}{(s^2 + 4)(s+1)}, \qquad -1 < \mathrm{Re}[s] < 0$$

的双边 $\mathscr{L}^{-1}$ 变换。

4.12 利用将双边变换化为单边变换的方法重做上题。

4.13 在图 4.4.1 所示的双回路网络中，若电感电流的初始值为 $i_2(t=0) = 2$ 安培，电感值改为 2 亨利；1 法拉电容器代换

为 3 欧姆电阻器；1 欧姆和 1/5 欧姆的两个电阻分别代换为 6 欧姆和 8 欧姆，且在 $t=0$ 时刻投入电压为 24 伏特的直流电。试利用 $\mathscr{L}$ 变换方法求在这种情况下两个回路中电流的像函数 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$ 以及电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$。

4.14 对于图 4.4.6 中的微分电路，利用(4.4.11)和(4.4.12)式的结果，证明在图 4.4.6(b)中，当 m 值很大时，$v_{01}(t)$ 的正项峰值分别为

$$K\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-(T-t_1)/\tau_1}}{1-\mathrm{e}^{-T/\tau_1}}\right] \quad 和 \quad K\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-t_1/\tau_1}}{1-\mathrm{e}^{-T/\tau_1}}\right]$$

进而证明，在一个脉冲的起始时刻和终止时刻脉冲跳跃的幅度恰等于 K。

4.15 对于图 4.4.6 中的积分电路，利用(4.4.13)和(4.4.14)式的结果证明，当 m 值很大时(满足 $mT \gg \tau_2$ 和 $\tau_2 \gg T$)，下列近似关系式成立：

$$v_{02}(t) \simeq K\frac{t_1}{T}\left(1-\frac{t-mT-t_1}{\tau_2}\right) \quad (对第\ m+1\ 个脉冲)$$

$$v_{02}(t) \simeq K\frac{t_1}{T}+K\frac{t-mT}{\tau_2}\left(1-\frac{t_1}{T}\right)(对第\ m+1\ 个脉冲后面的空处)$$

4.16 用 §3.2.2 的方法验证由两个电感和一个电容构成的三阶伯特沃斯滤波器的传输函数为

$$H(s)=\frac{1}{abc\,s^3+ab\,s^2+(a+c)\,s+1}$$

其中 a 和 c 分别是两个电感的归一化数值，b 为电容的归一化数值(归一化负载电阻值为 1)．再利用 (4.4.90) 式确定三个电抗元件的归一化数值 a、b 和 c。

4.17 试利用 (4.4.84) 式确定伯特沃斯低通滤波器的阶数 n，要求幅频特性为：当频率为二倍截止频率时幅度衰减到 1% 以下。

第五章习题

5.1 完成下列指定运算：

(1) $(3.8 - j1.5)(6 - j2.3)$ （结果表为向量形式）

(2) $[2(\cos 25^\circ + j\sin 25^\circ)][5(\cos 110^\circ + \sin 110^\circ)]$
（结果表为代数形式）

(3) $\dfrac{12 - j16}{0.23 + j0.75}$ （结果表为向量形式）

(4) $\dfrac{(5\angle 45^\circ)(10\angle -70^\circ)}{(5\angle 45^\circ) + (10\angle -70^\circ)}$ （结果表为向量形式）

5.2 计算 $\left[\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}\right]^{\frac{1}{2}}$ 的数值，其中 $R = 22$，$L = 10^{-3}$，$G = 0.7$，$C = 5 \times 10^{-5}$，$\omega = 3 \times 10^4$。

5.3 利用向量代数完成下列计算，将每一计算结果分别表示成 $x + jy$ 形式、向量形式和正弦函数形式。

(1) $50\sin(377t) + 40\sin(377t + 100^\circ)$

(2) $0.04\sin(\omega t - 45^\circ) - 0.02\sin(\omega t + 45^\circ)$

(3) $\cos\omega t + \sin\omega t$

5.4 完成下列代数运算：

(1) $2(5 - j3) - 3(-2 + j) + 5(j - 3)$

(2) $\dfrac{5}{3 - j4} + \dfrac{10}{4 + j3}$

(3) $\left(\dfrac{1 - j}{1 + j}\right)^{10}$

(4) $(3 - j2)^3$

(5) $\left|\dfrac{2 - j4}{5 + j7}\right|^2$

(6) $\dfrac{(1+j)(2+j3)(4-j2)}{(1+j2)^2(1-j)}$

5.5 试求方程 $z^n = a^n$ 的解，其中 z 为复变量，n 为正整数，a 为任意正数。

5.6 计算下列复数的模和辐角：

(1) $-3+j7$　　(2) $2+j5$

(3) $1-j3$　　(4) $-1-j\sqrt{3}$

5.7 将下列各函数表示成 $u(x, y)+jv(x, y)$ 的形式，其中 u 和 v 是实函数。

(1) $f(z)=z^3$　　(2) $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$

(3) $f(z)=e^{3z}$　　(4) $f(z)=\ln z$

5.8 试由下列解析函数的实部 $u(x, y)$ 或虚部 $v(x, y)$ 确定该解析函数：

(1) $v(x, y)=2x(1-y)$　　(2) $u(x, y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$

(3) $u(x, y)=x^3-3xy^2$　　(4) $u(x, y)=2e^x \sin y$

5.9 利用柯西－黎曼条件证明

$$f(z)=e^z(\cos y+j\sin y)$$

在复平面 $z=x+jy$ 上处处可导。

5.10 已知 $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$，计算该复变函数的导数 $f'(z)$，并讨论 $f(z)$ 的解析性。

5.11 根据柯西－黎曼条件判断下列各函数是否解析函数：

(1) $\omega=x+j2y$　　(2) $\omega=\cos(x+jy)$

(3) $\omega=x^4-6x^2y^2+y^4+5+j(4x^3y-4xy^3)$

(4) $\omega=\dfrac{2(x^2+y^2)-(x+jy)}{4(x^2+y^2)-4x+1}$

5.12 证明 $u=x^2-y^2$ 和 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 均为调合函数，但 $w=u$

$+ jv$ 不是解析函数。

5.13 证明函数 $2xy + y^3 - 3x^2y$ 为调和函数。

5.14 证明经变换 $w = \dfrac{z - j}{jz - 1}$ 后，区域 $\mathrm{Im}(z) \leqslant 0$ 被映射到区域 $|w| \leqslant 1$。

5.15 求把 z 平面的上半平面映射为 w 平面的单位圆的变换关系式，要求使 $z = j$，-1 两点映射成 $w = 0$，1 两点。

5.16 求把 z 平面的单位圆映射为 w 平面的单位圆的变换关系式，要求使 $z = 1/2$，-1 两点映射成 $w = 0$，1 两点。

5.17 求把 z 平面的单位圆映射为 w 平面的下半平面的变换关系式，要求使 $z = 1$，j，$-j$ 三点映射成 $w = 1$，0，-1 三点。

5.18 试求 z 平面上的曲线 $y = x^2$ 经变换 $w = -2z + j2$ 后在 w 平面上的映像曲线方程。

5.19 试求经反演映射 $w = \dfrac{1}{z}$ 后 z 平面下列各点在 w 平面的映像点：

(1) 1　　(2) -1

(3) j　　(4) $-j$

(5) $1 + j$　　(6) $5 - j12$

(7) $-3 + j4$　　(8) $(1 - j)^{-1}$

5.20 试求经反演映射 $w = \dfrac{1}{z}$ 后，z 平面下列曲线或圆在 w 平面的映像曲线或圆的方程：

(1) $y = 1$　　(2) $y = x - 1$

(3) $x = -1$　　(4) $x + y = 1$

(5) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$　　(6) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

5.21 试求把 z 平面上三点 $z_1 = 0$，$z_2 = j$，$z_3 = -1$ 分别映射到 w 平面上三点 $w_1 = 12$，$w_2 = 11 + j$，$w_3 = 11$ 的分式线性变换。

5.22 试求经变换 $w = \dfrac{-jz+2}{z+j}$ 后 $z = 0, 1, -1, j, -j, \infty$ 各点的映像。

5.23 试求 z 平面的直线 $x = c$(常数)经保角变换 $w = z^2$ 到 w 平面的曲线方程。

第六章习题

6.1 参照不等式(6.1.3)的证明，确定下列积分值的上限(不必作积分计算)：

(1) $\left|\int z\,\mathrm{d}z\right|$，沿从 0 到 j 的线段

(2) $\left|\int \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z\right|$，沿圆 $|z| = 2$，正向

(3) $\left|\int (2z+1)\,\mathrm{d}z\right|$，沿从 j 到 $2+j$ 的线段

(4) $\left|\int z^{-2}\,\mathrm{d}z\right|$，沿从 j 到 $2+j$ 的线段

(5) $\left|\int_{-2}^{2} z^{-3}\,\mathrm{d}z\right|$，沿 $|z| = 2$ 的上半圆

6.2 计算积分 $\int_{1-2}^{3+j}(2z+3)\mathrm{d}z$，积分路线为：

(1)沿连接 $1-j2$ 和 $3+j$ 的直线

(2)沿由 $1-j2$ 到 $1+j$ 再到 $3+j$ 的折线

6.3 参照例 6.1.1，仍计算积分 $\int z^2\,\mathrm{d}z$，但积分路径改为由以下 $ABCD$ 四点所构成的正方形：起始点 A 为 $(1, j)$，点 B 为 $(2, j)$，点 C 为 $(2, j2)$，终点 D 为 $(1, j2)$。将所得结果与例 6.1.1 的结果进行比较，并结合例 5.2.15 讨论对解析函数的认识。

6.4 完成下列复变函数积分(积分路径均取正方向):

(1) $\oint_C \frac{dz}{z-3}$, 闭曲线 C 为圆 $|z|=1$

(2) $\oint_C \frac{dz}{z-3}$, C 为圆 $|z+j|=4$

(3) $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz$, C 为圆 $|z-1|=3$

(4) $\oint_C \frac{\sin z}{z^5}dz$, C 为包围原点和 $z=1$ 点的任意简单闭曲线

(5) $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}dz$, C 为圆 $|z-1|=3$

(6) $\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$, C 为圆 $|z|=\frac{3}{2}$

(7) $\oint_C \frac{dz}{z-j}$, C 为以 $\frac{1}{2}$、$j\frac{6}{5}$ 为顶点的菱形

(8) $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$, C 为圆 $|z|=\frac{3}{2}$

(9) $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$, C 为圆 $|z|=10$

(10) $\oint_C \frac{(z^2+1)e^z}{(z+j)(z-1)^3}dz$, C 为圆 $|z-2|=3$

(11) $\oint_C \frac{dz}{z^2(z-1)(z+j\pi)}$, C 为圆 $|z|=2$

(12) $\oint_C \frac{e^{3z}+\cos 2z}{z(z-1)^3}dz$, C 为圆 $|z-1|=2$

6.5 将函数 $F(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ 展开为关于 $z_0=0$ 点的幂级数。

6.6 将下列函数展开为关于指定点 z_0 的泰勒级数:

(1) $F_1(z)=\frac{1}{az+b}$, $(z_0=0)$

(2) $F_2(z)=\mathrm{ch}(z)$, $(z_0=0)$

(3) $F_3(z)=\frac{2}{z+2}$, $(z_0=1)$

6.7 利用泰勒级数展开公式 (6.2.7) 和 (6.2.8) 证明关于 $z = 0$ 点有：

(1) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$

(2) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

(3) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

这些关系式可作为复变量指数函数和三角函数的定义。

6.8 利用例 5.2.12 已证明的求导公式 $dz^n/dz = nz^{n-1}$ 和上题的结果验证以下公式：

(1) $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$

(2) $\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$

(3) $\frac{d}{dz}e^z = e^z$

6.9 试证明：

(1) $e^{jz} = \cos z + j \sin z$，由此进而证明

(2) $\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$

(3) $\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$

(4) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

6.10 试给出 (1) $e^{(2+j\pi/4)}$ 的实部；(2) $\sin(2 + j3)$ 的虚部。

6.11 试证明 $\cos z = \cos(x + jy)$ 是解析函数 (即其实部和虚部满足柯西-黎曼条件)。

6.12 设 a 为实数，证明 $f(z) = \ln(z - a)$ 的实部和虚部在不包含 $z = a$ 的任何区域 D 内是调和函数。

6.13 确定以下各复变函数在给定点 z_0 处的留数 $\mathrm{Res} f(z_0)$。

(1) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z-1}$, $z_0=1$

(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0=1,\ \pm j$

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)^3}$, $z_0=0,\ -2$

(4) $f(z)=\dfrac{(1-z^2)\,e^{2z}}{z^4}$, $z_0=0$

(5) $f(z)=\dfrac{z\,e^z}{z^4-z^2}$, $z_0=0,\ \pm 1$

(6) $f(z)=\dfrac{z\,e^{zt}}{(z-3)^2}$, $z_0=3$

(7) $f(z)=\dfrac{1}{z^n-1}$, $z_0=1$, (n 为正整数)

(8) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $z_0=\infty$

6.14证明复变函数 $F(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$ 的全部留数之和为 1。

6.15证明复变函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2+1}$ 的全部留数之和为 0。

6.16在图 6.3.1(a) 所示的反馈系统中，若正馈网络和反馈网络的传输函数分别为

$$H_1(s)=\frac{1}{s(s^2+s+2)},\quad H_2(s)=\frac{K}{s+1}$$

试确定使整个反馈系统稳定的 K 值范围。

6.17三个反馈系统的开环传输函数(参见 (6.3.2) 式)分别为：

(1) $H(s)=\dfrac{200}{(s+1)(s+5)(s+10)}$

(2) $H(s)=\dfrac{3000}{s(s+8)(s+20)}$

(3) $H(s)=\dfrac{20000}{s(s^2+4s+400)}$

试利用奈奎斯特判据考查各系统是否稳定。

6.18某电路系统的传输函数为

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + s^3 + 3s^2 + s + 6}$$

试利用判据 (6.3.16) 考查该系统是否稳定。

6.19利用判据 (6.3.28) 检验 $D(s) = s^3 + 6s^2 + 2s + 1$ 是否为胡维茨多项式。

6.20 试利用罗斯 - 胡维茨判据,确定下列多项式是否有位于右半平面的根。

(1)$D(s) = s^5 + s^4 + 20s^2 + s + 2$

(2)$D(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 10s + 10$

(3)$D(s) = 8s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 5$

(4)$D(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$

6.21 检验 $Z(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 25}{s + 4}$ 是否正实函数。

6.22 确定 $Z(s) = \dfrac{s^3 + 2s}{s^2 + 1}$ 的极点处的留数,并检验它是否正实函数。

6.23 设电路的阻抗函数为

$$Z(s) = \frac{36s^4 + 18s^2 + 1}{18s^3 + 6s}$$

试确定相应的一种无源 LC 梯形网络。

6.24 设电路的传输函数为

$$T(s) = \frac{s^2}{(s + 2)(s + 5)}$$

试确定相应的一种无源 RC 梯形网络。

参 考 书 目

[1] 南京工学院数学教研组编,工程数学——积分变换,人民教育出版社,1978。

[2] 西安交通大学高等数学教研室编,工程数学——复变函数(第四版),高等教育出版社,1996。

[3] 熊大国,积分变换,北京理工大学出版社,1990。

[4] 王省富,工程数学:复变函数,国防工业出版社,1987。

[5] 任福尧,应用复分析,复旦大学出版社,1993。

[6] 刘培森,应用傅立叶变换,北京理工大学出版社,1990。

[7] 金忆丹,复变函数与拉普拉斯变换(第二版),浙江大学出版社,1996。

[8] 工程数学课程教学指导委员会本科组编,工程数学例题与习题(下册),高等教育出版社,1996。

[9] 内藤喜之,电气数学,森北出版株式会社(日),1976。

[10] 吴大正主编,信号与线性系统分析,高等教育出版社,1986。

[11] P.B.拉斯著,卢伯英译,信号、系统与控制,科学出版社,1982。

[12] 陈元亨等,信息与信号理论基础,高等教育出版社,1989。

[13] 姜建国,曹建中,高玉明,信号与系统分析基础,清华大学出版社,1994。

[14] 闵大镛主编,信号与线性系统分析,电子科技大学出版社,1993。

习题答案

第一章

1.1 (1) 奇 1/4 波对称　　(4) 偶对称

(2) 不对称　　(5) 偶对称

(3) 不对称

1.2 (1) $f(t)=\frac{2}{\omega}\left(\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t-\cdots\right)$

(2) $f(t)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4}{m^2}\cos mt-\frac{4\pi}{m}\sin mt\right)$

(3) $f(t)=\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi t-\frac{1}{4}\cos 2\pi t+\frac{1}{9}\cos 3\pi t-\cdots\right)$

1.3 (1) $f(t)=\frac{3}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos m\pi)}{m\pi}\sin\frac{m\pi t}{5}=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{5}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{5}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{5}+\cdots\right)$

(2) $f(t)=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\sin\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{3\pi}\left(1-\frac{2}{3\pi}\right)\sin\frac{3\pi t}{2}+\frac{2}{5\pi}\left(1+\frac{2}{5\pi}\right)\sin\frac{5\pi t}{2}+\cdots-\frac{1}{\pi}\left(\sin\pi t+\frac{1}{2}\sin 2\pi t+\frac{1}{3}\sin 3\pi t+\cdots\right)$

(3) $f(t)=\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\omega t+\frac{1}{9}\cos 3\omega t+\frac{1}{25}\cos 5\pi t+\cdots\right)+\frac{2}{\pi^2}\left(\cos 2\omega t+\frac{1}{9}\cos 6\omega t+\frac{1}{25}\cos 10\omega t+\cdots\right)$

(4) $f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos m\omega t}{m^2-1}$

1.8 $f(t) = -4 + \frac{8}{3}\cos 20\pi t + \frac{8}{15}\cos 40\pi t + \frac{8}{35}\cos 60\pi t + \frac{8}{63}\cos 80\pi t$

1.14 (1) $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-\cos m\pi}{m\pi}\sin m\pi t$

(2) $s = \frac{\pi}{4}$

(3) $F = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (伏)

第二章

2.1 (1) $F(\omega) = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$

(2) $F(\omega) = \frac{4(1-\cos\omega)}{\omega}$

(3) $F(\omega) = \frac{2A\ \sin 2\omega}{\omega}$

(4) $F(\omega) = \frac{\tau}{2}\left[\frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4}\right]^2$

(5) $F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

(6) $F(\omega) = \frac{\pi\ \cos\omega}{(\pi/2)^2 - \omega^2}$

2.2 (1) $f(t) = \frac{1}{2}[u(1+t) + u(1-t) - 1]$

(2) $f(t) = e^{-b|t|}$

(3) $f(t) = e^{-at}\sin(\omega_0 t)\ u(t)$

(4) $f(t) = \frac{1}{2}(1+\cos\pi t), \quad (|t| < 1)$

2.3 (1) $f(t) = \frac{\pi^3}{3}(5\,e^{-\frac{|t|}{2\pi}} - 4\,e^{-\frac{|t|}{\pi}})$

(2) $f(t) = \frac{t}{2}\,e^{\frac{a}{2\pi}|t|}$

2.5 (1) $F(\omega) = \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\,e^{-j\frac{\omega}{2}}$

(2) $F(\omega) = \frac{A}{\omega^2\tau}(1 - e^{-j\omega\tau} - j\omega\tau)$

(3) $F(\omega) = A\,e^{-j\omega t_0}$

(4) $F(\omega) = \cos\omega\tau + \cos\frac{\omega\tau}{2}$

(5) $F(\omega) = u(\omega)$

(6) $F(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_n \delta(\omega - \frac{2\pi n}{T})$

2.6 (1) $f(t) = \frac{1}{\pi t}\sin\omega_0 t$

(2) $f(t) = \cos\omega_0 t$

(3) $f(t) = u(t)$

(4) $f(t) = t\,u(t)$

(5) $f(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos\pi t)$

2.7 $F(\omega) = \frac{2}{\omega}\,e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\sin\frac{\omega\tau}{2}$

2.10 (1) $F(\omega) = \frac{A}{\tau}\left(\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)^2 e^{-j\omega\tau}$

(2) $F(\omega) = \frac{A}{1-\omega^2}(1 + e^{-j\pi\omega})$

2.11 $F(\omega) = \frac{j\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

2.12 (1) $F(\omega) = \frac{\pi^2 A\,\sin\omega}{\omega(\pi^2 - \omega^2)}$

(2) $F(\omega) = \frac{A}{\tau}\left(\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)^2$

2.13 (1) $G(\omega) = \frac{j}{2}\frac{dF\left(\frac{\omega}{2}\right)}{d\omega}$

(2) $G(\omega) = j\frac{dF(-\omega)}{d\omega}e^{-j\omega}$

(3) $G(\omega) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{5\omega}{2}}$

(4) $G(\omega) = -F(\omega) - \omega\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

2.14 $\mathscr{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_0(t+t_0)]}{\omega_0(t+t_0)}$

2.15 $g(t) = (1-e^{-\alpha t})\,u(t)$

2.16 $g(t) = (1-2e^{-t})\,u(t)$

2.20 $|F(\omega)|^2 = I^2\left(\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)^2$

2.21 50%

第三章

3.2 (1) $f(t) = 12t - 3\delta(t)$

(2) $f(t) = 1 - e^{-t/2}$

(3) $f(t) = \frac{3}{4}te^{-3t}$

(4) $f(t) = \frac{3}{7}\left(4e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-1/2t}\right)$

(5) $f(t) = 3\cos 2t$

(6) $f(t) = \frac{7}{50}(5t - 1 + e^{-5t}) - \frac{7}{3}(1 - e^{-3/4t})$

(7) $f(t) = 4\,(1 - e^{-0.5t})$

(8) $f(t) = 15t\ e^{-5t}$

(9) $f(t) = 0.00166\ (e^{-t} - e^{-7t})$

(10) $f(t) = 1.15\ e^{-t/2} \sin 0.867t$

3.3 极点：(1) $s = 0$

(2) $s = 0,\ -\frac{1}{2}$

(3) $s = -3$（两次）

(4) $s = 4,\ -\frac{1}{2}$

(5) $s = \pm j2$

(6) $s = 0,\ -5,\ -\frac{3}{4}$

(7) $s = 0,\ -0.5$

(8) $s = -5$（两次）

(9) $s = -1,\ -7$

(10) $s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

零点：(1) $s = \pm 2$ (2) 无 (3) 无 (4) $s = 0$

(5) $s = 0$ (6) 无 (7) 无 (8) 无 (9) 无 (10) 无

3.4 (1) $\frac{s}{(s+1)(s^2+2s+5)}$

(2) $\frac{2s^5 - 4s^3 - 6s}{(s^2+1)^4}$

(3) $\frac{K}{s^2 + 4K^2}$

(4) $\frac{2\omega(s+2)}{[(s+2)^2 + \omega^2]^2}$

(5) $\frac{s+4}{s^2+8s+12}$

(6) $\frac{6s^2 - 29s + 36}{(s-2)^3}$

(7) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$

3.6 (1) $f(t) = t - \sin t$

(2) $f(t) = \frac{1}{2\omega}(\mathrm{ch}\omega t - \cos\omega t)$

(3) $f(t) = \frac{1}{2\omega}(\omega t\cos\omega t + \sin\omega t)$

3.7 $f(t) = \frac{1}{a^2+1}[a\cos t + \sin t - a\mathrm{e}^{-at}]$

3.9 $f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}[1-(a-b)t]}{(a-b)^2}$

3.10 $\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1-s}{s(s+2)}$

3.11 $f(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$

3.13 $f(t) = \cos 2t + \frac{3}{4}u(t-2)[1-\cos 2(t-2)]$

3.15 $i(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}(\sin 2t)$

3.17 $H(s) = \frac{1}{Z_1(s)\left[\frac{1}{Z_2(s)} + \frac{1}{G(s)Z_2(s)} + \frac{1}{G(s)Z_3(s)} + \frac{1}{G(s)Z_4(s)}\right]}$

第四章

4.4 (1) $F(s) = \frac{2s+1}{s+1}$

(2) $F(s) = -1$

(3) $F(s) = 2$

(4) $F(s) = \frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$

(5) $F(s) = s^n$

(6) $F(s) = 1 + e^{-st}$

4.6 (1) $f(t) = 12e^{-5t} - 2e^{-t}$

(2) $f(t) = \frac{2}{9} - \frac{13}{9}e^{-3t} + \frac{20}{9}e^{-6t}$

(3) $f(t) = 4e^{-2t} - 2e^{-t}$

(4) $f(t) = t - 1 + e^{-t}$

(5) $f(t) = \frac{2}{81} - \frac{2}{81}e^{-9t} + \frac{25}{9}t\ e^{-9t}$

4.7 $f(t) = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$

4.8 (1) $f(t) = 1 + e^{-t}(t\ \sin 2t - 2\cos 2t)$

(2) $f(t) = e^{t}\left(-\frac{t}{4}\sin 2t + \cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right)$

4.9 $\mathscr{L}_b[f(t)] = \frac{-1}{(s-3)(s-4)}, \quad 3 < \mathrm{Re}[s] < 4$

4.10 $\mathscr{L}_b^{-1}[F(s)] = f(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-t}u(-t)$

4.11 $\mathscr{L}_b^{-1}[F(s)] = f(t) = e^{-t}u(t) + \cos 2t\ u(-t)$

4.13 $I_1(s) = \frac{3.64(s + 4.2)}{s(s + 4.09)}$

$i_1(t) = 3.74 - 0.098\ e^{-4.09t}$(安培)

$I_2(s) = \frac{2(s + 4.36)}{s(s + 4.09)}$

$i_2(t) = 2.13 - 0.132\ e^{-4.09t}$(安培)

4.16 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{4}{3},\ c = \frac{1}{2}$

4.17 $n = 7$

第五章

5.1 (1) $26.27 \angle -42.5^\circ$

(2) $-5\sqrt{2} + 5j\sqrt{2}$

(3) $25.5 \angle -126.1^\circ$

(4) $5.5 \angle -15.2^\circ$

5.2 $4.719 - j0.464$

5.3 (1) $43.04 + j39.39 = 58.35 \angle 42.46^\circ = 58.35 \sin(377t + 42.46^\circ)$

(2) $0.01414 - j0.04242 = 0.0447 \angle -71.56^\circ$
$= 0.0447 \sin(\omega t - 71.56^\circ)$

(3) $1 + j1 = 1.414 \angle 45^\circ = 1.414 \sin(\omega t + 45^\circ)$

5.4 (1) $1 - j4$

(2) $\frac{11}{5} - j\frac{2}{5}$

(3) -1

(4) $-9 - j46$

(5) $\frac{10}{37}$

(6) $\frac{16}{5} - j\frac{2}{5}$

5.5 因 a^n 为正实数，其辐角为 $2k\pi$（k 为任意整数），模为 a^n，故有 $a^n = a^n e^{2jk\pi}$，于是 $z = (a^n)^{1/n} = (a^n e^{2jk\pi})^{1/n} = a e^{2jk\pi/n} = a\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + j\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$，$k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$

5.6 (1) 7.616, 113°12′

(2) 5.383, 68°12′

(3) 3.162, −71°34′

(4) 2, 240°

5.7 (1) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$

(2) $u(x, y) = \dfrac{1-x}{(1+x)^2+y^2}$, $v(x, y) = \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$

(3) $u(x, y) = e^{3x}\cos 3y$, $v(x, y) = e^{3x}\sin 3y$

(4) $u(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $v(x, y) = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$

5.8 (1) $f(z) = j\,2z - z^2 + c$ (c 为实数，下同)

(2) $f(z) = 1/z + j\,2z + c$

(3) $f(z) = z^3 + c$

(4) $f(z) = -j\,2e^z + c$

5.10 $f'(z) = \dfrac{2}{(1-z)^2}$，除 $z = 1$ 点外处处解析。

5.11 (1) 否 (2) 是 (3) 是 (4) 是

5.15 $w = -j\dfrac{z-j}{z+j}$

5.16 $w = \dfrac{2z-1}{z-2}$

5.17 $w = \dfrac{(jz-1)z+2+j}{5z-4+j3}$

5.18 $u^2 = 2(2-v)$

5.19 (1) 1 (5) $(1-j)/2$

(2) -1 (6) $(5+j12)/169$

(3) $-j$ (7) $(-3-j4)/25$

(4) j (8) $1-j$

5.20 (1) $u^2+v^2+v=0$ (4) $u^2+v^2-u+v=0$

(2) $u^2+v^2-u-v=1$ (5) $2v+1=0$

(3) $u^2+v^2+u=0$ (6) $u^2+v^2+2u+4v+1=0$

5.21 $w = \dfrac{10z-12}{z-1}$

5.22 $-j2$, $(1-j3)/2$, $-(1+j3)/2$, $-j3/2$, ∞, $-j$

5.23 $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$

第六章

6.1 (1) 1
(2) $4\pi e^2$
(3) $4\sqrt{5} + 2$
(4) 2
(5) $\pi/4$

6.2 对两种情况积分结果均为 $17 + j19$.

6.3 0

6.4 (1) 0
(2) $j\ 2\pi$
(3) $-j\ 2\pi$
(4) $j\ \pi/60$
(5) $j\ 2\pi(1 - e^{-1})$
(6) 0
(7) $j\ 2\pi$
(8) $j\ \pi e/8$
(9) $j\ \pi\ (e - 5\ e^{-3})/8$
(10) $e\pi(1 + j3)$
(11) $2 - j\ 2/\pi$
(12) $j\ 2\pi(e^3 + \cos 2 - 2)$

6.5 $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k + 1)z^k$

6.6 (1) $F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{b^k + 1} z^k, \left(|Z| < \left|\frac{b}{a}\right|\right)$

(2) $F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

(3) $F_3(z) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - z)^k}{3k}, (|1 - z| < 3)$

6.10 (1) $e^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $j\ \cos 2 \left(\frac{e^3 - e^{-3}}{2}\right) = j\ \cos 2\ \mathrm{sh}3.$

6.13 (1) 2

(2) $\frac{4}{5}$, $\frac{1-j2}{10}$, $\frac{1+j2}{10}$

(3) $\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8}$

(4) $-\frac{2}{3}$

(5) -1, $\frac{e}{2}$, $\frac{e^{-1}}{2}$

(6) $e^{3t}+3te^{3t}$

(7) $\frac{1}{n}$

(8) $\frac{(-1)^n(2n)!}{(n+1)(n-1)!}$

6.16 $0<K<2$

6.17 (1) 是 (2) 是 (3) 否

6.18 否

6.19 是

6.20 (1) 有 (2) 有 (3) 有 (4) 无

6.21 否

6.22 1, 1/2, 1/2; 是

6.23 $L_1=L_2=2H, C_1=C_2=3F$

6.24 $R_1=3.33\Omega, R_2=1.75\Omega, R_3=7.69\Omega, C_1=0.19F$,
$C_2=25.5F$

附录Ⅰ　常用周期函数的傅里叶级数

序号	函数表达式（周期为 T）	傅里叶级数（$\omega = 2\pi/T$）
1	$f(t)=1-\frac{t}{T},\ (0<t<T)$	$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega t)$
2	$f(t)=\frac{t}{T},\ \left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\right)$	$f(t)=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(n\omega t)$
3	$f(t)=\lvert\cos(\omega t)\rvert,\ (0<t<T)$	$f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos(n\omega t)$
4	$f(t)=\begin{cases}1, & \left(-\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}\right)\\ 0, & \left(\frac{\tau}{2}<t<T-\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$f(t)=\frac{\tau}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)\cos(n\omega t)$
5	$f(t)=\begin{cases}1, & \left(0<t<\frac{T}{2}\right)\\ -1, & \left(\frac{T}{2}<t<T\right)\end{cases}$	$f(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\omega t]$
6	$f(t)=\begin{cases}1, & \left(-\frac{T}{4}<t<\frac{T}{4}\right)\\ -1, & \left(\frac{T}{4}<t<\frac{3T}{4}\right)\end{cases}$	$f(t)=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos[(2n-1)\omega t]$
7	$f(t)=\begin{cases}\frac{2t}{T}, & \left(-\frac{T}{4}<t<\frac{T}{4}\right)\\ 1-\frac{2t}{T}, & \left(\frac{T}{4}<t<\frac{3T}{4}\right)\end{cases}$	$f(t)=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin[(2n-1)\omega t]$
8	$f(t)=\begin{cases}1+\frac{2t}{T}, & \left(-\frac{T}{2}<t<-\frac{T}{4}\right)\\ \frac{1}{2}, & \left(-\frac{T}{4}<t<\frac{T}{4}\right)\\ 1-\frac{2t}{T}, & \left(\frac{T}{4}<t<\frac{T}{2}\right)\end{cases}$	$f(t)=\frac{3}{8}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=\text{正奇数}}\frac{1}{n^2}\cos(n\omega t)-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=\text{正奇数}}\frac{1}{n^2}\cos(2n\omega t)$

续表

序号	函数表达式（周期为 T）	傅里叶级数（$\omega = 2\pi/T$）
9	$f(t)=\begin{cases}1+\dfrac{2t}{\tau}, & \left(-\dfrac{\tau}{2}<t<0\right)\\ 1-\dfrac{2t}{\tau}, & \left(0<t<\dfrac{\tau}{2}\right)\\ 0, & \left(\dfrac{\tau}{2}<t<T-\dfrac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$f(t)=\dfrac{\tau}{2T}+\dfrac{4T}{\pi^2\tau}\times\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin^2\left(\dfrac{n\omega\tau}{4}\right)\cos(n\omega t)$
10	$f(t)=\begin{cases}\cos(\omega t), & \left(-\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{T}{4}\right)\\ 0, & \left(\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{3T}{4}\right)\end{cases}$	$f(t)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\cos(\omega t)-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos(2n\omega t)$
11	$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\omega t)-\cos\theta}{1-\cos\theta}, & \left(-\dfrac{\theta}{\omega}<t<\dfrac{\theta}{\omega}\right)\\ 0, & \left(\dfrac{\theta}{\omega}<t<\dfrac{2\pi-\theta}{\omega}\right)\end{cases}$	$f(t)=\dfrac{\sin\theta-\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}+\dfrac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{\pi(1-\cos\theta)}\cos(\omega t)+2\sum_{n=2}^{\infty}\left[\dfrac{\sin\theta\cos(n\theta)\cos(n\omega t)}{\pi(1-n^2)(1-\cos\theta)}-\dfrac{\cos\theta\sin(n\theta)\cos(n\omega t)}{n\pi(1-n^2)(1-\cos\theta)}\right]$

附录Ⅱ　傅里叶变换表

序号	$f(t)$	$F(\omega)$
1	1	$2\pi\delta(\omega)$
2	t	$2\pi j\delta'(\omega)$
3	t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
4	$\frac{1}{t}$	$\begin{cases}-j\pi, & (\omega>0)\\ j\pi, & (\omega<0)\end{cases}$
5	$\lvert t\rvert$	$-\frac{2}{\omega^2}$
6	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
7	$t^n e^{j\omega_0 t}$	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega-\omega_0)$
8	$\delta'(t)$	$j\omega$
9	$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
10	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
11	$\delta^{(n)}(t-t_0)$	$(j\omega)^n e^{-j\omega t_0}$
12	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
13	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
14	$\frac{1}{t}\sin\omega_0 t$	$\begin{cases}\pi, & (\lvert\omega\rvert\le\omega_0)\\ 0, & (\lvert\omega\rvert>\omega_0)\end{cases}$
15	$\frac{2}{t^2}\sin^2\omega_0 t$	$\begin{cases}\pi(2\omega_0-\lvert\omega\rvert), & (\lvert\omega\rvert\le 2\omega_0)\\ 0, & (\lvert\omega\rvert>2\omega_0)\end{cases}$
16	$\begin{cases}\sin\omega_0 t, & (t>0)\\ 0, & (t<0)\end{cases}$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]-\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$
17	$\begin{cases}\cos\omega_0 t, & (t>0)\\ 0, & (t<0)\end{cases}$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]-\frac{j\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$
18	$\begin{cases}\cos\omega_0 t, & (\lvert t\rvert\le\tau)\\ 0, & (\lvert t\rvert>\tau)\end{cases}$	$\frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{\omega-\omega_0}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\tau}{\omega+\omega_0}$
19	$\begin{cases}e^{-j\omega t}, & (\alpha<t<\beta)\\ 0, & (t<\alpha\text{ 或 }t>\beta)\end{cases}$	$\frac{j}{\omega_0-\omega}\left[e^{j\alpha(\omega_0-\omega)}-e^{j\beta(\omega_0-\omega)}\right]$
20	$\begin{cases}e^{-at+j\omega_0 t}, & (t>0,a>0)\\ 0, & (t<0)\end{cases}$	$\frac{j}{\omega_0-\omega+ja}$

续表 1

序号	$f(t)$	$F(\omega)$
21	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$
22	$\sin at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right)$
23	$\cos at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4a}-\frac{\pi}{4}\right)$
24	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}}$
25	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}e^{-at}$, $(a>0)$	$\sqrt{\frac{2\pi}{a^2+\omega^2}}\sqrt{a+\sqrt{a^2+\omega^2}}$
26	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}\sin\omega_0 t$	$j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega+\omega_0\rvert}}-\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega-\omega_0\rvert}}\right)$
27	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}\cos\omega_0 t$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega+\omega_0\rvert}}+\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega-\omega_0\rvert}}\right)$
28	$e^{-a\lvert t\rvert}$, $(a>0)$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
29	$\frac{1}{t}e^{-at}\sin t$	$\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2}\right)$
30	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}e^{-\frac{a}{\lvert t\rvert}}$, $(a>0)$	$\frac{1}{\lvert\omega\rvert}(\cos\sqrt{2a\lvert\omega\rvert}-\sin\sqrt{2a\lvert\omega\rvert})e^{-\sqrt{2a\lvert\omega\rvert}}$
31	$\frac{1}{\mathrm{ch}at}$	$\frac{\pi}{a}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi\omega}{2a}\right)^{-1}$
32	$\frac{1}{\mathrm{sh}at}$	$-j\frac{\pi}{a}\mathrm{th}\frac{\pi\omega}{2a}$
33	$\frac{\mathrm{sh}at}{\mathrm{sh}\pi t}$, $(-\pi<a<\pi)$	$\frac{\sin a}{\mathrm{ch}\omega+\cos a}$
34	$\frac{\mathrm{ch}at}{\mathrm{ch}\pi t}$, $(-\pi<a<\pi)$	$\frac{2}{\mathrm{ch}\omega+\cos a}\cos\frac{a}{2}\mathrm{ch}\frac{\omega}{2}$
35	$\frac{\mathrm{sh}at}{\mathrm{ch}\pi t}$, $(-\pi<a<\pi)$	$\frac{-2j}{\mathrm{ch}\omega+\cos a}\sin\frac{a}{2}\mathrm{sh}\frac{\omega}{2}$
36	$\frac{\mathrm{ch}at}{\mathrm{sh}\pi t}$, $(-\pi<a<\pi)$	$\frac{-j\mathrm{sh}\omega}{\mathrm{ch}\omega+\cos a}$

续表 2

序号	$f(t)$	$F(\omega)$
37	$\frac{1}{t^2+a^2}$, (Rea < 0)	$-\frac{\pi}{a}e^{\|\omega\|a}$
38	$\frac{t}{(t^2+a^2)^2}$, (Rea < 0)	$\frac{j\omega\pi}{2a}e^{\|\omega\|a}$
39	$\frac{\sin\omega_0 t}{t^2+a^2}$, (Re$a$ < 0)	$\frac{j\pi}{2a}\left(e^{\|\omega-\omega_0\|a}-e^{\|\omega+\omega_0\|a}\right)$
40	$\frac{\cos\omega_0 t}{t^2+a^2}$, (Re$a$ < 0)	$-\frac{\pi}{2a}\left(e^{\|\omega-\omega_0\|a}+e^{\|\omega+\omega_0\|a}\right)$
41	$\frac{e^{j\omega t}}{t^2+a^2}$, (Re$a$ < 0)	$-\frac{\pi}{a}e^{\|\omega-\omega_0\|a}$
42	$\ln\frac{t^2+a^2}{t^2+b^2}$, ($a,b\geq 0$)	$\frac{2\pi}{\|\omega\|}\left(e^{-\|\omega\|b}-e^{-\|\omega\|a}\right)$
43	$\frac{\sin(\omega_0\sqrt{t^2+a^2})}{\sqrt{t^2+a^2}}$, ($a>0$)	$\begin{cases}\pi J_0(a\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}), & (\|\omega\|<\omega_0)\\ 0, & (\|\omega\|>\omega_0)\end{cases}$
44	$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)$, ($a>0$)	$\frac{-j\pi}{\omega}e^{-\|\omega\|a}$
45	$\begin{cases}e^{-at}, & (t\geq 0, a>0)\\ 0, & (t<0)\end{cases}$	$\frac{1}{a+j\omega}$
46	$\begin{cases}te^{-at}, & (t>0)\\ 0, & (t<0)\end{cases}$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
47	$\begin{cases}-e^{at}, & (t<0, a>0)\\ e^{-at}, & (t>0, a>0)\end{cases}$	$-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$
48	$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}, & (\|t\|<a)\\ 0, & (\|t\|>a)\end{cases}$	$\pi J_0(a\|\omega\|)$
49	$\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{-t}}, & (t<0)\\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & (t>0)\end{cases}$	$\begin{cases}j\sqrt{\frac{2\pi}{-\omega}}, & (\omega<0)\\ -j\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}, & (\omega>0)\end{cases}$
50	$\begin{cases}1, & \left(\|t\|<\frac{\tau}{2}\right)\\ 0, & \left(\|t\|>\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

续表 3

序号	$f(t)$	$F(\omega)$
51	$\begin{cases}\frac{1}{\tau}\left(t+\frac{\tau}{2}\right), & \left(\lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\right)\\ 0, & \left(\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$\frac{j}{\omega}\left[e^{-j\frac{1}{2}\omega\tau}-\frac{2}{\omega\tau}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]$
52	$\begin{cases}\frac{2}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}+t\right), & \left(-\frac{\tau}{2}\le t<0\right)\\ \frac{2}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}-t\right), & \left(0\le t<\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$\frac{4}{\omega^2\tau}\left[1-\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]$
53	$\begin{cases}1, & \left(\lvert t\rvert<\frac{\tau_1}{2}\right)\\ \frac{\tau-2\lvert t\rvert}{\tau-\tau_1}, & \left(\frac{\tau_1}{2}<\lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\right)\\ 0, & \left(\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$\frac{8}{\omega^2(\tau-\tau_1)}\sin\left[\frac{\omega(\tau+\tau_1)}{4}\right]\sin\left[\frac{\omega(\tau-\tau_1)}{4}\right]$
54	$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right), & \left(\lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\right)\\ 0, & \left(\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$\frac{\frac{\pi\tau}{2}\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$
55	$\begin{cases}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)\right], & \left(\lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\right)\\ 0, & \left(\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\right)\end{cases}$	$\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2\right]}$
56	$\begin{cases}\frac{\cos(\omega_0\sqrt{a^2-t^2})}{\sqrt{a^2-t^2}}, & (\lvert t\rvert<a)\\ 0, & (\lvert t\rvert>a)\end{cases}$	$\pi J_0(a\sqrt{\omega_0^2+\omega^2})$
57	$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-\omega_0\sqrt{a^2-t^2}}, & (\lvert t\rvert<a)\\ \frac{-\sin(\omega_0\sqrt{t^2-a^2})}{\sqrt{t^2-a^2}}, & (\lvert t\rvert>a)\end{cases}$	$\begin{cases}\pi J_0(a\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}), & (\lvert\omega\rvert<\omega_0)\\ 0, & (\lvert\omega\rvert>\omega_0)\end{cases}$

附录Ⅲ　拉普拉斯变换表

序号	$F(s)$	$f(t)$
1	1	$\delta(t)$
2	s	$\delta'(t)$
3	$\frac{1}{s}$	$u(t)$
4	$\frac{1}{s^2}$	t
5	$\frac{1}{s^n}$，$(n=1,2,3,\cdots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
6	$\frac{1}{s^n}$，$(n>0)$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
7	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
8	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	$\sqrt{\frac{4t}{\pi}}$
9	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
10	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$
11	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
12	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}$
13	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}+\frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
14	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}-\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}-\frac{e^{-\beta t}}{\beta(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}$

续表 2

序号	$F(s)$	$f(t)$
15	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha t}+\alpha t-1)$
16	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{\alpha^2 e^{-\beta t}-\beta^2 e^{-\alpha t}}{\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)}-\frac{\alpha\beta t+\alpha+\beta}{\alpha^2\beta^2}$
17	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{\alpha\beta(\gamma t-1)-\alpha\gamma-\beta\gamma}{(\alpha\beta\gamma)^2}+\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}$ $+\frac{e^{-\beta t}}{\beta^2(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}+\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
18	$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$	$\frac{\sin\alpha t}{\alpha}$
19	$\frac{1}{s^2-\alpha^2}$	$\frac{\mathrm{sh}\,\alpha t}{\alpha}$
20	$\frac{1}{s(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha^2}$
21	$\frac{1}{s^2(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{t}{\alpha^2}-\frac{\sin\alpha t}{\alpha^3}$
22	$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(e^{-\alpha t}+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t-\cos\beta t\right)$
23	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{1}{\alpha\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\sin\beta t}{\beta}+\frac{\alpha\cos\beta t}{\beta^2}+\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)$
24	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{t}{\alpha\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}$ $+\frac{\cos(\beta t+\phi)}{\beta^3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
25	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s^2+\gamma^2)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\alpha^2+\gamma^2)}+\frac{e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)(\beta^2+\gamma^2)}$ $+\frac{\sin(\gamma t-\phi)}{\gamma\sqrt{\gamma^2(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta-\gamma^2)^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$

续表 3

序号	$F(s)$	$f(t)$
26	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s^2+\gamma^2)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha^2+\gamma^2)}+\frac{e^{-\beta t}}{\beta(\beta-\alpha)(\beta^2+\gamma^2)}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\frac{\cos(\gamma t+\phi)}{\gamma^2\sqrt{(\alpha\beta-\gamma^2)+\gamma^2(\alpha+\beta)^2}}$，$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$
27	$\frac{1}{s^3(s+\alpha)(s+\beta)(s^2+\gamma^2)}$	$\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}\left(t-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\beta-\alpha)(\alpha^2+\gamma^2)}+\frac{e^{-\beta t}}{\beta^2(\alpha-\beta)(\beta^2+\gamma^2)}+\frac{\cos(\gamma t+\phi)}{\gamma^3\sqrt{(\alpha\beta-\gamma^2)^2+\gamma^2(\alpha+\beta)^2}}$，$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$
28	$\frac{1}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{\sin\alpha t}{\alpha}-\frac{\sin\beta t}{\beta}\right)$
29	$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{\beta}$
30	$\frac{1}{(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{e^{-\gamma t}}{\beta^2+(\gamma-\alpha)^2}+\frac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t-\phi)}{\beta\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}}$，$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)$
31	$\frac{1}{s^2[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(t-\frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\right)+\frac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}$，$\phi=2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
32	$\frac{1}{s(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{1}{\gamma(\alpha^2+\beta^2)}-\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]}+\frac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]}}$，$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\right)$

续表 4

序号	$F(s)$	$f(t)$
33	$\dfrac{1}{s^2(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{1}{\gamma(\alpha^2+\beta^2)}\left(t-\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\right)$ $+\dfrac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]}$ $+\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}}$, $\phi=2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)$
34	$\dfrac{1}{(s+\gamma)(s+\delta)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{e^{-\gamma t}}{(\delta-\gamma)[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]}$ $+\dfrac{e^{-\delta t}}{(\gamma-\delta)[(\alpha-\delta)^2+\beta^2]}$ $+\dfrac{e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\phi)}{\beta\sqrt{[(\alpha-\delta)^2+\beta^2)][(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha-\delta}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta}\right)$
35	$\dfrac{1}{(s^2+\gamma^2)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{\beta\sin(\gamma t+\phi_1)+\gamma e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi_2)}{\beta\gamma\sqrt{4\alpha^2\gamma^2+(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\alpha\gamma}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}\right)$
36	$\dfrac{1}{s(s^2+\gamma^2)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{1}{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}+\dfrac{\sin(\gamma t-\phi_1)}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $\times\dfrac{1}{\sqrt{4\alpha^2\gamma^2+(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}}$ $-\dfrac{\sin(\gamma t+\phi_2)}{\gamma^2\sqrt{4\alpha^2\gamma^2+(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}\right)$

续表 5

序号	$F(s)$	$f(t)$
37	$\frac{1}{(s+\gamma)(s^2+\delta^2)} \times \frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{e^{-\gamma t}}{(\gamma^2+\delta^2)[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]} + \left[\frac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi_1)}{\beta\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}} - \frac{\sin(\delta t+\phi_2)}{\delta\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\right] \times \frac{1}{\sqrt{4\alpha^2\delta^2+(\alpha^2+\beta^2-\delta^2)^2}}$，$\phi_1 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\right) - \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2+\delta^2}{2\alpha\beta}\right)$，$\phi_2 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}{2\alpha\delta}\right)$
38	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1-e^{-\alpha t}-\alpha t e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
39	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\frac{\alpha t(1+e^{-\alpha t})-2(1-e^{-\alpha t})}{\alpha^3}$
40	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)^2}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{[(\alpha-\beta)t-1]e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}$
41	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)^2}$	$\frac{1}{\alpha\beta^2} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha-\beta)^2} - \frac{t\beta(\alpha-\beta)+\alpha-2\beta}{\beta^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$
42	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)^2}$	$\frac{1}{\alpha\beta^2}\left(t-\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{\beta}\right) + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\beta-\alpha)^2} + \left[\frac{t}{\beta^2(\alpha-\beta)} + \frac{2\alpha-3\beta}{\beta^3(\beta-\alpha)^2}\right]e^{-\beta t}$
43	$\frac{1}{(s+\beta)(s+\gamma)(s+\alpha)^2}$	$\frac{te^{-\alpha t}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(2\alpha-\beta-\gamma)e^{-\alpha t}}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2} + \frac{e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)^2} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2}$
44	$\frac{1}{s(s+\beta)(s+\gamma)(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\beta\gamma\alpha^2} + \frac{e^{-\beta t}}{\beta(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)^2} + \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)^2} + \frac{te^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)} - \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)+\alpha(2\alpha-\gamma-\beta)}{\alpha^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}$

续表 6

序号	$F(s)$	$f(t)$
45	$\dfrac{1}{s^2(s+\beta)(s+\gamma)(s+\alpha)^2}$	$\dfrac{\alpha\beta\gamma t-2\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma}{\alpha^3\beta^2\gamma^2}$ $+\dfrac{\cdot e^{-\beta t}}{\beta^2(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)^2}+\dfrac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2}$ $+\dfrac{(\alpha t+2)e^{-\alpha t}}{\alpha^3(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}+\dfrac{(2\alpha-\gamma-\beta)e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta)^2}$
46	$\dfrac{1}{(s^2+\alpha^2)(s+\beta)^2}$	$\dfrac{\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}+\dfrac{te^{-\beta t}}{\alpha^2+\beta^2}+\dfrac{2\beta e^{-\beta t}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$, $\phi=2\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$
47	$\dfrac{1}{s(s^2+\alpha^2)(s+\beta)^2}$	$\dfrac{1}{\alpha^2\beta^2}-\dfrac{\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}$ $-\left[\dfrac{t}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}+\dfrac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]e^{-\beta t}$, $\phi=\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)-\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$
48	$\dfrac{1}{s^2(s^2+\alpha^2)(s+\beta)^2}$	$\dfrac{t}{\alpha^2\beta^2}-\dfrac{2}{\alpha^3\beta^3}+\dfrac{\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha^3(\alpha^2+\beta^2)}$ $+\left[\dfrac{t}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}+\dfrac{2(\alpha^2+2\beta^2)}{\beta^3(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]e^{-\beta t}$, $\phi=2\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$
49	$\dfrac{1}{(s+\gamma)(s^2+\alpha^2)(s+\beta)^2}$	$\dfrac{\sin(\alpha t-\phi)}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$ $+\dfrac{2(\gamma-\beta)\beta-(\alpha^2+\beta^2)}{(\gamma-\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\beta t}$ $+\dfrac{te^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha^2+\beta^2)}+\dfrac{e^{-\gamma t}}{(\alpha^2+\gamma^2)(\beta-\gamma)^2}$, $\phi=2\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$
50	$\dfrac{1}{(s+\gamma)^2[(s+\beta)^2+\alpha^2]}$	$\dfrac{e^{-\beta t}\sin(\alpha t-\phi)}{\alpha[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]}$ $+\left[\dfrac{t}{\alpha^2+(\beta-\gamma)^2}+\dfrac{2(\gamma-\beta)}{[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]^2}\right]e^{-\gamma t}$, $\phi=2\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\gamma-\beta}\right)$

续表 7

序号	$F(s)$	$f(t)$
51	$\dfrac{1}{s(s+\gamma)^2[(s+\beta)^2+\alpha^2]}$	$\dfrac{e^{-\beta t}\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $+\dfrac{1}{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}-\dfrac{te^{-\gamma t}}{\gamma[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]}$ $-\dfrac{\alpha^2+(\beta-\gamma)^2-2\gamma(\beta-\gamma)}{\gamma^2[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]^2}e^{-\gamma t}$, $\phi=2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$
52	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\dfrac{te^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)^2}-\dfrac{2e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)^3}+\dfrac{te^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}-\dfrac{2e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)^3}$
53	$\dfrac{1}{s(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\dfrac{1}{\alpha^2\beta^2}-\dfrac{te^{-\alpha t}}{\alpha(\beta-\alpha)^2}+\dfrac{(3\alpha-\beta)e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\beta-\alpha)^3}$ $-\dfrac{te^{-\beta t}}{\beta(\alpha-\beta)^2}+\dfrac{(3\beta-\alpha)e^{-\beta t}}{\beta^2(\alpha-\beta)^3}$
54	$\dfrac{1}{s^2(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$-\dfrac{2(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^2}+\dfrac{te^{-\alpha t}}{\alpha^2(\beta-\alpha)^2}+\dfrac{2(\beta-2\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha^3(\beta-\alpha)^3}$ $\dfrac{t}{\alpha^2\beta^2}+\dfrac{te^{-\beta t}}{\beta^2(\alpha-\beta)^2}+\dfrac{2(\alpha-2\beta)e^{-\beta t}}{\beta^3(\alpha-\beta)^3}$
55	$\dfrac{1}{(s+\gamma)(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\dfrac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2}$ $+\dfrac{[3\alpha-(\beta-2\gamma)]e^{-\alpha t}}{(\gamma-\alpha)^2(\beta-\alpha)^3}+\dfrac{[3\beta-(\alpha+2\gamma)]e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)^3(\alpha-\beta)^3}$ $+\dfrac{te^{-\alpha t}}{(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)^2}+\dfrac{te^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)^2}$
56	$\dfrac{1}{(s^2+\gamma^2)(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\dfrac{\sin(\gamma t+\phi)}{\gamma(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2)}$ $+\dfrac{te^{-\alpha t}}{(\alpha^2+\gamma^2)(\beta-\alpha)^2}+\dfrac{te^{-\beta t}}{(\beta^2+\gamma^2)(\alpha-\beta)^2}$ $-\dfrac{2(\alpha^2+\gamma^2)-2\alpha(\beta-\alpha)}{(\alpha^2+\gamma^2)(\beta-\alpha)^3}e^{-\alpha t}$ $-\dfrac{2(\beta^2+\gamma^2)-2\beta(\alpha-\beta)}{(\beta^2+\gamma^2)(\alpha-\beta)^3}e^{-\beta t}$, $\phi=2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)+2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$

续表 8

序号	$F(s)$	$f(t)$
57	$\frac{1}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{\sin\alpha t-\alpha t\cos\alpha t}{2\alpha^3}$
58	$\frac{1}{s(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{2(1-\cos\alpha t)-\alpha t\sin\alpha t}{2\alpha^4}$
59	$\frac{1}{s^2(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{3\sin\alpha t+\alpha t(2+\cos\alpha t)}{2\alpha^5}$
60	$\frac{1}{[\alpha^2+(s+\beta)^2]^2}$	$\frac{e^{-\beta t}(\sin\alpha t-\alpha t\cos\alpha t)}{2\alpha^3}$
61	$\frac{1}{(s+\beta)(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{e^{-\beta t}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}-\frac{t\sin(\alpha t+\phi)}{2\alpha^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $-\frac{\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}\cos(\alpha t+\phi_2)}{2\alpha^3(\alpha^2+\beta^2)}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),\quad \phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{3\alpha^2\beta+\beta^3}{2\alpha^3}\right)$
62	$\frac{1}{s(s+\beta)(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{\alpha^4\beta}-\frac{e^{-\beta t}}{\beta(\alpha^2+\beta^2)^2}+\frac{t\cos(\alpha t+\phi)}{2\alpha^3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $-\frac{\sqrt{4\beta^2+9\alpha^2}\cos(\alpha t+\phi_2)}{2\alpha^4(\alpha^2+\beta^2)}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),\quad \phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{3\alpha}{2\beta}\right)+2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
63	$\frac{1}{s^2(s+\beta)(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{e^{-\beta t}}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)^2}+\frac{t\sin(\alpha t+\phi)}{2\alpha^4\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $-\frac{1-\beta t}{\alpha^4\beta^2}-\frac{\sqrt{9\beta^2+16\alpha^2}\sin(\alpha t+\phi_2)}{4\alpha^5(\alpha^2+\beta^2)}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),\quad \phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{4\alpha}{3\beta}\right)-2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
64	$\frac{1}{s(s+\alpha)^3}$	$\frac{1}{\alpha^3}-\left(\frac{t^2}{2\alpha}+\frac{t}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right)e^{-\alpha t}$
65	$\frac{1}{s^3(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{t^2}{2\alpha^2}+\frac{\cos\alpha t-1}{\alpha^4}$
66	$\frac{1}{s^2(s^2-\alpha^2)}$	$\frac{\mathrm{sh}\,\alpha t}{\alpha^3}-\frac{t}{\alpha^2}$

续表 9

序号	$F(s)$	$f(t)$
67	$\frac{1}{s^3(s^2-\alpha^2)}$	$\frac{\operatorname{ch}\alpha t-1}{\alpha^4}-\frac{t^2}{2\alpha^2}$
68	$\frac{1}{s^4-\alpha^4}$	$\frac{\operatorname{sh}\alpha t-\sin\alpha t}{2\alpha^3}$
69	$\frac{1}{s^4+4\alpha^4}$	$\frac{\sin\alpha t\operatorname{ch}\alpha t-\cos\alpha t\operatorname{sh}\alpha t}{4\alpha^3}$
70	$\frac{1}{\sqrt{s}+\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-\alpha e^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{t})$
71	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$
72	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-\alpha)}$	$\frac{e^{\alpha t}\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha t})}{\sqrt{\alpha}}$
73	$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+\alpha)}$	$e^{\alpha^2 t}\operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{t})$
74	$\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}$	$J_0(\alpha t)$
75	$\frac{1}{\sqrt{s^2-\alpha^2}}$	$J_0(j\alpha t)$
76	$\frac{1}{s+\sqrt{s^2+\alpha^2}}$	$\frac{J_1(\alpha t)}{\alpha t}$
77	$\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}(s+\sqrt{s^2+\alpha^2})}$	$\frac{J_1(\alpha t)}{\alpha}$
78	$\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}(s+\sqrt{s^2+\alpha^2})^n}$	$\frac{J_n(\alpha t)}{\alpha^n}$
79	$\frac{1}{(s+\sqrt{s^2+\alpha^2})^n}$	$\frac{nJ_n(\alpha t)}{\alpha^n t}$
80	$\frac{1}{s(s+\sqrt{s^2+\alpha^2})^n}$	$\frac{n}{\alpha^n}\int_0^t\frac{J_n(\alpha t)}{t}\mathrm{d}t$
81	$\frac{\sqrt{s}}{s-\alpha^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+\alpha e^{\alpha^2 t}\operatorname{erf}(\alpha\sqrt{t})$
82	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$	$\cos\alpha t$

续表 10

序号	$F(s)$	$f(t)$
83	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$\mathrm{ch}\,\alpha t$
84	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{\beta^2-\alpha^2},\quad(\alpha^2\neq\beta^2)$
85	$\frac{s}{[s^2+(\alpha+\beta)^2][s^2+(\alpha-\beta)^2]}$	$\frac{\sin\beta t\sin\alpha t}{2\alpha\beta}$
86	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{t\sin\alpha t}{2\alpha}$
87	$\frac{s^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{\sin\alpha t+\alpha t\cos\alpha t}{2\alpha}$
88	$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}(1-\alpha t)$
89	$\frac{s}{s^4-\alpha^4}$	$\frac{\mathrm{ch}\,\alpha t-\cos\alpha t}{2\alpha^2}$
90	$\frac{s^2}{s^4-\alpha^4}$	$\frac{\mathrm{sh}\,\alpha t+\sin\alpha t}{2\alpha}$
91	$\frac{s^3}{s^4-\alpha^4}$	$\frac{\mathrm{ch}\,\alpha t+\cos\alpha t}{2}$
92	$\frac{s}{s^4+4\alpha^4}$	$\frac{\mathrm{sh}\,\alpha t\sin\alpha t}{2\alpha^2}$
93	$\frac{s}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	$\frac{\alpha e^{-\alpha t}-\beta e^{-\beta t}}{\alpha-\beta},\quad(\alpha\neq\beta)$
94	$\frac{8\alpha^3 s^2}{(s^2+\alpha^2)^3}$	$(1+\alpha^2t^2)\sin\alpha t-\alpha t\cos\alpha t$
95	$\frac{s}{(s-\alpha)\sqrt{s-\alpha}}$	$\frac{e^{\alpha t}(1+2\alpha t)}{\sqrt{\pi t}}$
96	$\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}(s^2+\alpha^2)^n},\quad\left(\mathrm{n}>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{(2\alpha)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}t^nJ_n(\alpha t)$
97	$\frac{s+a_0}{s(s+\alpha)}$	$\frac{a_0-(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha}$
98	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}-(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$

续表 11

序号	$F(s)$	$f(t)$
99	$\frac{s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{a_0}{\alpha\beta}-\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha(\beta-\alpha)}-\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta(\alpha-\beta)}$
100	$\frac{s+a_0}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1+a_0 t}{\alpha\beta}-\frac{(\alpha+\beta)a_0}{\alpha^2\beta^2}+\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\beta-\alpha)}$ $-\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta^2(\beta-\alpha)}$
101	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}$ $+\frac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
102	$\frac{s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{a_0}{\alpha\beta\gamma}-\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}-\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}$ $-\frac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
103	$\frac{s+a_0}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{1+a_0 t}{\alpha\beta\gamma}-\frac{a_0(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}$ $+\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta^2(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}+\frac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
104	$\frac{s+a_0}{s^2+\alpha^2}$	$\frac{\sqrt{a_0^2+\alpha^2}}{\alpha}\sin(\alpha t+\phi),\quad \phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)$
105	$\frac{s+a_0}{s(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{a_0}{\alpha^2}+\frac{\sqrt{a_0^2+\alpha^2}}{\alpha^2}\sin(\alpha t-\phi),\quad \phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_0}{\alpha}\right)$
106	$\frac{s+a_0}{s^2(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{1+a_0 t}{\alpha^2}-\frac{\sqrt{a_0^2+\alpha^2}}{\alpha^3}\sin(\alpha t+\phi),\quad \phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)$
107	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{a_0^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\sin(\beta t+\phi),$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_0}{\beta}\right)$
108	$\frac{s+a_0}{s(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{a_0}{\alpha\beta^2}-\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}-\sqrt{\frac{a_0^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\frac{\cos(\beta t+\phi)}{\beta^2}$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_0}{\beta}\right)$

续表 12

序号	$F(s)$	$f(t)$
109	$\dfrac{s+a_0}{s^2(s+\alpha)(s^2+\beta^2)}$	$\dfrac{1}{\alpha\beta^2}-\dfrac{a_0}{\alpha\beta^2}\left(\dfrac{1}{\alpha}-t\right)+\dfrac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}$ $+\dfrac{1}{\beta^3}\sqrt{\dfrac{a_0^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\cos(\beta t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{a_0}\right)$
110	$\dfrac{s+a_0}{(s+\alpha)(s+\beta)(s^2+\gamma^2)}$	$\dfrac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\alpha^2+\gamma^2)}+\dfrac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)(\beta^2+\gamma^2)}$ $+\dfrac{1}{\gamma}\sqrt{\dfrac{a_0^2+\gamma^2}{(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2)}}\sin(\gamma t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_0}{\gamma}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)$
111	$\dfrac{s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s^2+\gamma^2)}$	$-\dfrac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha(\beta-\alpha)(\alpha^2+\gamma^2)}-\dfrac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta(\alpha-\beta)(\beta^2+\gamma^2)}$ $+\dfrac{1}{\gamma^2}\sqrt{\dfrac{a_0^2+\gamma^2}{\gamma^2(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta-\gamma^2)}}\sin(\gamma t+\phi)$ $+\dfrac{a_0}{\alpha\beta\gamma^2}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_0}{\gamma}\right)$
112	$\dfrac{s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s^2+\gamma^2)}$	$\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\dfrac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{\alpha^2(\beta-\alpha)(\alpha^2+\gamma^2)}$ $+\dfrac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta^2(\alpha-\beta)(\beta^2+\gamma^2)}+\dfrac{a_0}{\alpha\beta\gamma^2}\left(t-\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)$ $+\dfrac{1}{\gamma^3}\sqrt{\dfrac{a_0^2+\gamma^2}{\gamma^2(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta-\gamma^2)^2}}\cos(\gamma t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{a_0}\right)$
113	$\dfrac{s+a_0}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}$	$\dfrac{\sqrt{\beta^2+a_0^2}}{\beta(\alpha^2-\beta^2)}\cos(\beta t-\phi_1)$ $-\dfrac{\sqrt{\alpha^2+a_0^2}}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\cos(\alpha t-\phi_2)$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_0}{\beta}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_0}{\alpha}\right)$

序号	$F(s)$	$f(t)$
114	$\dfrac{s+a_0}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{\sqrt{\beta^2+(a_0-\alpha)^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right)$
115	$\dfrac{s+a_0}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a_0}{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\dfrac{\beta^2+(a_0-\alpha)^2}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right)$
116	$\dfrac{s+a_0}{s^2[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{1+a_0 t}{\alpha^2+\beta^2}-\dfrac{2\alpha a_0}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$ $+\dfrac{\sqrt{\beta^2+(a_0-\alpha)^2}}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)$, $\phi=2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right)$
117	$\dfrac{s+a_0}{(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{\beta^2+(\gamma-\alpha)^2}$ $+\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta}\sqrt{\dfrac{\beta^2+(a_0-\alpha)^2}{\beta^2+(\gamma-\alpha)^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)$
118	$\dfrac{s+a_0}{s(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a_0}{\gamma(\alpha^2+\beta^2)}+\dfrac{(\gamma-a_0)e^{-\gamma t}}{\gamma[\beta^2+(\gamma-\alpha)^2]}$ $+\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\dfrac{\beta^2+(a_0-\alpha)^2}{\beta^2+(\gamma-\alpha)^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}\right)$
119	$\dfrac{s+a_0}{s^2(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a_0}{\gamma(\alpha^2+\beta^2)}\left(t+\dfrac{1}{a_0}-\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\right)$ $+\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{\dfrac{\beta^2+(a_0-\alpha)^2}{\beta^2+(\gamma-\alpha)^2}}$ $+\dfrac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma^2[\beta^2+(\gamma-\alpha)^2]}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)+2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

序号	$F(s)$	$f(t)$
120	$\frac{s+a_0}{(s+\delta)(s+\gamma)} \times \frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{(\gamma-a_0)e^{-\gamma t}}{(\gamma-\delta)[\beta^2+(\gamma-\alpha)^2]}+\frac{(\delta-a_0)e^{-\delta t}}{(\delta-\gamma)[\beta^2+(\delta-\alpha)^2]}$ $+\frac{\sqrt{\beta^2+(a_0-\alpha)^2}\,e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\phi)}{\beta\sqrt{[\beta^2+(\gamma-\alpha)^2][\beta^2+(\delta-\alpha)^2]}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{a_0-\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha-\delta}\right)$
121	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)^2}$	$[1+(a_0-\alpha)t]e^{-\alpha t}$
122	$\frac{s+a_0}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}[(\alpha-a_0)\alpha t-a_0]e^{-\alpha t}$
123	$\frac{s+a_0}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^3}(\alpha+a_0\alpha t-2a_0)$ $-\frac{1}{\alpha^3}[\alpha-2a_0+(\alpha-a_0)\alpha t]e^{-\alpha t}$
124	$\frac{s+a_0}{(s+\beta)(s+\alpha)^2}$	$\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{(\beta-\alpha)^2}+\left[\frac{a_0-\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{a_0-\beta}{(\beta-\alpha)^2}\right]e^{-\alpha t}$
125	$\frac{s+a_0}{s(s+\beta)(s+\alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta}+\frac{(\beta-a_0)e^{-\beta t}}{\beta(\alpha-\beta)^2}$ $+\left[\frac{(a_0-\alpha)t}{\alpha(\alpha-\beta)}-\frac{\alpha^2-a_0(2\alpha-\beta)}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2}\right]e^{-\alpha t}$
126	$\frac{s+a_0}{s^2(s+\beta)(s+\alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta}\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{\beta}-\frac{2}{\alpha}+t\right)-\frac{(\beta-a_0)e^{-\beta t}}{\beta^2(\alpha-\beta)^2}$ $+\left[\frac{\alpha-a_0}{\alpha^2(\alpha-\beta)}-\frac{(2a_0-\alpha)(2\alpha-\beta)-\alpha a_0}{\alpha^3(\alpha-\beta)^2}\right]e^{-\alpha t}$
127	$\frac{s+a_0}{(s+\beta)(s+\gamma)} \times \frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)^2}+\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)^2}$ $+\frac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2}+\frac{a_0(2\alpha-\beta-\gamma)-\alpha^2+\beta\gamma}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2}e^{-\alpha t}$
128	$\frac{s+a_0}{s(s+\beta)(s+\gamma)} \times \frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta\gamma}+\frac{(a_0-\alpha)te^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)^2}$ $-\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)^2}-\frac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2}$ $-\frac{a_0(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)+\alpha(a_0-\alpha)(2\alpha-\beta-\gamma)}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2}e^{-\alpha t}$

序号	$F(s)$	$f(t)$
129	$\frac{s+a_0}{(s^2+\beta^2)(s+\alpha)^2}$	$\left[\frac{2a_0\alpha-\alpha^2+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}-\frac{a-a_0}{\alpha^2+\beta^2}\right]e^{-\alpha t}$ $+\frac{\sqrt{a_0^2+\beta^2}}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}\sin(\beta t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{a_0}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
130	$\frac{s+a_0}{s(s^2+\beta^2)(s+\alpha)^2}$	$\left[\frac{2\alpha^2(\alpha-a_0)-a_0(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)^2}+\frac{(\alpha-a_0)t}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\right]e^{-\alpha t}$ $-\frac{\sqrt{a_0^2+\beta^2}}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}\cos(\beta t+\phi)+\frac{a_0}{\alpha^2\beta^2}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{a_0}\right)-2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
131	$\frac{s+a_0}{s^2(s^2+\beta^2)}$ $\times\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{1+a_0t}{\alpha^2\beta^2}-\frac{2a_0}{\alpha^3\beta^2}-\frac{(\alpha-a_0)t}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{(2a_0-\alpha)(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha^2(\alpha-a_0)}{\alpha^3(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\sqrt{a_0^2+\beta^2}}{\beta^3(\alpha^2+\beta^2)}\sin(\beta t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{a_0}\right)+2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
132	$\frac{s+a_0}{(s+\gamma)(s^2+\beta^2)}$ $\times\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)^2(\beta^2+\gamma^2)}+\frac{\alpha^2(\alpha-a_0)+\beta^2(\gamma-a_0)}{(\alpha-\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}$ $-\frac{\alpha(\alpha-\gamma)(2a_0-\alpha)}{(\alpha-\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}+\frac{(\alpha-a_0)t}{(\alpha-\gamma)(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\sqrt{a_0^2+\beta^2}}{\beta\sqrt{\beta^2+\gamma^2}(\alpha^2+\beta^2)}\sin(\beta t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_0}{\beta}\right)-2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
133	$\frac{s+a_0}{(s+\gamma)^2}$ $\times\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{(a_0-\gamma)t}{\beta^2+(\alpha-\gamma)^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2-2a_0(\alpha-\gamma)-\gamma^2}{\beta^2+(\alpha-\gamma)^2}e^{-\gamma t}$ $+\frac{\sqrt{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}}{\beta[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{a_0-\alpha}\right)-2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)$

续表 16

序号	$F(s)$	$f(t)$
134	$\frac{s+a_0}{s(s+\gamma)^2}\times\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{a_0}{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}+\frac{(\gamma-a_0)t}{\gamma[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}e^{-\gamma t}$ $+\frac{2\gamma(a_0-\gamma)(\alpha-\gamma)-a_0[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}{\gamma^2[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}e^{-\gamma t}+\cdots$ $+\sqrt{\frac{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\frac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}+$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha-a_0}\right)-2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)$
135	$\frac{s+a_0}{s^2(s+\gamma)^2}\times\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{a_0 t}{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}+\frac{(\gamma-2a_0)(\alpha^2+\beta^2)-2a_0\alpha\gamma}{\gamma^3(\alpha^2+\beta^2)^2}$ $+\frac{\sqrt{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}\,e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}+\cdots$ $+\frac{2a_0-\gamma}{\gamma^3}e^{-\gamma t}+\frac{\gamma(a_0-\gamma)(2\alpha-2\gamma+t)}{\gamma^3[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}e^{-\gamma t},$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\right)$ $-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{a_0-\alpha}\right)$
136	$\frac{s+a_0}{(s+\delta)(s+\gamma)^2}\times\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\sqrt{\frac{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}{(\delta-\alpha)^2+\beta^2}}\frac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}+\cdots$ $+\frac{(a_0-\delta)e^{-\delta t}}{(\delta-\gamma)^2[(\delta-\alpha)^2+\beta^2]}-\frac{(\gamma-a_0)t\,e^{-\gamma t}}{\gamma^2[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}$ $+\frac{(\delta-a_0)[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}{(\delta-\gamma)^2[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}e^{-\gamma t}$ $-\frac{2(a_0-\gamma)(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)}{(\delta-\gamma)^2[\beta^2+(\alpha-\gamma)^2]}e^{-\gamma t},$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{a_0-\alpha}\right)-2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\delta-\alpha}\right)$
137	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\left[\frac{(a_0-\alpha)t}{(\beta-\alpha)^2}+\frac{\alpha+\beta-2a_0}{(\beta-\alpha)^3}\right]e^{-\alpha t}$ $+\left[\frac{(a_0-\beta)t}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{\alpha+\beta-2a_0}{(\alpha-\beta)^3}\right]e^{-\beta t}$
138	$\frac{s+a_0}{s(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta^2}+\left[\frac{(\alpha-a_0)t}{\alpha(\beta-\alpha)^2}+\frac{3a_0\alpha-a_0\beta-2\alpha^2}{\alpha^2(\beta-\alpha)^3}\right]e^{-\alpha t}$ $+\left[\frac{(\beta-a_0)t}{\beta(\alpha-\beta)^2}+\frac{3a_0\beta-a_0\alpha-2\beta^2}{\beta^2(\alpha-\beta)^3}\right]e^{-\beta t}$

序号	$F(s)$	$f(t)$
139	$\frac{s+a_0}{s^2(s+\alpha)^2} \times \frac{1}{(s+\beta)^2}$	$\frac{1+a_0 t}{\alpha^2\beta^2} - \frac{2a_0(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3} + \left[\frac{(a_0-\alpha)t}{\alpha^2(\beta-\alpha)^2} + \frac{2a_0(\beta-2\alpha)+\alpha(3\alpha-\beta)}{\alpha^3(\beta-\alpha)^3}\right]e^{-\alpha t} + \left[\frac{(a_0-\beta)t}{\beta^2(\alpha-\beta)^2} + \frac{2a_0(\alpha-2\beta)+\beta(3\beta-\alpha)}{\beta^3(\alpha-\beta)^3}\right]e^{-\beta t}$
140	$\frac{s+a_0}{(s+\gamma)(s+\alpha)^2} \times \frac{1}{(s+\beta)^2}$	$\frac{(a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2} + \cdots + \frac{(\alpha-a_0)te^{-\alpha t}}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)^2} + \frac{(\beta-a_0)te^{-\beta t}}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)^2} + \frac{a_0(\alpha-\beta)-(\alpha-2a_0)(\alpha-\gamma)-(\alpha^2-\beta\gamma)}{(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta)^3}e^{-\alpha t} + \frac{a_0(\beta-\alpha)-(\beta-2a_0)(\beta-\gamma)-(\beta^2-\alpha\gamma)}{(\beta-\gamma)^2(\alpha-\beta)^3}e^{-\beta t}$
141	$\frac{s+a_0}{s^2+\gamma^2} \times \frac{1}{(s+\alpha)^2} \times \frac{1}{(s+\beta)^2}$	$\frac{\sqrt{a_0^2+\gamma^2}\sin(\gamma t+\phi)}{\gamma(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2)} + \cdots + \frac{(a_0-\alpha)te^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)^2(\alpha^2+\gamma^2)} + \frac{(a_0-\beta)te^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)^2(\beta^2+\gamma^2)} + \left[\frac{2\alpha(a_0-\alpha)}{(\beta-\alpha)^2(\alpha^2+\gamma^2)^2} + \frac{\alpha+\beta-2a_0}{(\beta-\alpha)^3(\alpha^2+\gamma^2)}\right]e^{-\alpha t} + \left[\frac{2\beta(a_0-\beta)}{(\alpha-\beta)^2(\beta^2+\gamma^2)^2} + \frac{\alpha+\beta-2a_0}{(\alpha-\beta)^3(\beta^2+\gamma^2)}\right]e^{-\beta t}$, $\phi = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) + 2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{a_0}\right)$
142	$\frac{s+a_0}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^2}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{2\beta^3}\left[(a_0-\alpha+\beta^2 t)\sin\beta t + (\alpha-a_0)\beta t\cos\beta t\right]$
143	$\frac{s+a_0}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^3}\left[(a_0+\alpha^2 t)\sin\alpha t - a_0\alpha t\cos\alpha t\right]$
144	$\frac{s+a_0}{s(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^4}\left[2a_0+\alpha(1-a_0 t)\sin\alpha t - (2a_0+\alpha^2 t)\cos\alpha t\right]$
145	$\frac{s+a_0}{s^2(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^4}\left[2(1+a_0 t) + t\sqrt{a_0^2+\alpha^4}\cos(\alpha t+\phi_2)\right] - \sqrt{4\alpha^2+9a_0^2}\,\frac{\sin(\alpha t+\phi_1)}{2\alpha^3}$, $\phi_1 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\alpha}{3a_0}\right)$, $\phi_2 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^2}{a_0}\right)$

序号	$F(s)$	$f(t)$
146	$\frac{s+a_0}{(s+\beta)(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}-\frac{t}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{\alpha^2+a_0^2}{\alpha^2+\beta^2}}\sin(\alpha t+\phi_1)$ $+\frac{\sqrt{(\alpha^2-a_0\beta)^2+4a_0^2\beta^2}}{2\alpha^3(\alpha^2+\beta^2)}\cos(\alpha t+\phi_2)$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^2-a_0\beta}{2a_0\alpha}\right)-2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
147	$\frac{s+a_0}{s(s+\beta)(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^4\beta}+\frac{t}{2\alpha^3}\sqrt{\frac{\alpha^2+a_0^2}{\alpha^2+\beta^2}}\cos(\alpha t+\phi_1)$ $-\frac{\sqrt{\alpha^2(3a_0+\beta)^2+4(a_0\beta-\alpha^2)^2}}{2\alpha^4(\alpha^2+\beta^2)}\cos(\alpha t+\phi_2)$ $-\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta(\alpha^2+\beta^2)^2}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{3a_0\alpha+\alpha\beta}{2a_0\beta-2\alpha^2}\right)-2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
148	$\frac{s+a_0}{s^2(s+\beta)(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{\beta-a_0+a_0\beta t}{\alpha^4\beta^2}+\frac{t}{2\alpha^4}\sqrt{\frac{\alpha^2+a_0^2}{\alpha^2+\beta^2}}\sin(\alpha t+\phi_1)$ $+\frac{\sqrt{4\alpha^2(2a_0+\beta)^2+9(a_0\beta-\alpha^2)^2}}{4\alpha^5(\alpha^2+\beta^2)}\cos(\alpha t+\phi_2)$ $+\cdots+\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)^2}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{4a_0\alpha+2\alpha\beta}{3a_0\beta-3\alpha^2}\right)-2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
149	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)^3}$	$\frac{1}{2}\left[2+(a_0-\alpha)t\right]e^{-\alpha t}$
150	$\frac{s+a_0}{s(s+\alpha)^3}$	$\frac{a_0}{\alpha^3}-\frac{1}{2\alpha^2}\left[(a_0-\alpha)\alpha^2t^2+2a_0\alpha t+4a_0\right]e^{-\alpha t}$

续表 19

序号	$F(s)$	$f(t)$
151	$\frac{s+a_0}{s^2(s+\alpha)^3}$	$\frac{1+a_0 t}{\alpha^3}-\frac{3a_0}{\alpha^4}$ $+\frac{1}{2\alpha^3}\left[(a_0-\alpha)\alpha t^2+2(2a_0-\alpha)t+2\right]e^{-\alpha t}$
152	$\frac{s+a_0}{(s+\beta)(s+\alpha)^3}$	$\frac{(a_0-\beta)e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)^3}$ $-\left[\frac{(a_0-\alpha)t^2}{2(\alpha-\beta)}+\frac{(a_0-\beta)t}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{a_0-\beta}{(\alpha-\beta)^3}\right]e^{-\alpha t}$
153	$\frac{s^2+a_1 s+a_0}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left[(a_1\alpha-a_0+a_0\alpha t)+(\alpha^2-a_1\alpha+a_0)e^{-\alpha t}\right]$
154	$\frac{s^2+a_1 s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{a_0}{\alpha\beta}+\frac{a_1\alpha-a_0-\alpha^2}{\alpha(\beta-\alpha)}e^{-\alpha t}+\frac{a_1\beta-a_0-\beta^2}{\beta(\alpha-\beta)}e^{-\beta t}$
155	$\frac{s^2+a_1 s+a_0}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{a_1+a_0 t}{\alpha\beta}-\frac{a_0(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2}+\frac{a_1\alpha-a_0-\alpha^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t}$ $+\frac{a_1\beta-a_0-\beta^2}{\beta^2(\beta-\alpha)}e^{-\beta t}$
156	$\frac{s^2+a_1 s+a_0}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}e^{-\alpha t}+\frac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}e^{-\beta t}$ $+\frac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}e^{-\gamma t}$
157	$\frac{s^2+a_1 s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{a_0}{\alpha\beta\gamma}-\frac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}e^{-\alpha t}$ $-\frac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{\beta(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}e^{-\beta t}-\frac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}e^{-\gamma t}$
158	$\frac{s^2+a_1 s+a_0}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{a_1+a_0 t}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$ $+\frac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}\frac{e^{-\beta t}}{\beta^2}+\frac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2}$ $-\frac{a_0(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$
159	$\frac{s^2+a_1 s+a_0}{s(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{a_0}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}\sqrt{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}\cos(\alpha t+\phi)$, $\phi=-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\alpha}{\alpha^2-a_0}\right)$

序号	$F(s)$	$f(t)$
160	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s^2+\alpha^2)}$	$\dfrac{a_1+a_0t}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\alpha^3}\sqrt{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}\sin(\alpha t+\phi)$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_1\alpha}{a_0-\alpha^2}\right)$
161	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{(s+\beta)(s^2+\alpha^2)}$	$\dfrac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\beta t}+\dfrac{\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha}\sqrt{\dfrac{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}{\alpha^2+\beta^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_0-\alpha^2}{a_1\alpha}\right)$
162	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+\beta)(s^2+\alpha^2)}$	$\dfrac{a_0}{\alpha^2\beta}-\dfrac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\beta t}-\dfrac{\cos(\alpha t+\phi)}{\alpha^2}\sqrt{\dfrac{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}{\alpha^2+\beta^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_0-\alpha^2}{a_1\alpha}\right)$
163	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\beta)(s^2+\alpha^2)}$	$\dfrac{a_1\beta-a_0+a_0\beta t}{\alpha^2\beta^2}+\dfrac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\beta t}+\dfrac{\cos(\alpha t+\phi)}{\alpha^3}\sqrt{\dfrac{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}{\alpha^2+\beta^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_1\alpha}{a_0-\alpha^2}\right)$
164	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{(s+\beta)(s+\gamma)(s^2+\alpha^2)}$	$\dfrac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{(\gamma-\beta)(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\beta t}+\dfrac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\beta-\gamma)(\alpha^2+\gamma^2)}e^{-\gamma t}+\dfrac{\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha}\sqrt{\dfrac{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_1\alpha}{a_0-\alpha^2}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$

续表 21

序号	$F(s)$	$f(t)$
165	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+\beta)(s+\gamma)(s^2+\alpha^2)}$	$-\frac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{\beta(\gamma-\beta)(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\beta t}$ $-\frac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{\gamma(\beta-\gamma)(\alpha^2+\gamma^2)}e^{-\gamma t}$ $+\frac{\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha^2}\sqrt{\frac{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}}+\frac{a_0}{\alpha^2\beta\gamma}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_0-\alpha^2}{a_1\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$
166	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\beta)(s+\gamma)(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{\beta^2-a_1\beta+a_0}{\beta^2(\gamma-\beta)(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\beta t}$ $+\frac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{\gamma^2(\beta-\gamma)(\alpha^2+\gamma^2)}e^{-\gamma t}$ $+\frac{\cos(\alpha t+\phi)}{\alpha^3}\sqrt{\frac{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}}$ $+\frac{a_1\beta\gamma-a_0(\beta+\gamma)+a_0\beta\gamma t}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$. $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\alpha}{a_0-\alpha^2}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$
167	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{\cos(\alpha t+\phi_1)}{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}\sqrt{a_1^2\alpha^2+(a_0-\alpha^2)^2}$ $+\frac{\cos(\beta t+\phi_2)}{\beta(\alpha^2-\beta^2)}\sqrt{a_1^2\beta^2+(a_0-\beta^2)^2}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^2-a_0}{a_1\alpha}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta^2-a_0}{a_1\beta}\right)$
168	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{a_0}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $\times\sqrt{\beta^2(2\alpha-a_1)^2+(\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha)^2}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\beta-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha}\right)$

续表 22

序号	$F(s)$	$f(t)$
169	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s^2[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a_1+a_0t}{\alpha^2+\beta^2}-\dfrac{2a_0\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2}+\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}$ $\times\sqrt{\beta^2(2\alpha-a_1)^2+(\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha)^2}$, $\phi=2\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)-\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\alpha\beta-a_1\beta}{\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha}\right)$
170	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}e^{-\gamma t}+\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta}$ $\times\sqrt{\dfrac{\beta^2(2\alpha-a_1)^2+(\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha)^2}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}}$, $\phi=\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_1\beta-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha}\right)-\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)$
171	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$-\dfrac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{\gamma[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]}e^{-\gamma t}+\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta}$ $\times\sqrt{\dfrac{\beta^2(2\alpha-a_1)^2+(\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha)^2}{(\alpha^2+\beta^2)[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]}}$ $+\dfrac{a_0}{\gamma(\alpha^2+\beta^2)}$, $\phi=\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)-\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\alpha\beta-a_1\beta}{\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha}\right)$ $+\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}\right)$
172	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\gamma)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{\gamma^2[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]}e^{-\gamma t}+\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}$ $\times\sqrt{\dfrac{\beta^2(2\alpha-a_1)^2+(\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha)^2}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}}$ $+\dfrac{a_1\gamma-a_0+a_0\gamma t}{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}-\dfrac{2a_0\alpha}{\gamma(\alpha^2+\beta^2)^2}$, $\phi=2\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_1\beta-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha}\right)$ $-\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)$

序号	$F(s)$	$f(t)$
173	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{(s^2+\gamma^2)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi_1)}{\beta}\times\sqrt{\dfrac{\beta^2(2\alpha-a_1)^2+(\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha)^2}{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2+(2\alpha\gamma)^2}}+\dfrac{\sin(\gamma t+\phi_2)}{\gamma}\sqrt{\dfrac{(\gamma^2-a_0)^2+a_1^2\gamma^2}{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2+(2\alpha\gamma)^2}}$，$\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_1\beta-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}\right)$，$\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_1\gamma}{a_0-\gamma^2}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}\right)$
174	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s(s^2+\gamma^2)[(s+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a_0}{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}-\dfrac{e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\phi_1)}{\beta}\times\sqrt{\dfrac{\beta^2(2\alpha-a_1)^2+(\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha)^2}{(\alpha^2+\beta^2)[(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2+(2\alpha\gamma)^2]}}-\dfrac{\sin(\gamma t+\phi_2)}{\gamma^2}\sqrt{\dfrac{(\gamma^2-a_0)^2+a_1^2\gamma^2}{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2+(2\alpha\gamma)^2}}$，$\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha^2-\beta^2+a_0-a_1\alpha}{2\alpha\beta-a_1\beta}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta}\right)$，$\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{a_1\gamma}{a_0-\gamma^2}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\gamma}\right)$
175	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+\alpha)^2}$	$\dfrac{a_0}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha^2}\left[\alpha^2-a_0-(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)\alpha t\right]e^{-\alpha t}$
176	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\left[\dfrac{2a_0-a_1\alpha}{\alpha^3}+\dfrac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha^2}\right]e^{-\alpha t}+\dfrac{2a_0}{\alpha^3}+\dfrac{a_1+a_0t}{\alpha^2}$
177	$\dfrac{s^2+a_1s+a_0}{(s+\beta)(s+\alpha)^2}$	$\dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta-a_0+a_1\beta}{(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}-\dfrac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha-\beta}e^{-\alpha t}+\dfrac{\beta^2+a_0-a_1\beta}{(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$

续表 24

序号	$F(s)$	$f(t)$
178	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+\beta)(s+\alpha)^2}$	$\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t}-\frac{\beta^2+a_0-a_1\beta}{\beta(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$ $+\frac{\alpha^2(\beta-a_1)+a_0(2\alpha-\beta)}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}+\frac{a_0}{\alpha^2\beta}$
179	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\beta)(s+\alpha)^2}$	$\frac{\beta^2+a_0-a_1\beta}{\beta^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}-\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha^2(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t}$ $+\frac{2a_0\beta-\alpha(3a_0+a_1\beta)+\alpha^2(2a_1-\alpha)}{\alpha^3(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}+\cdots$ $+\frac{a_0}{\alpha^2\beta}\left[\frac{a_1}{a_0}-\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+t\right]$
180	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s+\beta)(s+\gamma)(s+\alpha)^2}$	$\frac{(\gamma-\beta)(\alpha^2-a_0)+\gamma\beta(a_1-2\alpha)}{(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}$ $-\frac{\alpha(a_1\alpha-2a_0)}{(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}+\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\beta^2+a_0-a_1\beta}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}+\frac{\gamma^2+a_0-a_1\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)^2}e^{-\gamma t}$
181	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s^2+\beta^2)(s+\alpha)^2}$	$\frac{\sin(\beta t+\phi)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{(\beta^2-a_0)^2+a_1^2\beta^2}$ $+\frac{2\alpha(\beta^2-a_0)^2+a_1(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha t},$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}\right)-2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
182	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s^2+\beta^2)(s+\alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta^2}-\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}$ $-\frac{\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)+a_0(\alpha^2+\beta^2)+2(a_0-a_1\alpha)}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}$ $-\frac{\sin(\beta t+\phi)}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{(\beta^2-a_0)^2+a_1^2\beta^2},$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}\right)$

序号	$F(s)$	$f(t)$
183	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s^3(s^2+\beta^2)(s+\alpha)^2}$	$\frac{(a_0t+a_1)\alpha-2a_0}{\alpha^3\beta^2}+\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}$ $+\frac{(\alpha^2+\beta^2)(2a_0-a_1\alpha)+2\alpha^2(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)}{\alpha^3(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\sin(\beta t+\phi)}{\beta^3(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{(\beta^2-a_0)^2+a_1^2\beta^2}$, $\phi=2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}\right)$
184	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s+\beta)^2[(s+\alpha)^2+\gamma^2]}$	$\frac{(t-2\alpha+2\beta)(\beta^2+a_0-a_1\beta)}{\gamma^2+(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$ $+(a_1-2\beta)e^{-\beta t}+\frac{e^{-\alpha t}\sin(\gamma t+\phi)}{\gamma[\gamma^2+(\alpha-\beta)^2]}$ $\times\sqrt{\gamma^2(a_1-2\alpha)^2+(\alpha^2-\gamma^2+a_0-a_1\alpha)^2}$, $\phi=2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)+\operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{\gamma(a_1-2\alpha)}{\alpha^2-\gamma^2+a_0-a_1\alpha}\right]$
185	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}+\frac{(\beta^2+a_0-a_1\beta)t}{(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$ $+\frac{a_1(\alpha+\beta)-2(\alpha\beta+a_0)}{(\beta-\alpha)^3}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})$
186	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta^2}$ $-\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}-\frac{(\beta^2+a_0-a_1\beta)t}{\beta(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$ $+\frac{(\alpha^2-a_0)(\beta-\alpha)+2\alpha(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)}{\alpha^2(\beta-\alpha)^3}e^{-\alpha t}$ $+\frac{(\beta^2-a_0)(\alpha-\beta)+2\beta(\beta^2+a_0-a_1\beta)}{\beta^2(\alpha-\beta)^3}e^{-\beta t}$
187	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\frac{a_1+a_0t}{\alpha^2\beta^2}-\frac{2a_0(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}$ $+\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t}{\alpha^2(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}+\frac{(\beta^2+a_0-a_1\beta)t}{\beta^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$ $+\frac{(2a_0-a_1\alpha)(\beta-\alpha)-2\alpha(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)}{\alpha^3(\beta-\alpha)^3}e^{-\alpha t}$ $+\frac{(2a_0-a_1\beta)(\alpha-\beta)-2\beta(\beta^2+a_0-a_1\beta)}{\beta^3(\alpha-\beta)^3}e^{-\beta t}$

序号	$F(s)$	$f(t)$
188	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^2}$	$-\frac{(a_0-a_1\alpha)+(\alpha^2-\beta^2)}{2\beta^3}e^{-\alpha t}\beta t\cos\beta t$ $+\frac{(\alpha^2+\beta^2)+(a_0-a_1\alpha)+(a_1-2\alpha)\beta^2 t}{2\beta^3}$ $\times e^{-\alpha t}\sin\beta t$
189	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^3}\left\{[a_0+\alpha^2(1+a_1t)]\sin\alpha t+(\alpha^2-a_0)\alpha t\cos\alpha t\right\}$
190	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^4}-\frac{\cos(\alpha t+\phi_2)}{2\alpha^4}\sqrt{4a_0^2+a_1^2\alpha^2}$ $-\frac{t\sin(\alpha t+\phi_1)}{2\alpha^3}\sqrt{(\alpha^2-a_0)^2+a_1^2\alpha^2}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\alpha}{a_0-\alpha^2}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\alpha}{2a_0}\right)$
191	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{a_1+a_0t}{\alpha^4}+\frac{t\cos(\alpha t+\phi_1)}{2\alpha^2}\sqrt{(\alpha^2-a_0)^2+a_1^2\alpha^2}$ $-\frac{\sin(\alpha t+\phi_2)}{2\alpha^3}\sqrt{(\alpha^2-3a_0)^2+4a_1^2\alpha^2}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_1\alpha}{a_0-\alpha^2}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2a_1\alpha}{3a_0-\alpha^2}\right)$
192	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{(s+\alpha)^3}$	$\frac{1}{2}\left[4+2(a_1-2\alpha)t+(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t^2\right]e^{-\alpha t}$
193	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s(s+\alpha)^3}$	$-\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t^2}{2\alpha}e^{-\alpha t}-\frac{(a_0+\alpha^2)t}{\alpha^2}e^{-\alpha t}$ $-\frac{a_0}{\alpha^3}e^{-\alpha t}+\frac{a_0}{\alpha^3}$
194	$\frac{s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\alpha)^3}$	$\frac{(\alpha^2+a_0-a_1\alpha)t^2}{2\alpha^2}e^{-\alpha t}+\frac{(2a_0-a_1\alpha)t}{\alpha^3}e^{-\alpha t}$ $+\frac{3a_0-a_1\alpha}{\alpha^4}e^{-\alpha t}-\frac{3a_0-a_1\alpha}{\alpha^4}+\frac{a_0t}{\alpha^3}$
195	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{a_1+a_0t}{\alpha\beta}+\left(\alpha-a_2+\frac{a_1}{\alpha}-\frac{a_0}{\alpha^2}\right)\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}$ $-\frac{a_0(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2}-\left(\beta-a_2+\frac{a_1}{\beta}-\frac{a_0}{\beta^2}\right)\frac{e^{-\beta t}}{\alpha-\beta}$

序号	$F(s)$	$f(t)$
196	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{a_0}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0}{\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\beta^3-a_2\beta^2+a_1\beta-a_0}{\beta(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}e^{-\beta t}$ $+\frac{\gamma^3-a_2\gamma^2+a_1\gamma-a_0}{\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}e^{-\gamma t}$
197	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s^2(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{a_1+a_0t}{\alpha^2}-\frac{\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha^3}$ $\times\sqrt{(a_2\alpha^2-a_0)^2+\alpha^2(\alpha^2-a_1)^2}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^3-a_1\alpha}{a_2\alpha^2-a_0}\right)$
198	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s(s+\beta)(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta}+\frac{\beta^3-a_2\beta^2+a_1\beta-a_0}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\beta t}$ $-\frac{\cos(\alpha t+\phi)}{\alpha^2}\sqrt{\frac{(a_2\alpha^2-a_0)^2+\alpha^2(\alpha^2-a_1)^2}{\alpha^2+\beta^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^3-a_1\alpha}{a_2\alpha^2-a_0}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
199	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\beta)(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{a_1+a_0t}{\alpha^2\beta}-\frac{a_0}{\alpha^2\beta^2}-\frac{\beta^3-a_2\beta^2+a_1\beta-a_0}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\beta t}$ $+\frac{\cos(\alpha t+\phi)}{\alpha^3}\sqrt{\frac{(a_2\alpha^2-a_0)^2+\alpha^2(\alpha^2-a_1)^2}{\alpha^2+\beta^2}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^3-a_1\alpha}{a_2\alpha^2-a_0}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
200	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{(s+\beta)(s+\gamma)(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{\beta^3-a_2\beta^2+a_1\beta-a_0}{(\beta-\gamma)(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\beta t}$ $+\frac{\gamma^3-a_2\gamma^2+a_1\gamma-a_0}{(\gamma-\beta)(\alpha^2+\gamma^2)}e^{-\gamma t}$ $+\frac{\sin(\alpha t+\phi)}{\alpha}\sqrt{\frac{(a_2\alpha^2-a_0)^2+\alpha^2(\alpha^2-a_1)^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^3-a_1\alpha}{a_2\alpha^2-a_0}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$

序号	$F(s)$	$f(t)$
201	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}$	$\frac{\cos(\beta t+\phi_1)}{\beta(\alpha^2-\beta^2)}\sqrt{(a_2\beta^2-a_0)^2+\beta^2(\beta^2-a_1)^2}$ $-\frac{\cos(\alpha t+\phi_2)}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\sqrt{(a_2\alpha^2-a_0)^2+\alpha^2(\alpha^2-a_1)^2}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_2\beta^2-a_0}{a_1\beta-\beta^3}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_2\alpha^2-a_0}{a_1\alpha-\alpha^3}\right)$
202	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\frac{a_1+a_0t}{\alpha^2}-\frac{2a_0}{\alpha^3}+\frac{\alpha^3-a_1\alpha+2a_0}{\alpha^3}e^{-\alpha t}$ $-\frac{(\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t}{\alpha^2}e^{-\alpha t}$
203	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s(s+\beta)(s+\alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta}-\frac{(\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\alpha^4-2\alpha^3\beta+\alpha^2(a_2\beta-a_1)+a_0(2\alpha-\beta)}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\beta^3-a_2\beta^2+a_1\beta-a_0}{\beta(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$
204	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\beta)(s+\alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta}\left(\frac{a_1}{a_0}-\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+t\right)-\frac{(a_1\alpha-a_0)(\beta-2\alpha)}{\alpha^3(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\alpha^3(\beta-a_2)+a_0(\beta-\alpha)}{\alpha^3(\alpha-\beta)^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{(\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t}{\alpha^2(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t}$ $-\frac{\beta^3-a_2\beta^2+a_1\beta-a_0}{\beta^2(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$
205	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{(s+\alpha)^2(s^2+\beta^2)}$	$\frac{\alpha^4+3\alpha^2\beta^2-a_2\alpha^2+a_1\beta^2+2a_0\alpha-2a_2\alpha\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}$ $-\frac{(\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\sin(\beta t+\phi)}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{(a_2\beta^2-a_0)^2+\beta^2(\beta^2-a_1)^2}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a_2\beta^2-a_0}{a_1\beta-\beta^3}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$

续表 29

序号	$F(s)$	$f(t)$
206	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s(s+\alpha)^2(s^2+\beta^2)}$	$\frac{a_0}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\right)$ $+\frac{(\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\sin(\beta t+\phi)}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{(a_2\beta^2-a_0)^2+\beta^2(\beta^2-a_1)^2}$ $+\frac{2\alpha^3(a_1-\beta^2)-\alpha^2(a_2\alpha^2-a_2\beta^2+2a_0)}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)^2}e^{-\alpha t}$, $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta^3-a_1\beta}{a_2\beta^2-a_0}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$
207	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)-2a_2\alpha\beta+a_1(\alpha+\beta)-2a_0}{(\beta-\alpha)^3}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\beta^2(3\alpha-\beta)-2a_2\alpha\beta+a_1(\alpha+\beta)-2a_0}{(\alpha-\beta)^3}e^{-\beta t}$ $-\frac{(\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}$ $-\frac{(\beta^3-a_2\beta^2+a_1\beta-a_0)t}{(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$
208	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s(s+\alpha)^2(s+\beta)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2\beta^2}+\frac{(\alpha^3-a_1\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t}{\alpha(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}$ $+\frac{(\beta^3-a_2\beta^2+a_1\beta-a_0)t}{\beta(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$ $+\frac{\alpha^2[a_1(\alpha+\beta)-2(a_1+\alpha\beta)]+a_0(3\alpha-\beta)}{\alpha^2(\beta-\alpha)^3}e^{-\alpha t}$ $+\frac{\beta^2[a_2(\alpha+\beta)-2(a_1+\alpha\beta)]+a_0(3\beta-\alpha)}{\beta^2(\alpha-\beta)^3}e^{-\beta t}$
209	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^2}$	$\frac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{2\beta^3}\left[a_0+(a_2-\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha(a_1+2\beta^2)\right.$ $\left.+(3\alpha^2-\beta^2-2a_2\alpha+a_1)\beta^2t\right]+\frac{e^{-\alpha t}\cos\beta t}{2\beta^3}\{2\beta^3$ $-\beta t\left[a_2(\alpha^2-\beta^2)-a_1\alpha+a_0+\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\right]\}$
210	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s^2(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{a_1+a_0t}{\alpha^4}-\frac{\sin(\alpha t+\phi_1)}{2\alpha^3}\sqrt{(a_2\alpha^2-3a_0)^2+4a_1^2\alpha^2}$ $+\frac{t\cos(\alpha t+\phi_2)}{2\alpha^4}\sqrt{(a_2\alpha^2-a_0)^2+\alpha^2(\alpha^2-a_1)^2}$, $\phi_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2a_1\alpha}{3a_0-a_2\alpha^2}\right)$, $\phi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha^3-a_1\alpha}{a_2\alpha^2-a_0}\right)$

续表 30

序号	$F(s)$	$f(t)$
211	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s(s+\alpha)^3}$	$\frac{a_0}{\alpha^3}+\frac{(\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t^2}{2\alpha}e^{-\alpha t}$ $-\frac{(2\alpha^3-a_2\alpha^2+a_0)t}{\alpha^2}e^{-\alpha t}+\frac{2(\alpha^3-a_0)}{\alpha^3}e^{-\alpha t}$
212	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{s^2(s+\alpha)^3}$	$\frac{a_1+a_0t}{\alpha^3}-\frac{3a_0}{\alpha^4}-\frac{(\alpha^3-a_2\alpha^2+a_1\alpha-a_0)t^2}{2\alpha^2}e^{-\alpha t}$ $-\frac{(\alpha^3-a_1\alpha+2a_0)t}{\alpha^3}e^{-\alpha t}+\frac{2a_1\alpha-6a_0}{\alpha^4}e^{-\alpha t}$
213	$\frac{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}{(s+\alpha)^4}$	$\left[1+(a_2-3\alpha)t+\frac{1}{2}(a_1-2a_2\alpha+2\alpha^2)t^2\right.$ $\left.+\frac{1}{6}(a_0-a_1\alpha+a_2\alpha^2-\alpha^3)t^3\right]e^{-\alpha t}$
214	$\sqrt{s-\alpha}-\sqrt{s-\beta}$	$\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$
215	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\mathrm{ch}\left(\frac{\pi s}{2\omega}\right)$	$\lvert\sin\omega t\rvert$
216	$\ln(s+\alpha)-\ln(s+\beta)$	$\frac{1}{t}(e^{-\beta t}-e^{\alpha t})$
217	$\ln(s^2+a^2)-2\ln s$	$\frac{2}{t}(1-\cos at)$
218	$\frac{1}{s}e^{\frac{a}{s}}$	$J_0(2\sqrt{at})$
219	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\pi t}$
220	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$	$\frac{\mathrm{ch}2\sqrt{at}}{\pi t}$
221	$\frac{\ln s}{s}$	$-0.5772-\ln t$
222	$\frac{\ln s}{s^2+1}$	$Si(t)\cos t-Ci(t)\sin t$
223	$\frac{s\ln s}{s^2+1}$	$-Si(t)\sin t-Ci(t)\cos t$
224	$\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\sin at}{t}$
225	e^{-as}	$\delta(t-a)$

续表 31

序号	$F(s)$	$f(t)$
226	$\frac{1}{s}e^{-as}$	$u(t-a)$
227	$\frac{1}{s^2}e^{-as}$	$(t-a)u(t-a)$
228	$\frac{e^{-as}}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha(t-a)}u(t-a)$
229	$\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$，$(n=0,1,2,\cdots)$	$L_n(t)$
230	$\frac{e^{-as}}{(s+\alpha)^2}$	$(t-a)e^{-\alpha(t-a)}u(t-a)$
231	$\frac{e^{-as}}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{e^{-\alpha(t-a)}-e^{-\beta(t-a)}}{\beta-\alpha}u(t-a)$
232	$\frac{1}{s}(1-e^{-as})$	$u(t)-u(t-a)$
233	$\frac{(s+a)e^{-as}}{as^2}$	$\left(t-a+\frac{1}{a}\right)u(t-a)$
234	$\frac{e^{-as}}{s(s+a)(s+\beta)}$	$\left[\frac{1}{a\beta}-\frac{e^{-a(t-a)}}{a(\beta-a)}-\frac{e^{-\beta(t-a)}}{\beta(a-\beta)}\right]u(t-a)$
235	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{a}{2t\sqrt{\pi t}}e^{\frac{a^2}{4t}}$
236	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{\frac{a^2}{4t}}$
237	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
238	$\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}e^{\beta(s-\sqrt{s^2+\alpha^2})}$	$J_0\left(\alpha\sqrt{t(t+2\beta)}\right)$
239	$\frac{1}{\sqrt{s}}\sin\frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{2at}\sin\sqrt{2at}}{\sqrt{\pi t}}$
240	$\frac{1}{\sqrt{s}}\cos\frac{a}{s}$	$\frac{\operatorname{ch}\sqrt{2at}\cos\sqrt{2at}}{\sqrt{\pi t}}$
241	$\frac{1}{s\sqrt{2s}}\left(\cos\frac{a}{s}+\sin\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\operatorname{ch}\sqrt{2at}\sin\sqrt{2at}}{\sqrt{\pi a}}$

续表 32

序号	$F(s)$	$f(t)$
242	$\frac{1}{s\sqrt{2s}}\left(\cos\frac{a}{s}-\sin\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\mathrm{sh}\sqrt{2at}\cos\sqrt{2at}}{\sqrt{\pi a}}$
243	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\mathrm{sh}\frac{a}{s}$	$\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{at}-\sin 2\sqrt{at}}{2\sqrt{\pi a}}$
244	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\mathrm{ch}\frac{a}{s}$	$\frac{\mathrm{sh}2\sqrt{at}+\sin 2\sqrt{at}}{2\sqrt{\pi a}}$
245	$\ln\sqrt{\frac{s^2+\beta^2}{s^2+\alpha^2}}$	$\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t}$
246	$\ln\sqrt{\frac{s^2+\beta^2}{s^2-\alpha^2}}$	$\frac{\mathrm{ch}\alpha t-\cos\beta t}{t}$
247	$\mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\pi t}\sin 2a\sqrt{t}$
248	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$
*249	$\frac{1}{s}e^{a^2s^2}\mathrm{erfc}(as)$	$\mathrm{erf}\left(\frac{t}{2a}\right)$

注:

(1) Γ 函数 $\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x,\ (n>0)$.

(2) 第一类 n 阶贝赛尔(Bessel)函数

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}-\cdots\right]$$

(3) 误差函数 $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;

余误差函数 $\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(4) 拉盖尔(Laguerre)多项式 $L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^ne^{-x}),\ (n=0,1,2,\cdots)$.

(5) 正弦积分 $Si(x)=\int_0^x\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$; 余弦积分 $Ci(x)=\int_0^x\frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y$.

[General Information]
书名=电子工程中的积分变换
作者=BEXP
页数=456
下载位置=http://202.118.180.121/ebook/sjy01/diskyd/yd02/15/!00001.pdg